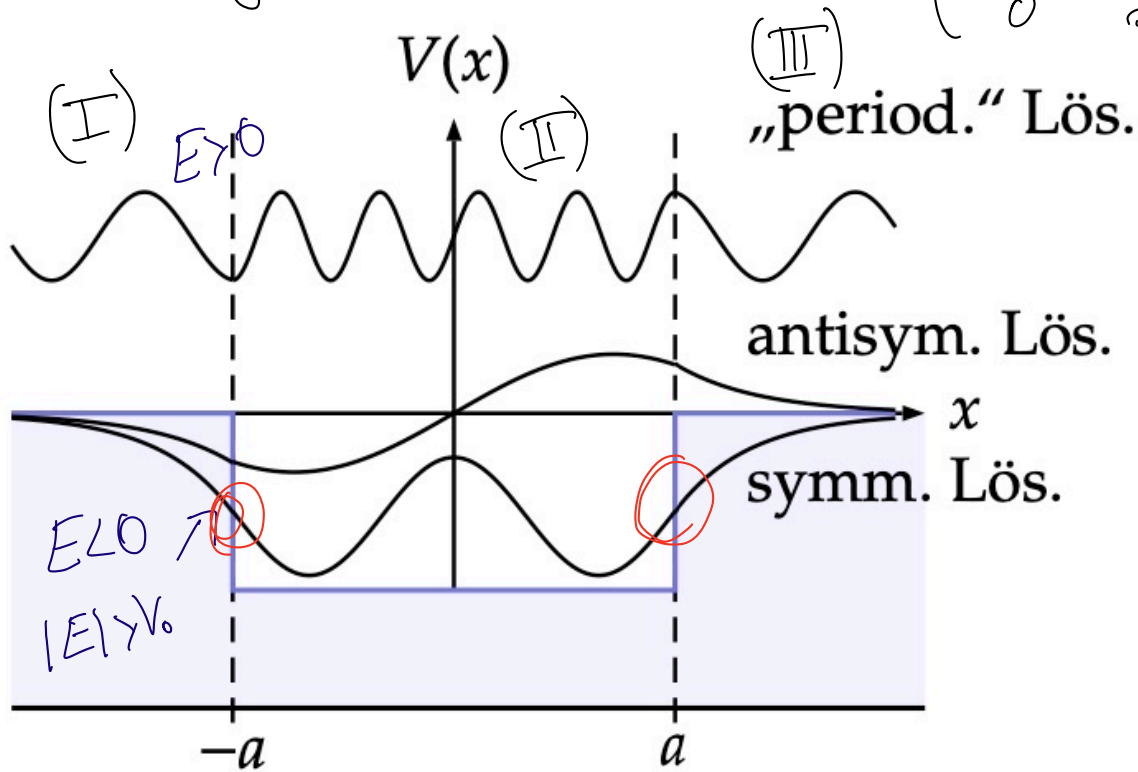


Vorherige Vorlesung: Potentialtopf: $V(x) = \begin{cases} -V_0 & \text{für } |x| < a \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

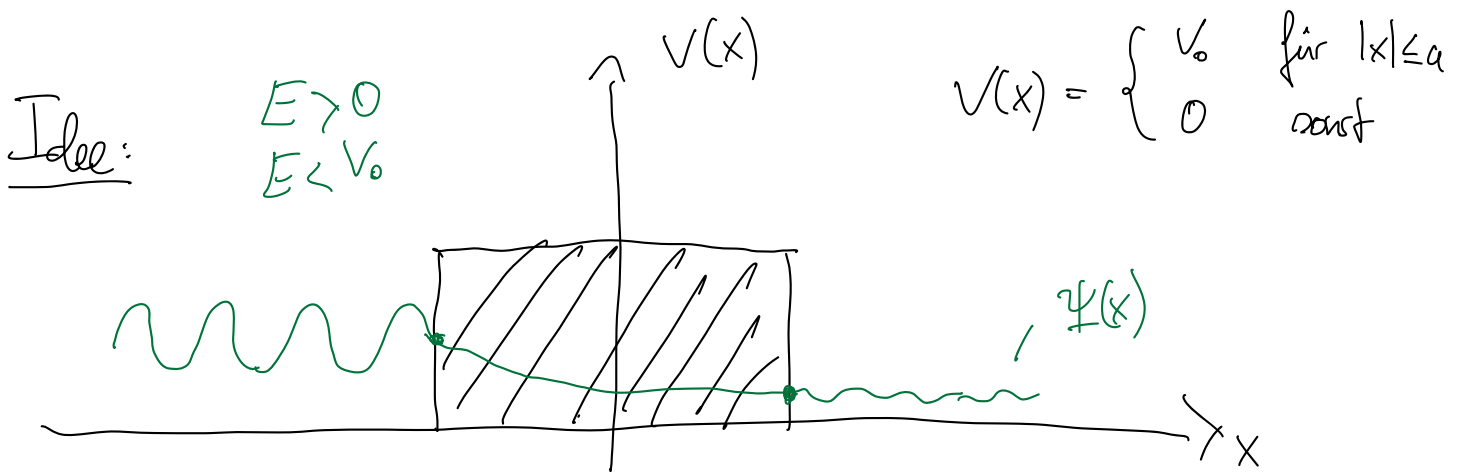


1. Stetigkeit der WF $\Psi_{\text{I}}(-a) = \Psi_{\text{II}}(-a)$ $\Psi_{\text{II}}(a) = \Psi_{\text{III}}(a)$

2. Stetigkeit der Ableitung der WF $\Psi'_{\text{I}}(-a) = \Psi'_{\text{II}}(-a)$ $\Psi'_{\text{II}}(a) = \Psi'_{\text{III}}(a)$

3. $\Psi(\pm\infty) \rightarrow 0$ für $E < 0$

Die Wahrscheinlichkeit ein Teilchen an Orten, die klassisch (energetisch) nicht erlaubt sind, ist > 0 !



3.4 Der Tunneleffekt

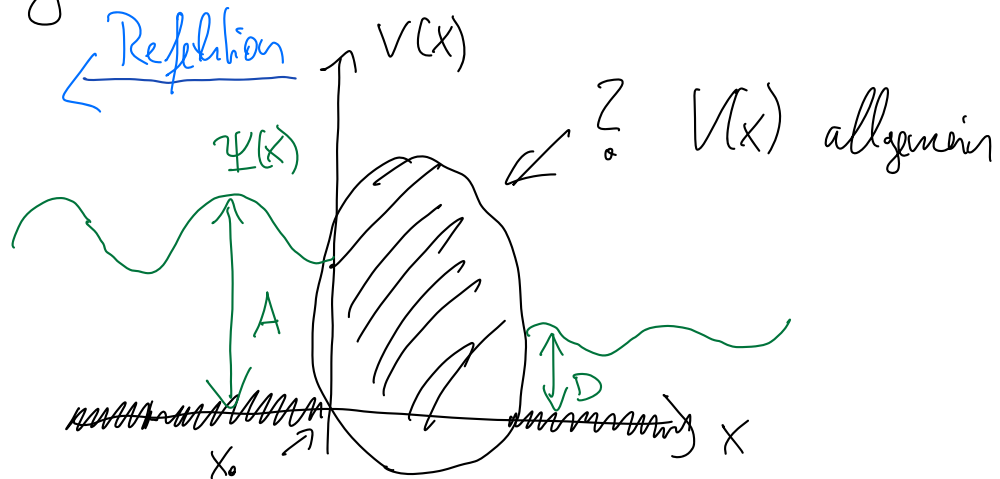
Die nicht-verschwindende Wahrscheinlichkeit, dass ein Quant mit $E < V_0$ den Potentialberg (Kasten) V_0 durchdringt (was klassisch unmöglich wäre), nennt man Tunneleffekt.

Physikalische Beispiele sind der α -Zerfall von Kernen, aber auch "das Ende des Mooreschen Laws" (Tunneleffekt limitiert die klassische Chipgröße).

Eine mathematische Näherung, die dieses Problem löst, wird durch die sogenannte WKB Methode ermöglicht (Wentzel, Kramers, Brillouin)

3.4.1 Die WKB-Approximation (1926)

Lösung der Schrödinger Gleichung für einen allgemeinen Potentialberg.



$$P(x) \sim |\psi(x)|^2 \Rightarrow P_{\text{tunnel}} \sim \frac{|D|^2}{|A|^2}$$

Die stationäre Lösung der SGL für ein allgemeines Potential in einer Dimension und im Ortsraum lautet:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x) + V(x) \psi(x) = E \psi(x)$$

$$f^2(x) \equiv 2m(E - V(x)) \stackrel{\text{Idee}}{\leftrightarrow} p^2(x)$$

$$\Rightarrow f(x) = \pm \sqrt{2m(E - V(x))} \in \mathbb{C}$$

$$\text{da } E \text{ und } V(x) \in \mathbb{R} \Rightarrow f^2 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \Psi''(x) = -(E - V(x)) \Psi(x) \left(\frac{\hbar^2}{2m}\right)^{-1}$$

$$= -\frac{p^2(x)}{\hbar^2} \Psi(x)$$

$\in \mathbb{C}$

$$\Psi(x) = A(x) \exp\{i \varphi(x)\} \quad A(x), \varphi(x) \in \mathbb{R}$$

$$\Psi' = A' e^{i\varphi} + A i \varphi' e^{i\varphi}$$

$$\Psi'' = A'' e^{i\varphi} + 2A' i \varphi' e^{i\varphi} + A i \varphi'' e^{i\varphi} + A (i \varphi')^2 e^{i\varphi}$$

$$= A e^{i\varphi} \left[\frac{A''}{A} + \frac{2iA'\varphi'}{A} + i\varphi'' - (\varphi')^2 \right]$$

$$= \Psi \left[\frac{A''}{A} + \frac{2iA'\varphi'}{A} + i\varphi'' - (\varphi')^2 \right]$$

$$\stackrel{!}{=} -\frac{p^2}{\hbar^2} \Psi$$

$$\operatorname{Re}\left(-\frac{p^2}{\hbar^2}\right) = \operatorname{Re}[\dots] = \frac{A''}{A} - (\varphi')^2$$

$$\operatorname{Im}\left(-\frac{p^2}{\hbar^2}\right) = 0 = \operatorname{Im}[\dots] = \frac{2A'\varphi'}{A} + \varphi''$$

$$\Rightarrow A'' = \overset{(\text{I})}{A(\varphi')^2 - A \frac{p^2}{\hbar^2}} \quad \underline{\underline{2A'\varphi' = -A\varphi''}} \overset{(\text{II})}$$

$$2 A' \Phi' + A \Phi'' = 0 \quad | \cdot A$$

$$2 A' A \Phi' + A^2 \Phi'' = 0 = \frac{d}{dx} \left(\underbrace{A^2 \Phi'}_{2 A' A \Phi'} \right) = 0$$

$$\Rightarrow A^2 \Phi' = \text{const} = C^2$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{A(x) = \pm \frac{C}{\sqrt{\Phi'(x)}}}}$$

$$\text{(II)} \quad - \frac{f^2(x)}{\hbar^2} A(x) = A''(x) - (\Phi'(x))^2 A(x)$$

Approximation von WKB: $\frac{A''(x)}{A(x)} \ll (\Phi'(x))^2$

wenig oszilliert im Vergleich zur Phase
 \approx ebene Welle (andere Potentiale erlauben ebenfalls, dass diese Näherung exakt ist).

$$\Rightarrow - \frac{f^2(x)}{\hbar^2} \cancel{A(x)} \approx - (\Phi'(x))^2 \cancel{A(x)}$$

$$\Rightarrow \Phi'(x) = \pm \frac{f(x)}{\hbar} \Rightarrow \Phi(x) = \pm \frac{1}{\hbar} \int_{x_0}^x f(x) dx$$

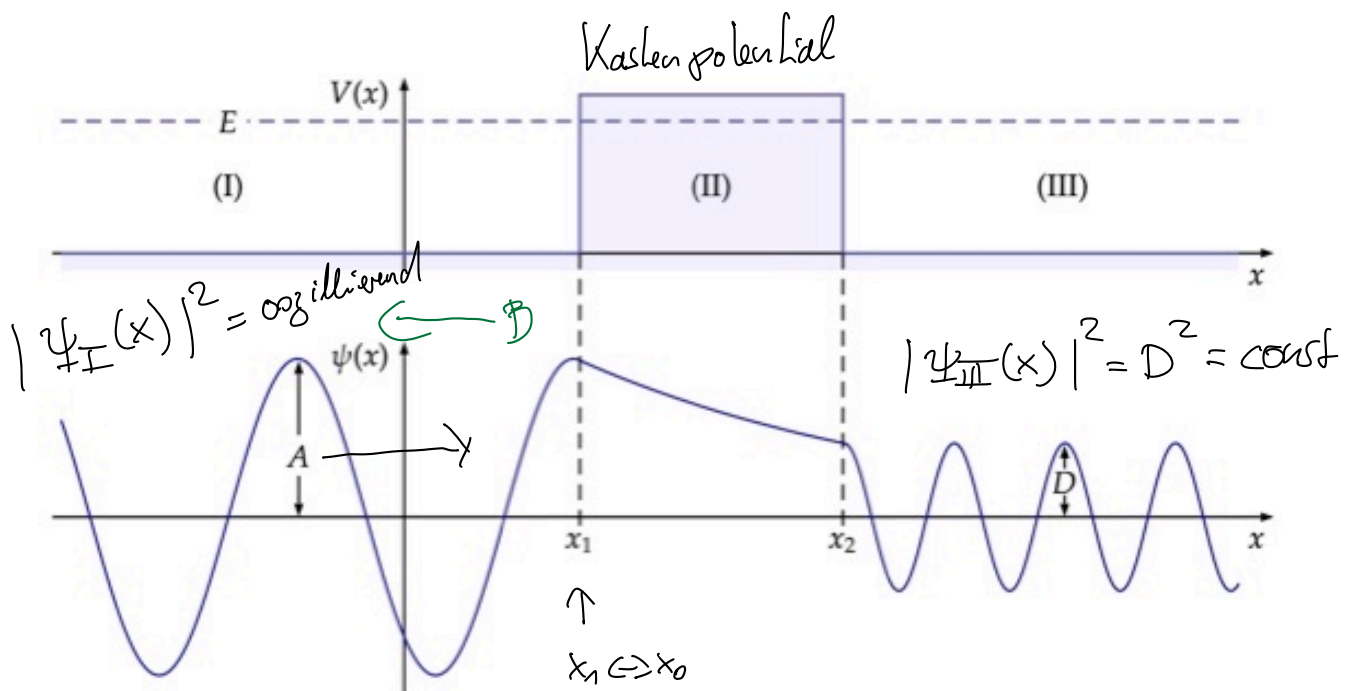
Rahmenbedingung angepasst
 Anfangspunkt der Barriere!

$$\Psi(x) = A(x) \exp\{i\phi(x)\}$$

$$\stackrel{\text{WKB}}{\approx} \pm \frac{c}{\sqrt{|f(x)|}} \exp\left\{ \pm \frac{i}{\hbar} \int_{x_0}^x dx f(x) \right\}$$

$$f(x) = \pm \sqrt{2m(E - V(x))}$$

Wie berechnet man nun die Tunnelwahrscheinlichkeit P_{Tunnel}



In (I, III) ist $V(x) = 0 \Rightarrow p(x) = \sqrt{2mE} = \text{const}$

$$\Rightarrow \Psi_I(x) = A e^{+ip_I x/\hbar} + B e^{-ip_I x/\hbar}$$

Reflexion entgegen

$$\Psi_{III}(x) = D e^{+ip_{III} x/\hbar}$$

propagation nach rechts

$P_I = P_{III}$

$$\langle \hat{p} | \hat{p} \rangle \sim e^{+ip \cdot x}$$

In (II) gilt $f(x) = \pm \sqrt{2m(E - V_0)}$ mit $V_0 > E$

$$= \pm i \sqrt{2m|E - V_0|} = \text{const}$$

$$\Rightarrow A'(x) \text{ ist const} \Rightarrow \underline{\underline{\text{WKB exakt}}}$$

$$\Rightarrow \psi_{\text{II}}(x) = \tilde{c}_{\pm} \exp\left\{ \pm \frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^x \sqrt{2m|E - V_0|} dx \right\}$$

$x_1 \leq x \leq x_2$

$$= \tilde{c}_{\pm} \exp\left\{ \pm \frac{|p_{\text{II}}|}{\hbar} (x - x_1) \right\}$$

Wir wollen weiterhin, dass

$$\begin{aligned} \psi_{\text{I}}(x_1) &= \psi_{\text{II}}(x_1) \\ \psi_{\text{II}}(x_2) &= \psi_{\text{III}}(x_2) \\ \psi'_{\text{I}}(x_1) &= \psi'_{\text{II}}(x_1) \\ \psi'_{\text{II}}(x_2) &= \psi'_{\text{III}}(x_2) \end{aligned}$$

4 Gleichungen für 5 Koeffizienten \Rightarrow Wähle $\tilde{c}_+ = 0$

$$\psi_{\text{I}}(x_1) = \tilde{c} e^{-|p_{\text{I}}|/\hbar \cdot 0} = \psi_{\text{II}}(x_1)$$

$$\psi_{\text{II}}(x_2) = \tilde{c} e^{-|p_{\text{II}}|/\hbar (x_2 - x_1)} = \psi_{\text{III}}(x_2)$$

$$e^{-|p_{\text{II}}| (x_2 - x_1) / \hbar} = \frac{\psi_{\text{III}}(x_2)}{\psi_{\text{II}}(x_1)} \quad | \cdot |^2$$

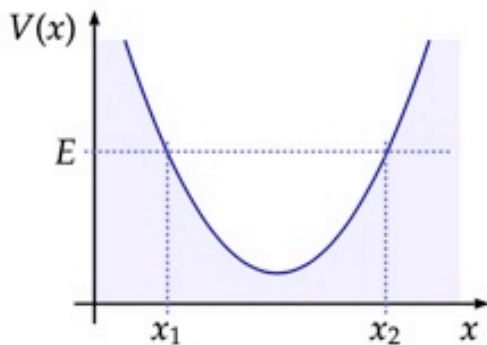
$$\Rightarrow \exp \left\{ -2 |p_{II}| (x_2 - x_1) / \hbar \right\} = \left| \frac{A_{III}(x_2)}{A_{I}(x_1)} \right|^2 = \frac{|D|^2}{|A|^2} = \frac{1}{T}$$

$$\Rightarrow T \equiv \frac{|D|^2}{|A|^2} \stackrel{\substack{\text{WKB exakt} \\ \downarrow}}{}}{=} \exp \left\{ -\frac{2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} |p(x)| dx \right\}$$

Die WKB Näherung funktioniert für viele Systeme gut, da $p(x)$ quantisiert ist mit $T\hbar + \text{const}$

\Rightarrow Die Amplitude $A(x)$ wenig oszilliert $\dot{A}(x) \approx 0$

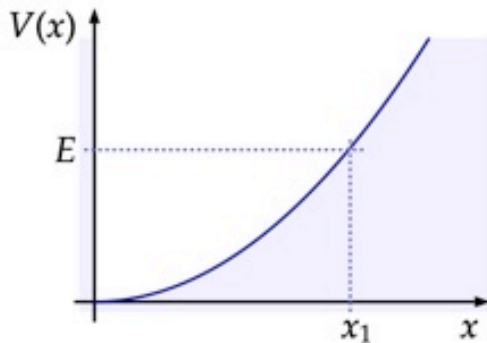
(a) Potentiale ohne unendlich hohe Wände:



Harmonische Oszillatoren

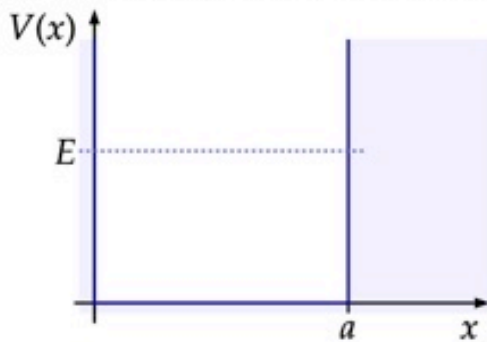
$$\int_{x_1}^{x_2} p(x) dx = \left(n + \frac{1}{2}\right) \pi \hbar$$

(b) Potentiale mit einer unendlich hohen Wand:



$$\int_0^{x_2} p(x) dx = \left(n + \frac{3}{4}\right) \pi \hbar$$

(c) Potentiale mit zwei unendlich hohen Wänden:



$$\int_0^a p(x) dx = (n + 1) \pi \hbar$$

jeweils mit $n \in \mathbb{N}_0$.

Beispiel: Harmonischer Oszillator

$V_{HO} = \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$ Die Punkte mit $V(x_i) = E$ sind gegeben mit $x_{1/2} = \pm \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}$

$$\Rightarrow \int_{x_1}^{x_2} p(x) dx \stackrel{(\ominus)}{=} \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{2m \left(E - \frac{1}{2} m \omega^2 x^2\right)}$$

$$\textcircled{=} \quad m\omega \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{x_0^2 - x^2} \quad \text{mit } x_0^2 = \frac{2E}{m\omega^2} = x_1^2 = x_2^2$$

$$\textcircled{=} \quad m\omega \cdot \frac{1}{2} \left[\cancel{x \sqrt{x_0^2 - x^2}} + x_0^2 \operatorname{arcsin}\left(\frac{x}{x_0}\right) \right]_{x=-x_0}^{x=x_0}$$

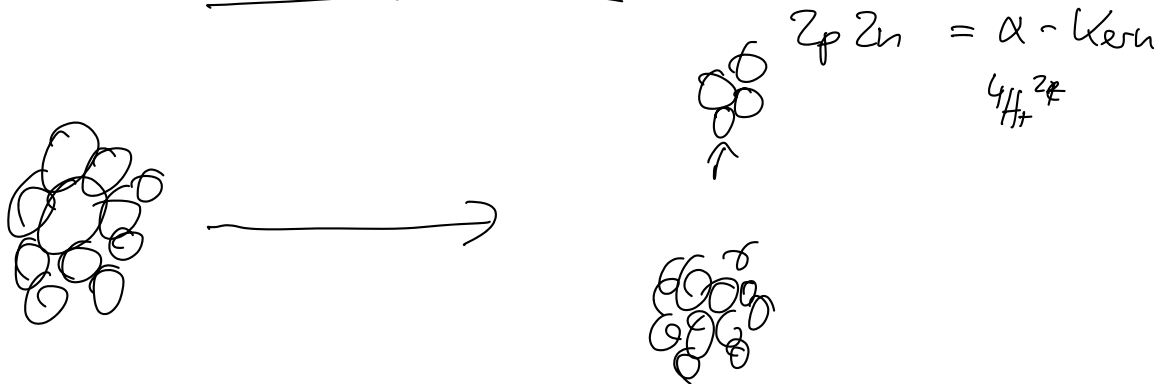
$$= \frac{1}{2} m\omega x_0^2 \left[\overset{\pi/2}{\operatorname{arcsin}(1)} - \overset{-\pi/2}{\operatorname{arcsin}(-1)} \right]$$

$$= \frac{m\omega x_0^2}{2} \pi = \frac{E}{\omega} \pi = \pi \hbar \left(n + \frac{1}{2}\right) //$$

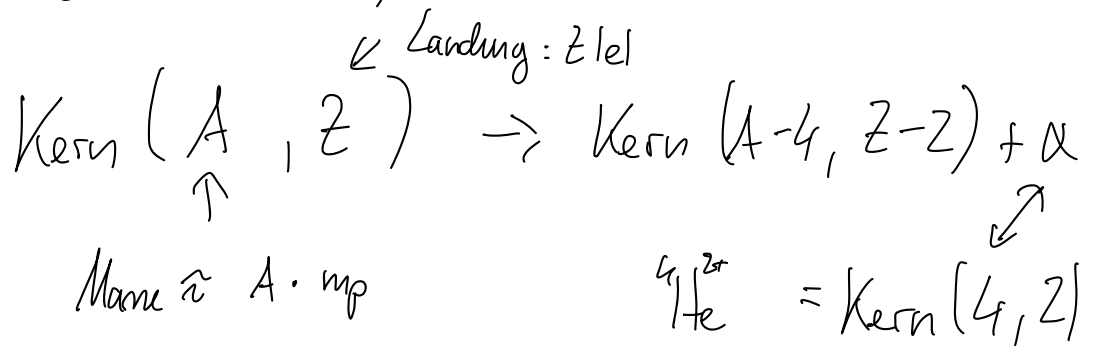
\uparrow
 $E_n = \hbar\omega \left(n + \frac{1}{2}\right)$

\Rightarrow Für den harmonischen Oszillator ist WKB exakt!

3.4.2 Der α -Zerfall als Beispiel für den Tunnelkoeffizient.



Der α -Zerfall bezeichnet die spontane Emission eines α -Teilchens (\cong Heliumkern) aus bestimmten radioaktiven Kernen.

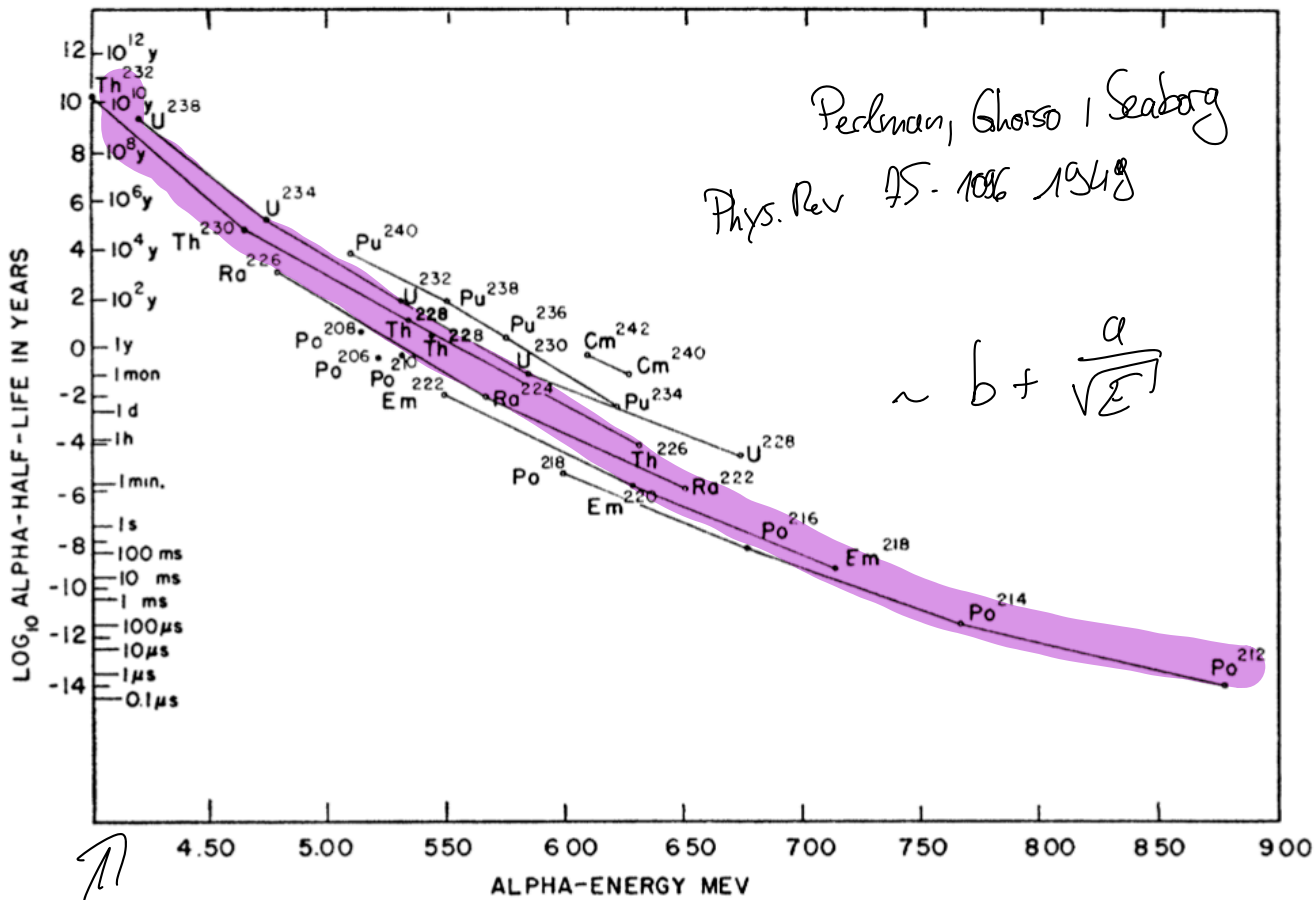


1928 entwickelte Gamow eine Vorstellung die diesen Prozess beschreibt

logarithmus \uparrow Halbwertszeit

$$g \ln(\lambda_{\text{Kern}}) = a \frac{1}{\sqrt{E}} + b$$

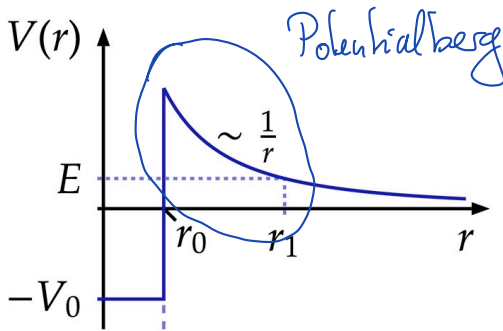
\nwarrow Parameter \searrow experimentell bestimmbar
 \nwarrow Energie (kinetisch) des α -Teilchens



↗
≠ 0

ALPHA-ENERGY MEV

↑
Kinetische Energie des α Teilchens $1 \text{ MeV} \approx 1.6 \cdot 10^{-13} \text{ J}$



Atomkernpotential zur Bindung der pos. geladenen Nukleonen

Atomhüllenpotential $\hat{=}$ Coulombpotential

$$r_0 \sim 10^{-15} \text{ m}$$

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & r < r_0 \\ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_{\text{Kern}} q_{\alpha}}{r} & r > r_0 \end{cases}$$

$$q_{\text{Kern}} = Ze \quad (\text{nach Zerfall})$$

$$q_{\alpha} = 2e$$

$$r_1 \rightarrow E = V(r_1) \text{ mit } r_1 > r_0$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2Ze^2}{r_1} \Rightarrow r_1 = \frac{2Ze^2}{4\pi\epsilon_0 E} \approx \frac{2 \cdot 100 \text{ eV}^2}{4\pi\epsilon_0 \cdot 5 \text{ MeV}}$$

$\approx 1.602 \cdot 10^{-15}$
 $8.85 \cdot 10^{-12} \cdot 5.16 \cdot 10^6$

$$\Gamma_1 \approx 2.3 \cdot 10^{-11} \text{ m}$$

$$\Gamma_1 \gg \Gamma_0$$

In der WK B Näherung erhält man

$$P_{\text{Tunnel}} \approx \exp \left\{ -\frac{2}{\hbar} \int_{\Gamma_0}^{\Gamma_1} \sqrt{2m \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r} - E \right)} dr \right\}$$

$\Gamma_1 \leftarrow$ Ende
 Γ_0
 \nearrow Anfang Berg

$$\approx \exp \left\{ -\frac{2}{\hbar} \sqrt{2mE} \int_{\Gamma_0}^{\Gamma_1} dr \sqrt{\frac{\Gamma_1}{r} - 1} \right\}$$

$$\stackrel{\Gamma_0 \ll \Gamma_1}{\approx} \exp \left\{ -\frac{2}{\hbar} \sqrt{2mE} \left(\frac{\pi\Gamma_1}{2} - 2\sqrt{\Gamma_0\Gamma_1} \right) \right\}$$

Wahrscheinlichkeit Zerfall

$$\frac{P_{\text{Zerfalls}}}{t} = \frac{N}{t} \cdot T = \frac{v_{\alpha}}{2\Gamma_0} T$$

\downarrow
 Anzahl Zerfälle
 \leftarrow Geschwindigkeit
 \leftarrow Breite des Topfes
 \uparrow
 Zeiteinheit
 \nwarrow
 Tunnelwahrscheinlichkeit

$$\Rightarrow \text{Lebensdauer: } \tau \approx \frac{t}{P_{\text{Zerfall}}} = \frac{2\Gamma_0}{v_{\alpha}} \frac{1}{T}$$

$$\tilde{Z} = \frac{2r_0}{v\alpha} \frac{1}{\exp\left\{-\frac{2}{\hbar} \sqrt{2mE} \left(\frac{\pi r_1}{2} - 2\sqrt{r_0 r_1}\right)\right\}}$$

$$\ln(\tilde{Z}) = \ln\left(\frac{2r_0}{v\alpha}\right) + \frac{2}{\hbar} \sqrt{2mE} \left(\frac{\pi r_1}{2} - 2\sqrt{r_0 r_1}\right)$$

$$r_1 = \frac{2Ze|e|^2}{4\pi\epsilon_0 E}$$

$$= \ln\left(\frac{2r_0}{v\alpha}\right) + \frac{2}{\hbar} \sqrt{2mE} \frac{\pi}{2} \frac{2Ze|e|^2}{4\pi\epsilon_0 E^{1/2}} - \frac{2}{\hbar} \sqrt{2mE} 2\sqrt{r_0 \frac{2Ze|e|^2}{4\pi\epsilon_0 E}}$$

$$= b + \frac{a}{\sqrt{E}}$$

$$b = \ln\left(\frac{2r_0}{v\alpha}\right)$$

$$- \frac{4}{\hbar} \sqrt{\frac{m r_0 2Ze|e|^2}{\pi\epsilon_0}}$$

$$a = \frac{\sqrt{2m} Ze|e|^2}{2\hbar \epsilon_0}$$

Der α -Zerfall wird mit $1/\sqrt{E}$ beschrieben