

Zeigermodell im Physikunterricht der Kursstufe

Inhaltsverzeichnis

1	Lehrplan Kursstufe Physik (4-stündig)	2
2	Literatur	3
3	Programme zu Zeigern	3
4	Mathematische Bedeutung von Zeigern	4
4.1	Zeiger ersetzen das Rechnen mit komplexen Zahlen.....	4
4.2	Zeigeraddition vereinfacht die Addition von Schaubildern	6
4.3	Drehung von Zeigern entspricht Differenzieren bzw. Integrieren nach der Zeit	6
4.4	Alle Informationen über die Sinuslinie sind im rotierenden Zeiger enthalten.....	7
4.5	Sind Zeiger Vektoren im üblichen Sinn?	7
5	Zeigermodell im Unterricht	8
5.1	Wechselstromlehre	8
5.1.1	Wechselspannung.....	8
5.1.2	Ohmscher Widerstand bei Wechselspannung.....	8
5.1.3	Kondensator und Spule im Wechselstromkreis	9
5.1.4	Transformator.....	11
5.1.5	Drehstrom.....	12
5.2	Schwingungen	13
5.2.1	Harmonischer Schwinger	13
5.2.2	Überlagerung harmonischer Schwingungen	14
5.3	Mechanische Wellen	16
5.3.1	Fortschreitende Querwellen und Längswellen.....	16
5.3.2	Interferenz von Wellen (Quer- und Längswellen) in einem Punkt des Wellenträgers	18
5.3.3	Stehende Querwellen.....	19
5.3.4	Reflexion am festen und freien Ende	19
5.4	Interferenzphänomene	21
5.4.1	Interferenzfeld zweier Quellen im Raum.....	21
5.4.2	Interferenz beim Doppelspalt	24
5.4.3	Interferenz beim optischen Gitter.....	25
5.4.4	Interferenz beim n-fach Spalt.....	26
5.4.5	Beugung am Einzelspalt.....	29
5.4.6	Huygens-Prinzip und Strahlenoptik	34
5.5	Quantenphysik.....	37
5.5.1	Bedeutung des Zeigermodells in der Quantenphysik.....	37
5.5.2	Der Doppelspalt.....	38
5.5.3	Materiewellen, deBroglie-Wellen	39
5.5.4	Materiewellen im Schattenwurf (Ketterle).....	40
5.5.5	Elektronen in einem linearen Potentialtopf.....	43

1 Lehrplan Kursstufe Physik (4-stündig)

Verweise im Lehrplan Physik Kursstufe auf „Zeiger“

<ul style="list-style-type: none"> • <i>Lehrplaneinheit 3: Elektromagnetische Induktion</i> 	
W Stromstärke, Phasenverschiebung und Leistung beim ohmschen, kapazitiven und induktiven Widerstand sowie bei deren Reihen- und Parallelschaltung, Scheinwiderstand	Hier kann das Zeigerkonzept eingesetzt werden.
<ul style="list-style-type: none"> • <i>Lehrplaneinheit 4: Mechanische Schwingungen und Wellen</i> 	
Harmonische Schwingungen und ihre mathematische Behandlung	Dabei kann die Zeigerdarstellung eingesetzt werden.
W Überlagerung von Schwingungen	Dabei kann die Zeigerdarstellung eingesetzt werden.
Ungestörte Durchdringung und Interferenz bei Querwellen	Dabei kann die Zeigerdarstellung eingesetzt werden.
<ul style="list-style-type: none"> • <i>Lehrplaneinheit 5: Elektromagnetische Schwingungen und Wellen</i> 	
Interferenz	Bei der Beschreibung von Interferenzerscheinungen kann die Zeigerdarstellung verwendet werden.
<ul style="list-style-type: none"> • <i>Lehrplaneinheit 6: Grundlagen der Quanten- und Atomphysik</i> 	
Beschreibung der Experimente durch die Quantentheorie:	<ul style="list-style-type: none"> ✧ Zur Beschreibung der Phänomene sollte keine Modellvorstellung eingesetzt werden, in der das Nebeneinander von Wellen- und Teilchenmodell dargestellt wird. So kann z.B. die didaktische Reduktion der Quantenelektrodynamik der Ausgangspunkt für diesen Unterrichtsgang sein. Hier kann das Zeigerkonzept erneut zum Einsatz kommen, wobei Simulationen die Darstellung erleichtern können.
Determiniertheit der Zustandsfunktion	
Superposition der Möglichkeiten	
Stochastische Deutung	
Unbestimmtheitsrelation	
Nichtlokalität	

2 Literatur

- R. Feynman: QED , (Piper 1988)
- Adolf Kester: Schwingungen und Wellen in Zeigerdarstellung, (Dümmler Verlag, Dümmlerbuch 4209, (1966))
- Dorn-Bader: Physik 12/13 Gymnasium Sek II, (Schroedel Nr. 10 722, (2000))
- Dorn-Bader Physik SEK II Lehrmaterialien (Schroedel 10 735, (2002))
- Franz Bader: Eine Quantenwelt ohne Dualismus, (Schroedel Nr. 76 530 ,(1996))
- Werner Schich: Einführung und Anwendung der Zeigerdarstellung bei Schwingungen und Wellen (Skript auf LEU CD Ph 33, (2001))
- Konrad Dammeier: Zeigerdiagramme zur Beschreibung von Interferenz , Vortrag Frühjahrstagung Physik Stuttgart 1992
- Josef Küblbeck, Rainer Müller: Die Wesenszüge der Quantenphysik (Aulis Verlag 2002, Praxis Schriftenreihe Physik Band 60)

3 Programme zu Zeigern

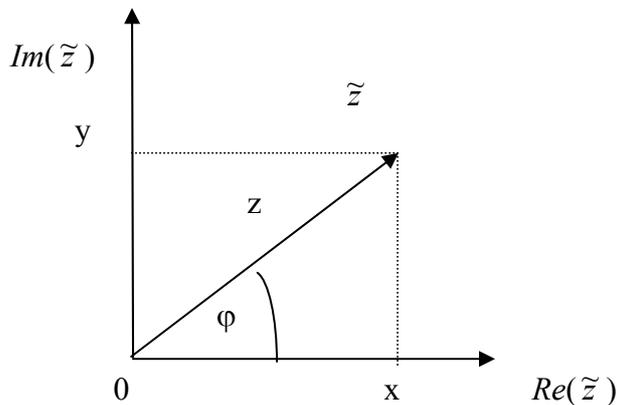
- Matthias Amelunxen: Programm „Feyn“ (auf LEU CD Ph 33)
- Franz Bader: Quantenphysik mit Pfeil-Addition (auf LEU CD Ph 33) , eine überarbeitete Version erschien im Herbst 2002 beim Schroedel Verlag
- CD: Rund um Dorn-Bader Physik SEK II (Schroedel 10 737, (2002))
- Pakma 2000, CD zu Lehrerheft Dorn-Bader Physik 12/13 (Schroedel Verlag Nr. 10 732)
- Guntram Dierolf: zeiger32.exe , zeiger.exe vom 5.6.2002 (auf Zusatz-CD zur QPh Fortbildung)
- Werner Wegner: zeigerP1.exe, blende.exe (auf Zusatz-CD zur QPh Fortbildung)

4 Mathematische Bedeutung von Zeigern

4.1 Zeiger ersetzen das Rechnen mit komplexen Zahlen

Beispiel: komplexe Zahl

$$\tilde{z} = x + iy = \operatorname{Re}(\tilde{z}) + i \cdot \operatorname{Im}(\tilde{z}) = z \cdot e^{i\varphi} = z(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$$

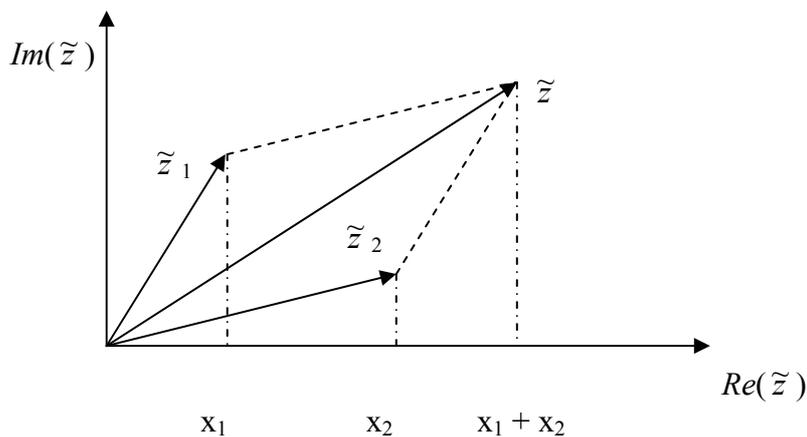


Addition komplexer Zahlen (Addition von Zeigern)

$$\tilde{z} = \tilde{z}_1 + \tilde{z}_2 = (x_1 + i y_1) + (x_2 + i y_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$\operatorname{Re}(\tilde{z}) = \operatorname{Re}(\tilde{z}_1) + \operatorname{Re}(\tilde{z}_2)$$

$$\operatorname{Im}(\tilde{z}) = \operatorname{Im}(\tilde{z}_1) + \operatorname{Im}(\tilde{z}_2)$$

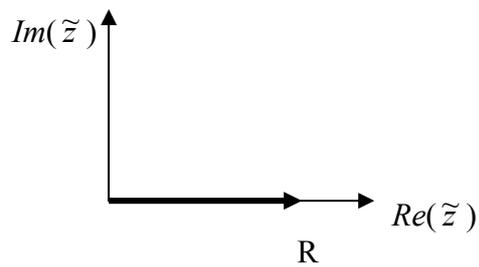


In der Schule wird in der Wechselstromlehre der Imaginärteil der "Zeiger" benutzt.

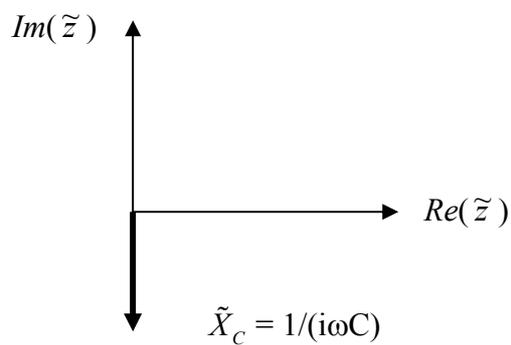
Bei dem Rechnen mit komplexen Widerständen in der Wechselstromlehre müssen dann z.B. bei der Reihenschaltung nur die Spannungen bzw. Widerstände komplex addiert werden. Die Rechnung wird dadurch vereinfacht.

Bauteile im Wechselstromkreis in Darstellung durch komplexe Zahlen

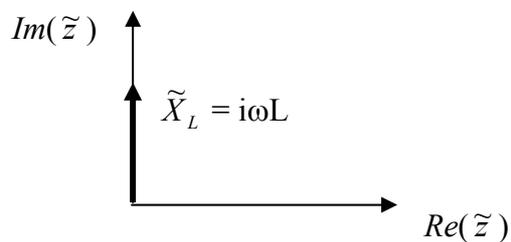
1. Ohmscher Widerstand R



2. Kapazität C



3. Induktivität L



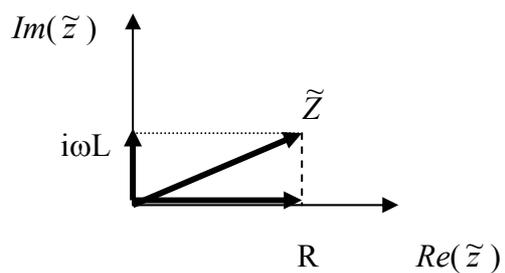
4. Reale Spule (mit R und L)

Komplexe Darstellung des Scheinwiderstands einer realen Spule

$$\tilde{Z} = R + \tilde{X}_L = R + i\omega L$$

$$\text{Betrag } |\tilde{Z}| = \sqrt{\tilde{Z} \cdot \tilde{Z}^*} = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} = \sqrt{R^2 + X_L^2}$$

Zeigerdarstellung



5. Reihenschaltung R, L, C

Komplexe Darstellung des Scheinwiderstands:

$$\tilde{Z} = R + \tilde{X}_L + \tilde{X}_C = R + i\omega L + 1/(i\omega C) = R + i(\omega L - 1/(\omega C))$$

$$\text{Betrag } |\tilde{Z}| = \sqrt{\tilde{Z} \cdot \tilde{Z}^*} = \sqrt{R^2 + (\omega L - \frac{1}{\omega C})^2}$$

4.2 Zeigeraddition vereinfacht die Addition von Schaubildern

Die Zeigeraddition „ersetzt“ und vereinfacht das Addieren der Schaubilder von Sinus- und Kosinusfunktionen. Vergleiche z.B. Schwebungen bei Schwingungen.

4.3 Drehung von Zeigern entspricht Differenzieren bzw. Integrieren nach der Zeit

a) **Differenzieren** eines (komplexwertigen) Terms $\psi(t)$ nach der Zeit bedeutet, den zugehörigen Zeiger $\hat{\psi}$ um $\pi/2$ im mathematisch positiven Sinn (Gegenuhrzeigersinn) zu drehen.

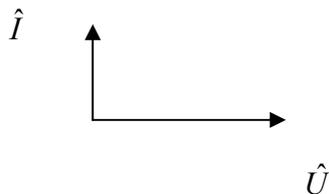
Beispiel Kondensator:

$$U(t) = \hat{U} \sin(\omega t) = \hat{Q}/C \cdot \sin(\omega t), \text{ Zeiger } \hat{U}$$

$$\text{Zugehörige Ladung: } Q(t) = \hat{Q} \sin(\omega t) = C \hat{U} \sin(\omega t)$$

$$\text{Zugehörige Stromstärke: } I(t) = \dot{Q}(t) = \hat{Q} \omega \cos(\omega t) = C \hat{U} \omega \cos(\omega t) = \hat{I} \cos(\omega t)$$

Zeiger für Stromstärke \hat{I} eilt dem Zeiger für Spannung \hat{U} um $\pi/2$ voraus.



b) **Integrieren** eines (komplexwertigen) Terms $\psi(t)$ nach der Zeit bedeutet, den zugehörigen Zeiger $\hat{\psi}$ um $\pi/2$ im mathematisch negativen Sinn (Uhrzeigersinn) zu drehen.

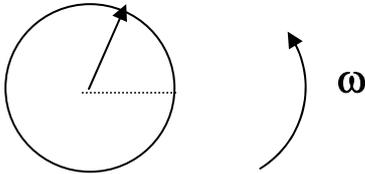
Beispiel Spule:

$$U_{\text{ind}}(t) = -L \dot{I}(t)$$

$$\text{Damit } I(t) = -1/L \cdot \int U_{\text{ind}}(t) dt .$$

Also eilt der Zeiger für Spannung \hat{U} dem Zeiger für Stromstärke \hat{I} um $\pi/2$ voraus. \hat{I} ist um $\pi/2$ gegenüber \hat{U} im Uhrzeigersinn gedreht.

4.4 Alle Informationen über die Sinuslinie sind im rotierenden Zeiger enthalten.



Rotierender Zeiger:

$$\tilde{a}(t) = \hat{A} e^{i(\omega t + \varphi_a)} = \hat{A} e^{i\varphi_a} \cdot e^{i\omega t} = \tilde{\hat{A}} e^{i\omega t}$$

$\tilde{a}(t)$ komplexer Momentanwert

\hat{A} reelle Amplitude (Scheitelwert)

$e^{i(\omega t + \varphi_a)}$ rotierender Einheitszeiger

$\hat{A} e^{i\varphi_a} = \tilde{\hat{A}}$ komplexer Scheitelwert, $e^{i\omega t}$ rotierender Einheitszeiger

4.5 Sind Zeiger Vektoren im üblichen Sinn?

Beispiel: $U(t) = \hat{U} \sin(\omega t)$; dabei ist die elektrische Spannung $U(t)$ eine skalare Größe und \hat{U} der zugehörige Scheitelwert.

Betrachtet man dagegen in einem Zeigerdiagramm einen rotierenden Zeiger der Länge \hat{U} , so steht dieser Zeiger im Zusammenhang mit einer komplexen Zahl. Die komplexen Zahlen bilden aber einen Vektorraum.

5 Zeigermodell im Unterricht

5.1 Wechselstromlehre

5.1.1 Wechselspannung

Literatur: Dorn-Bader Physik Sek II 12/13 S. 73 B3 (Schroedel Verlag 10722)

Programm: G. Dierolf



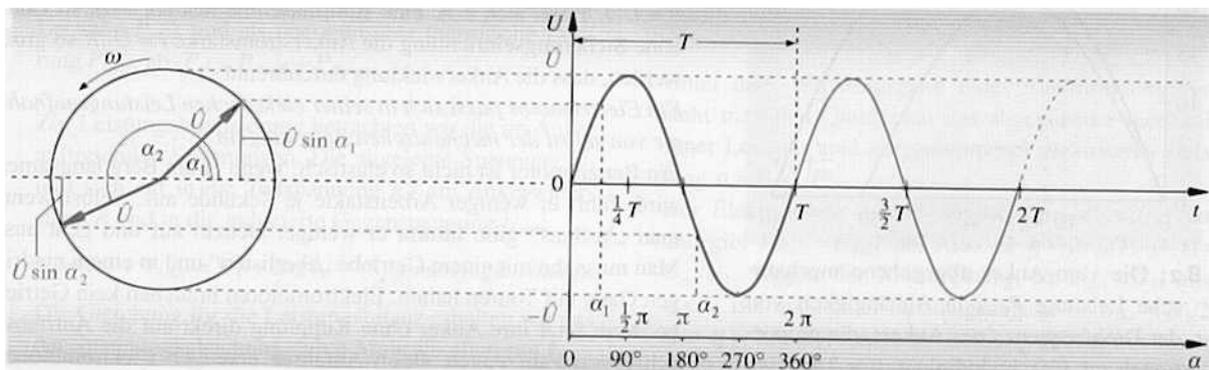
Zeiger32.exe

Die Wechselspannung einer mit konstanter Winkelgeschwindigkeit rotierenden Leiterschleife ergibt eine Sinuskurve mit der Amplitude (Scheitelwert) \hat{U} .

Sinuswerte mit Maximalwert 1 kann man als Hochwerte am „Einheitskreis“ ablesen (\Rightarrow Bild 3). Dies erlaubt auf einfache Weise, eine Sinuskurve zu konstruieren. Zu diesem Zweck zeichnen wir für den Fall einer sinusförmigen Spannung $U(t)$ mit Scheitelwert \hat{U} einen Kreis. Sein Radius entspricht der Maßzahl der Scheitelspannung \hat{U} .

Im Kreis soll ein **Zeiger** der **Länge** \hat{U} gegen den Uhrzeigersinn (im mathematisch positiven Sinn) mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit $\omega = 2\pi f$ rotieren. Der Zeiger wird dann auf die vertikale Achse des t - U -Schaubildes projiziert. Die Zeigerprojektion für den Phasenwinkel $\alpha(t)$ zwischen dem Zeiger und der Horizontalen gibt die jeweilige Spannung $U(t)$ zum Zeitpunkt $t = \alpha/\omega$ an. Auf diese Weise kann die Sinuslinie punktweise konstruiert werden.

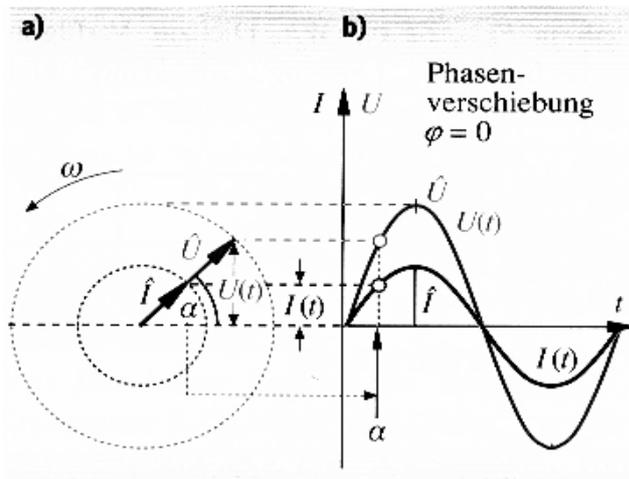
Alle Informationen über die Sinuslinie sind schon im rotierenden Zeiger enthalten!



B 3: Zeigerdiagramm: Bei der Rotation des Zeigers der Länge \hat{U} erhält man die Sinuslinie durch Projektion dieses Zeigers auf die vertikale Achse.

5.1.2 Ohmscher Widerstand bei Wechselspannung

Ein Zeigerdiagramm liefert den zeitlichen Verlauf von Spannung und Stromstärke. Da $U(t)$ und $I(t)$ in Phase sind, liegt der \hat{I} -Zeiger auf dem \hat{U} -Zeiger und rotiert mit diesem mit der gleichen Winkelgeschwindigkeit ω gegen den Uhrzeigersinn. Das $U(t)$ - und das $I(t)$ -Schaubild erhalten wir durch die Projektion des jeweiligen Zeigers auf die vertikale Achse des Schaubildes.



5.1.3 Kondensator und Spule im Wechselstromkreis

Wir können für einen Kondensator oder für eine Spule den zeitlichen Verlauf von Spannung und Stromstärke samt der Phasenverschiebung mithilfe von Zeigerdiagrammen einfach konstruieren.

a) Kapazitiver Widerstand

Legen wir an einen Kondensator die Wechselspannung $U(t) = \hat{U} \sin(\omega t)$, so gilt für seine Ladung $Q(t) = C U(t) = C \hat{U} \sin(\omega t)$.

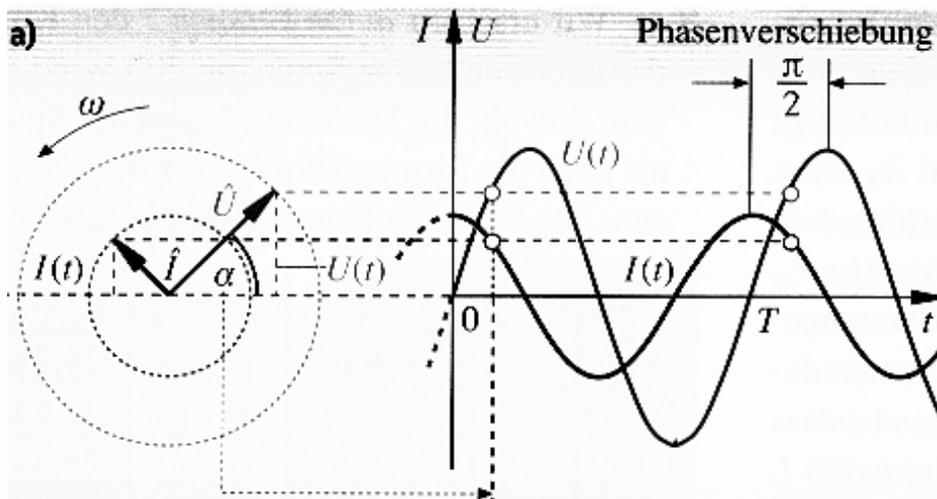
Die Stromstärke $I(t)$ erhält man durch Ableiten von $Q(t)$ nach t :

$$I(t) = \dot{Q}(t) = \omega C \hat{U} \cos(\omega t) = \hat{I} \cos(\omega t).$$

Im Zeigerdiagramm für einen Kondensator eilt damit (einmal Differenzieren nach der Zeit) der Zeiger \hat{I} dem Zeiger \hat{U} um die Phase $\pi/2$ im Drehsinn voraus.

Anfangsbedingung: Ist für $t = 0$ auch $U(0) = 0$, so liegt für $t = 0$ der \hat{U} -Zeiger horizontal.

Die zugehörigen $U(t)$ - und $I(t)$ -Schaubilder erhält man durch Projektion der Zeiger auf die vertikale Achse.



b) Induktiver Widerstand

Auf die Elektronen einer Spule wirkt nicht nur die von außen angelegte Spannung $U(t)$, sondern auch die in der Spule erzeugte Selbstinduktionsspannung $U_{\text{ind}}(t) = -L \dot{I}(t)$.

Die Stromstärke ist zu jedem Zeitpunkt $I(t) = (U(t) - L \dot{I}(t)) / R$.

Multiplizieren dieser Gleichung mit R ergibt

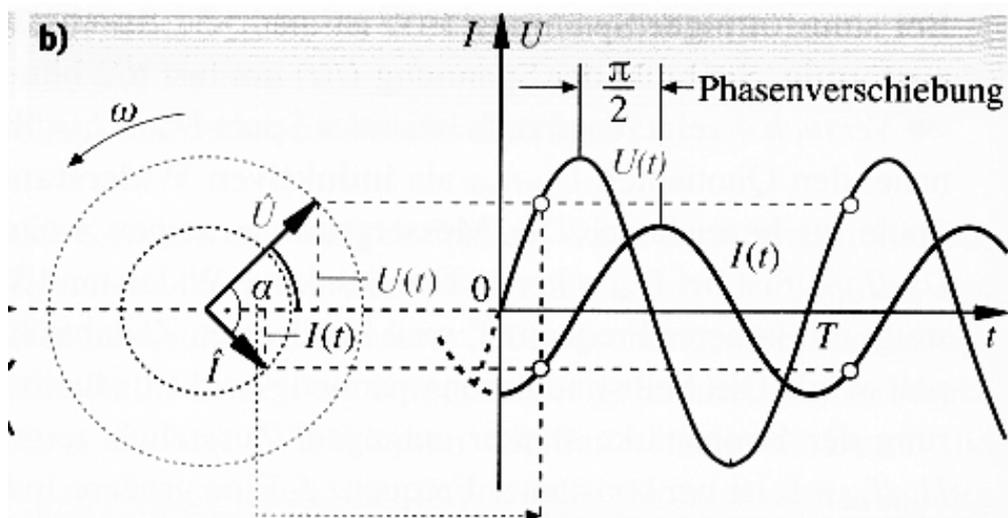
$$I(t) R = U(t) - L \dot{I}(t). \quad (1)$$

Für vernachlässigbar kleinen ohmschen Widerstand R (also $R \rightarrow 0$ für eine *ideale Spule*) ergibt sich als Näherung $0 = U(t) - L \dot{I}(t)$ oder $\dot{I}(t) = U(t)/L$.

Für die sinusförmige Spannung $U(t) = \hat{U} \sin(\omega t)$ folgt die Gleichung $\dot{I}(t) = (\hat{U}/L) \sin(\omega t)$.

Wir erhalten als Stammfunktion $I(t) = (\hat{U}/\omega L) (-\cos(\omega t))$, wie wir durch Differenzieren nach t prüfen können.

Die Stromstärke $I(t)$ wird durch eine negative Kosinusfunktion mit Scheitelwert $\hat{I} = \hat{U}/(\omega L)$ beschrieben (Zeiger \hat{I}). $I(t)$ hinkt $U(t)$ um $\pi/2$ nach. Für eine ideale Spule eilt der Zeiger \hat{U} dem Zeiger \hat{I} um $\pi/2$ voraus.



c) Reihenschaltung von R, L, C

Wie im Fall einer realen Spule berechnen wir den Scheinwiderstand Z und den Phasenwinkel φ für die Reihenschaltung mit dem Zeigerdiagramm für die Teilspannungen U_R , U_C und U_L .

a) Addieren wir zum *ohmschen* Widerstand R_1 den ohmschen Widerstand von Spule und Leitungen, so erhalten wir den **Wirkwiderstand** R . Die an ihm liegende Teilspannung $R I(t)$ ist mit der Stromstärke $I(t)$ in Phase. Ihr Zeiger $\hat{U}_R = \hat{I} R$ liegt also in Richtung des Zeigers \hat{I} , der bei der Reihenschaltung als Ausgangspunkt für das Zeigerdiagramm dient.

b) Am *induktiven* Widerstand X_L liegt die Teilspannung $U_L(t)$ und kompensiert die induzierte Spannung $U_{\text{ind}}(t) = -L \dot{I}(t)$. Ihr Zeiger $\hat{U}_L = \hat{I} \omega L$ eilt dem Zeiger \hat{I} um $\pi/2$ voraus.

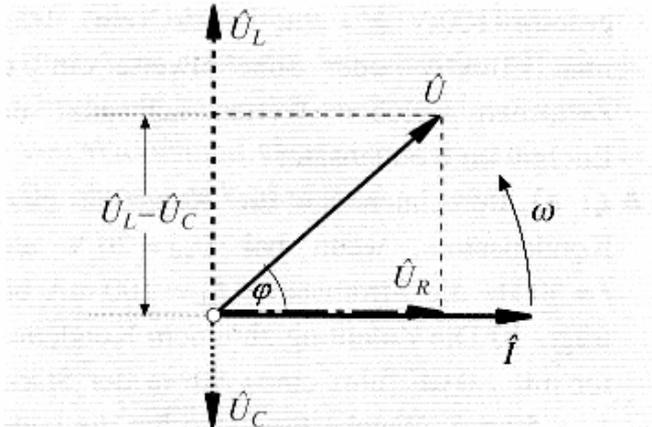
c) Am *kapazitiven* Widerstand X_C liegt die Teilspannung $U_C(t)$, die der Stromstärke $I(t)$ um $\pi/2$ nachhinkt. Ihr Zeiger $\hat{U}_C = \hat{I}/(\omega C)$ hinkt dem Zeiger \hat{I} um $\pi/2$ nach.

Die Addition der drei Spannungszeiger geht am einfachsten, wenn wir zunächst die Differenz $\hat{U}_L - \hat{U}_C$ der Gegenzeiger \hat{U}_L und \hat{U}_C bilden. Addieren wir hierzu den Zeiger \hat{U}_R , so ergibt sich als Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck der Zeiger \hat{U} der Gesamtspannung $U(t)$.

Die Stromstärke $I(t)$ ist sinusförmig und ist zur angelegten Spannung $U(t)$ um φ phasenverschoben.

Für den Phasenwinkel φ ergibt sich aus dem Zeigerdiagramm

$$\tan \varphi = (\hat{U}_L - \hat{U}_C) / \hat{U}_R = (\omega L - 1/(\omega C)) / R.$$



5.1.4 Transformator

Literatur:

- Dorn-Bader Physik Sek II 12/13 S. 88 f
- Adolf Kester: Schwingungen und Wellen in Zeigerdarstellung, S. 59 f

Die Verhältnisse bei einem Transformator werden durch die „Grundgleichung des Transformators“ $U_1(t) = +n_1 \dot{\Phi}(t)$ geregelt.

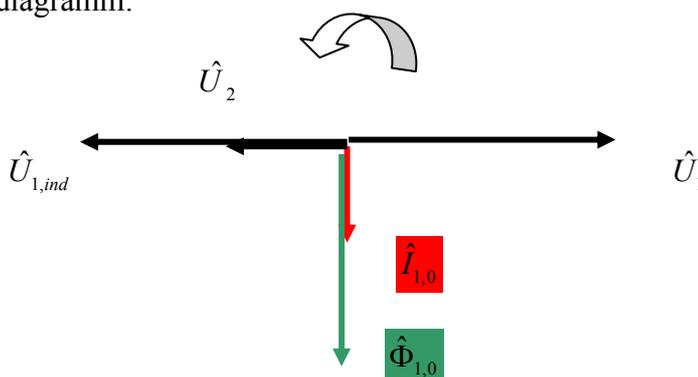
Die primärseitig angelegte Wechselspannung $U_1(t)$ bestimmt die zeitliche Änderung der magnetischen Flussdichte im Transformator.

a) Unbelasteter, idealer Trafo

Unbelasteter Trafo: $I_2 = 0$.

Idealer Trafo: keine Streuverluste des magnetischen Flusses Φ .

Zeigerdiagramm:



\hat{U}_1 von außen angelegte Primärspannung

$\hat{I}_{1,0}$ kleiner Strom in Primärspule (Blindstrom), $\hat{I}_{1,0}$ um $\pi/2$ nach \hat{U}_1 wegen L von Primärspule

$\hat{\Phi}_{1,0}$ magnetischer Fluss im Eisenkern in Phase zu $\hat{I}_{1,0}$.

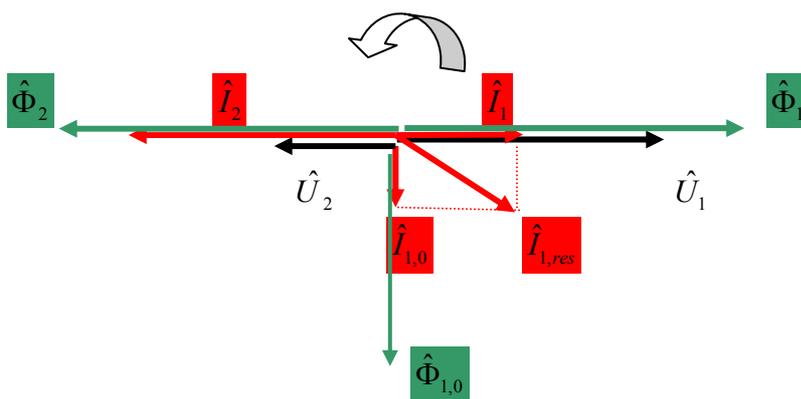
$$\hat{U}_2 / \hat{U}_1 = -n_2/n_1$$

b) Ohmsch belasteter, idealer Trafo

Nur ohmsche Last sekundärseitig, also Strom \hat{I}_2 in Sekundärspule in Phase zu \hat{U}_2 .

\hat{I}_2 damit Fluss $\hat{\Phi}_2$ im Eisenkern.

Da Gesamtfluss $\hat{\Phi}_{1,0}$ unverändert nach Grundgleichung Trafo, muss der Fluss $\hat{\Phi}_2$ durch Fluss $\hat{\Phi}_1$ kompensiert werden, der durch Strom \hat{I}_1 in Primärspule hervorgerufen wird. $\hat{I}_{1,0}$ und \hat{I}_1 ergeben den resultierenden Strom $\hat{I}_{1,res}$. $\hat{I}_{1,res}$ ist gegenüber der von außen angelegten Spannung \hat{U}_1 phasenverschoben (\hat{I}_1 ist Wirkstrom). $\hat{I}_2 / \hat{I}_1 = -n_1/n_2$. Wenn $\hat{I}_{1,0}$ sehr klein, so gilt für die messbaren Stromstärken $\hat{I}_2 / \hat{I}_{1,res} \approx -n_1/n_2$



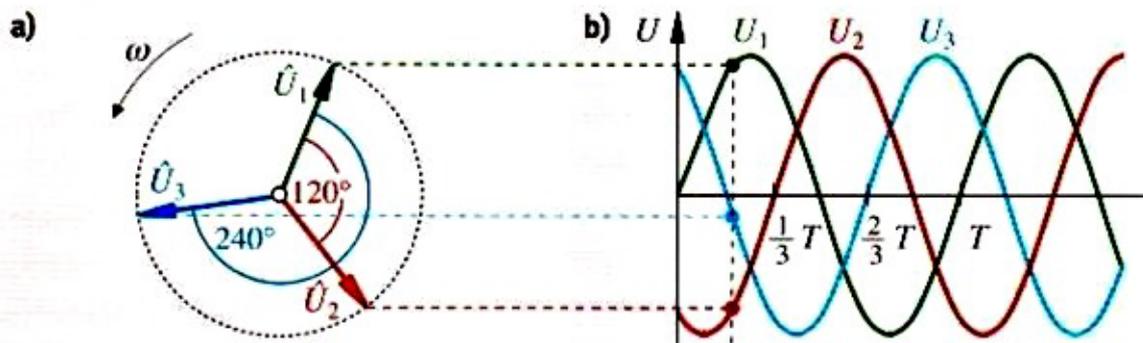
Bemerkung: berücksichtigt man die Induktivität der Sekundärspule, so wird das Zeigerdiagramm etwas komplizierter (Siehe Kester S. 59)

5.1.5 Drehstrom

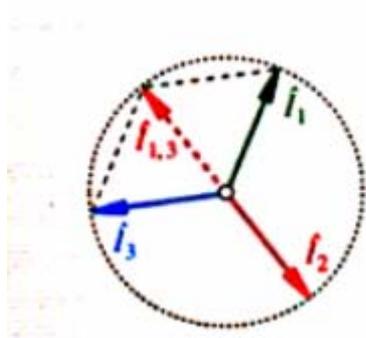
Literatur:

- Dorn-Bader Physik Sek II 12/13 S. 90 f
- Adolf Kester: Schwingungen und Wellen in Zeigerdarstellung, S. 57 f

Auch bei Drehstrom (Dreiphasenwechselstrom) kann durch Verwenden von Zeigern das Erstellen von Schaubildern vereinfacht werden. Bei den Stromstärken liefert die Zeigeraddition sehr schnell, dass die Summe der Stromstärken in den Außenleitern bei gleicher Belastung null ergibt.



Spannungszeigerdiagramm a) und $U(t)$ -Schaubild b) bei drei gleich stark belasteten Außenleitern.



Scheitelwerte der Stromstärken bei gleicher Belastung der Außenleiter in einer Sternschaltung. Die Stromstärke im Neutraleiter ist null.

5.2 Schwingungen

5.2.1 Harmonischer Schwinger

Literatur: Dorn-Bader Physik 12/13 S. 101

Zeit-Weg-Gesetz $s(t) = \hat{s} \cdot \sin(\omega t)$

Durch Differenzieren nach der Zeit erhält man:

Zeit-Geschwindigkeit-Gesetz $v(t) = \dot{s}(t) = \hat{s} \omega \cdot \cos(\omega t) = \hat{v} \cdot \cos(\omega t)$

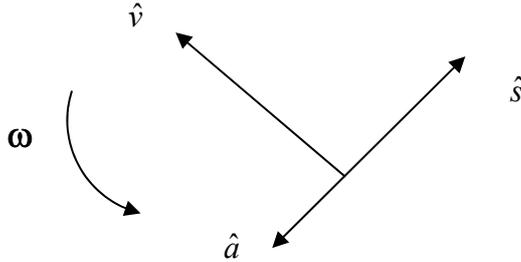
Durch Differenzieren nach der Zeit erhält man:

Zeit-Beschleunigung-Gesetz $a(t) = \dot{v}(t) = \ddot{s}(t) = -\hat{s} \omega^2 \cdot \sin(\omega t) = \hat{a} \cdot \sin(\omega t)$.

Die zugehörigen Schaubilder kann man einzeln gemäß den Funktionstermen $s(t)$, $v(t)$, $a(t)$ zeichnen oder unter Verwendung der Zeigermethode erstellen.

Ordnet man $s(t)$ einen rotierenden Zeiger \hat{s} zu, so wissen wir aus Abschnitt 3, dass Differenzieren nach der Zeit einem Drehen des Zeigers um $\pi/2$ im Gegenuhrzeigersinn entspricht. D.h. der Zeiger \hat{v} ist um $\pi/2$ vor dem Zeiger \hat{s} . Entsprechendes gilt für den Zeiger \hat{a} .

Damit erhalten wir im Zeigerdiagramm für einen beliebigen Zeitpunkt t :



5.2.2 Überlagerung harmonischer Schwingungen

Literatur: Dorn-Bader Physik 12/13 S. 134f

Problemstellung: Was registriert ein Mikrofon, wenn es gleichzeitig zwei Sinusschwingungen ausgesetzt ist?

a) Überlagerung zweier harmonischer Schwingungen gleicher Frequenz

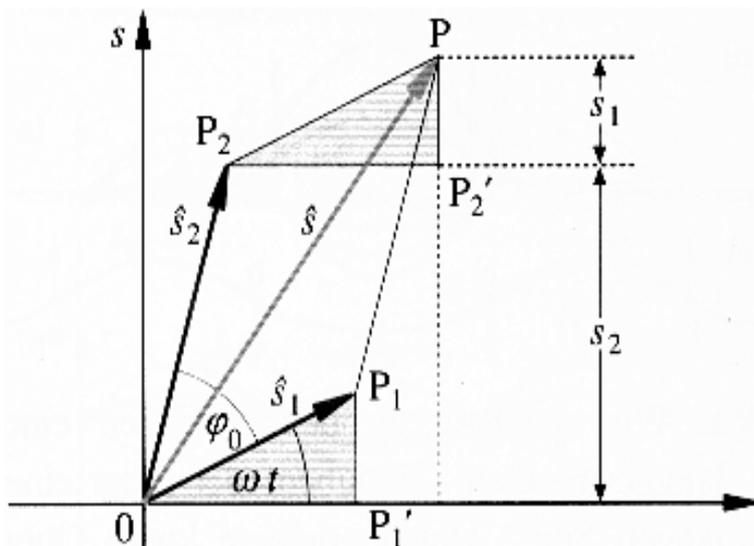
Beispiel:

$$s_1(t) = \hat{s}_1 \sin(\omega t)$$

$$s_2(t) = \hat{s}_2 \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$\text{Addition: } s(t) = s_1(t) + s_2(t) = \hat{s}_1 \sin(\omega t) + \hat{s}_2 \sin(\omega t + \varphi_0)$$

Einfach geht es mit Zeigern (DB S. 135 B3)



Der resultierende Zeiger \hat{s} rotiert mit der gleichen Winkelgeschwindigkeit ω wie die Zeiger \hat{s}_1 und \hat{s}_2 .

Daher ergibt die Überlagerung zweier harmonischer Schwingungen gleicher Frequenz f wieder eine harmonische Schwingung mit der Frequenz f unabhängig von der Phasenlage φ_0 .

b) Überlagerung zweier harmonischer Schwingungen ungleicher Frequenz (Schwebung)

Programme:

- Treitz: DOS-Programm Zeigern (LEU CD Ph 33)
- Dierolf: zeiger.exe (24.5.2002)

Beispiel:

$$s_1(t) = \hat{s}_1 \sin(\omega_1 t)$$

$$s_2(t) = \hat{s}_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_0)$$

Der Einfachheit halber sei $\varphi_0 = 0$.

$$\text{Addition: } s(t) = s_1(t) + s_2(t) = \hat{s}_1 \sin(\omega_1 t) + \hat{s}_2 \sin(\omega_2 t)$$

Sei $\omega_2 > \omega_1$.

Der Zeiger \hat{s}_2 rotiert damit mit einer größeren Winkelgeschwindigkeit ω_2 als der Zeiger \hat{s}_1 . Dadurch ändert sich die Länge des resultierenden Zeigers \hat{s} laufend.

Zur Zeit $t = 0$ haben beide Zeiger gleiche Phasenlage ($s_1(0) = s_2(0) = 0$). Die Länge des Zeigers \hat{s} ist dann maximal.

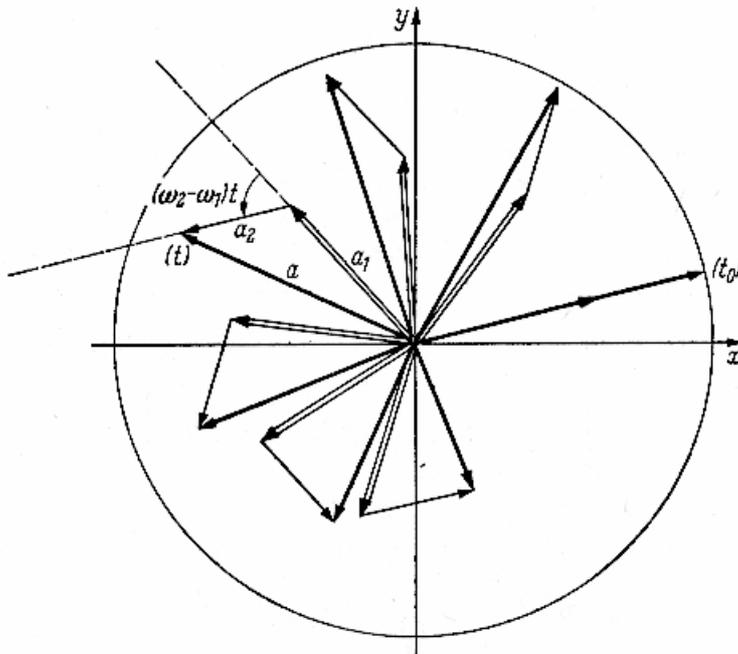
Der Phasenunterschied $\varphi(t)$ zur Zeit t zwischen den beiden Zeigern beträgt $\varphi(t) = (\omega_2 - \omega_1) \cdot t$.

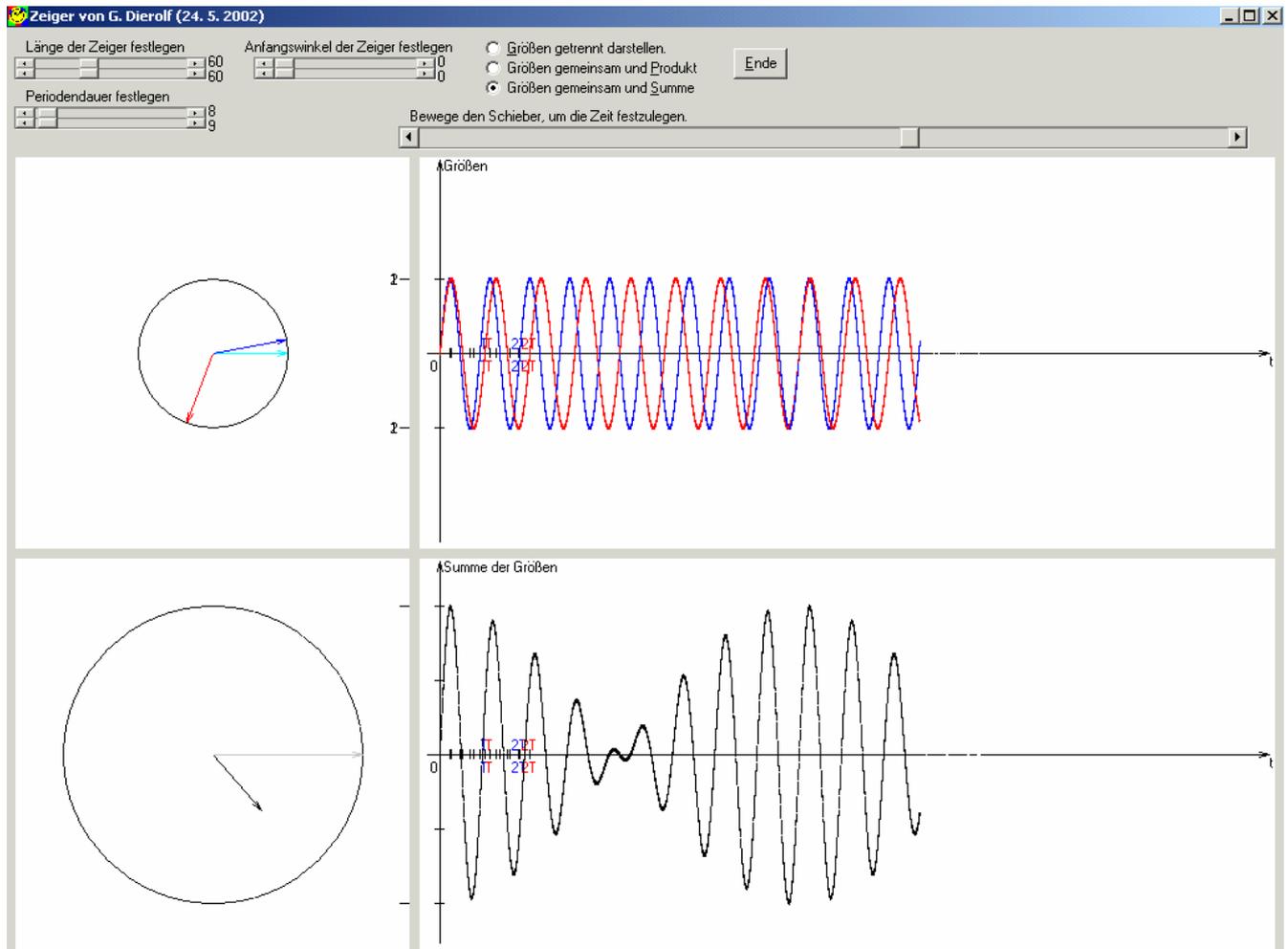
Damit erhält man als Periodendauer für das „Aufeinanderfallen“ der beiden Zeiger (gleiche Phasenlage, maximale Amplitude)

$$\varphi(T) = 2\pi = (\omega_2 - \omega_1) \cdot T \text{ und somit}$$

$$f = 1/T = (\omega_2 - \omega_1)/(2\pi) = f_2 - f_1.$$

Schwebungsfrequenz: $f = f_2 - f_1$





5.3 Mechanische Wellen

Ein Vorteil der Zeigerdarstellung liegt darin, dass Quer- und Längswellen mit dem gleichen Formalismus erarbeitet werden können (im Sinne des kumulativen Lernens (-> TIMSS)).

Jedem Körperchen des Wellenträgers wird ein ortsfester Zeiger zugeordnet.

Bei Querwellen werden die Zeiger senkrecht zur Ausbreitungsrichtung projiziert, bei Längswellen in Ausbreitungsrichtung.

5.3.1 Fortschreitende Querwellen und Längswellen

Literatur: Dorn-Bader Physik 12/13 S. 128f

Programm LEU CD: simulatinsprogramme.htm → Programme F.Bader → „Einführung der Zeiger-Addition an fortschreitenden und stehenden Wellen“

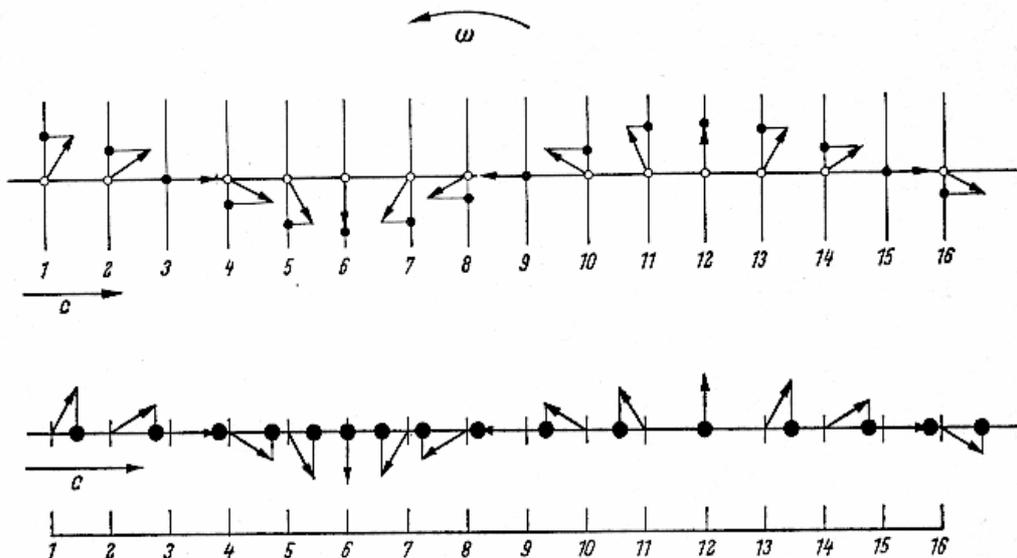
Konstruktion Momentaufnahme einer fortschreitenden Welle (Quer- und Längswelle):

Die Körperchen des Wellenträgers übernehmen die Schwingbewegung des Erregers zeitlich versetzt. Sie hinken in der Schwingungsphase gegenüber dem Erreger umso mehr nach, je weiter sie vom Erreger entfernt sind.

Viele rotierende Zeiger beschreiben eine Welle:

- Jedem Körperchen des Wellenträgers wird ein Schwingungszeiger zuordnet, der im Gegen- uhrzeigersinn rotiert.
- Für den Zusammenhang zwischen der Entfernung x des Körperchens vom Erreger und der Phasendifferenz $\Delta\varphi$ des zugehörigen Zeigers gilt
$$\frac{\Delta\varphi}{2\pi} = \frac{x}{\lambda}$$
- **Querwelle:** die Projektion des Zeigers, der zum Körperchen an der Stelle x gehört, auf die **Achse** quer zum Wellenträger ergibt die Elongation dieses Körperchens zum Zeitpunkt t .
- **Längswelle:** die Projektion des Zeigers, der zum Körperchen an der Stelle x gehört, auf die **Achse** längs des Wellenträgers ergibt die Elongation dieses Körperchens zum Zeitpunkt t .
- Eine fortschreitende Querwelle lässt sich entweder durch eine längs des Wellenträgers wandernde Sinuslinie oder durch rotierende Zeiger mit konstanter Winkelgeschwindigkeit und Phasenlage darstellen.

Querwelle (oben) und Längswelle (unten) (A. Kester S. 31)



Konstruktion einer fortschreitenden harmonischen Querwelle mittels rotierender Zeiger

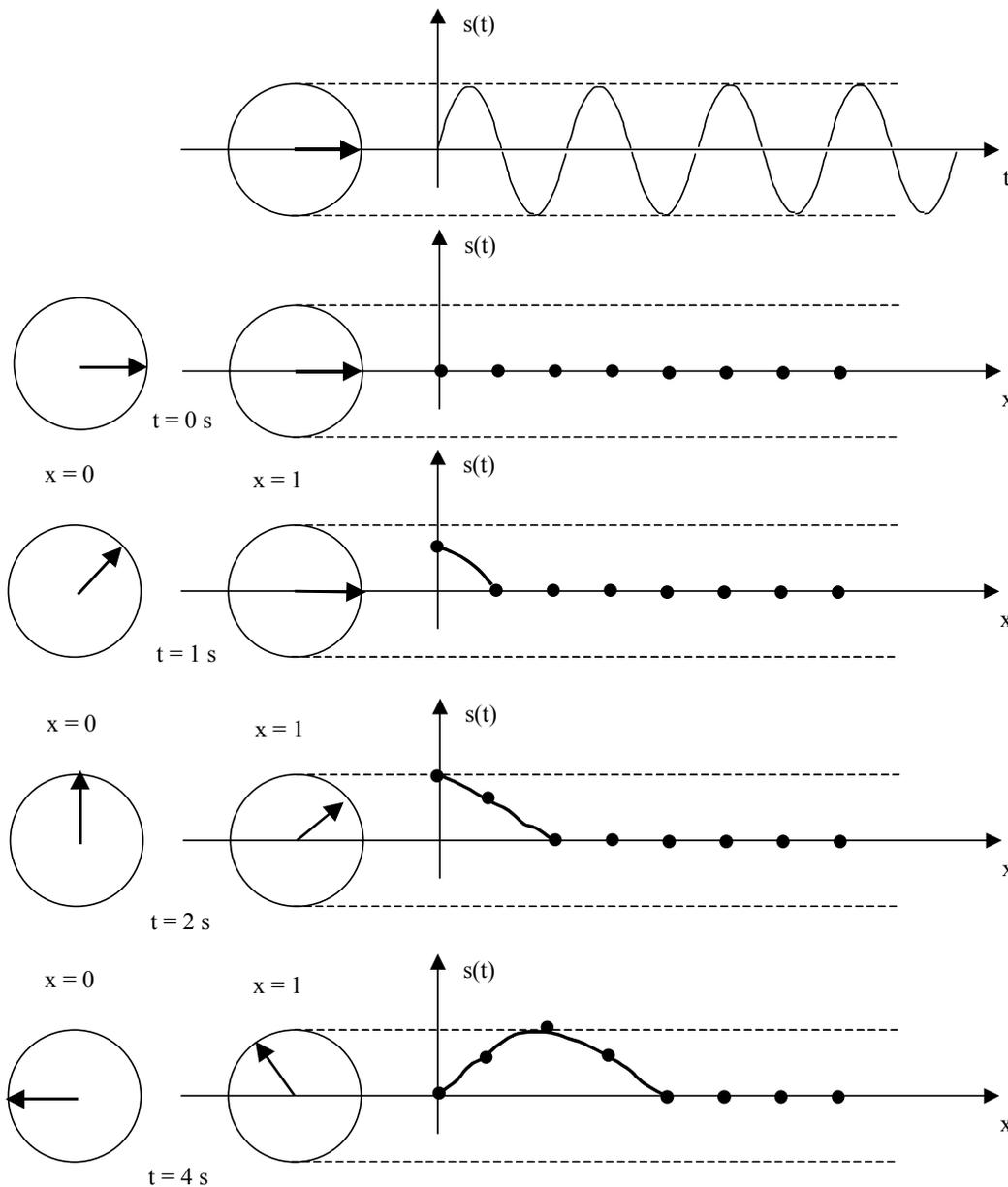
Erreger:

Periodendauer der Erregerschwingung $T = 8$ s;

Amplitude der Erregerschwingung $\hat{s} = 1$ cm.

Wellenträger:

Ausbreitungsgeschwindigkeit von Querwellen $c = 1$ cm/s



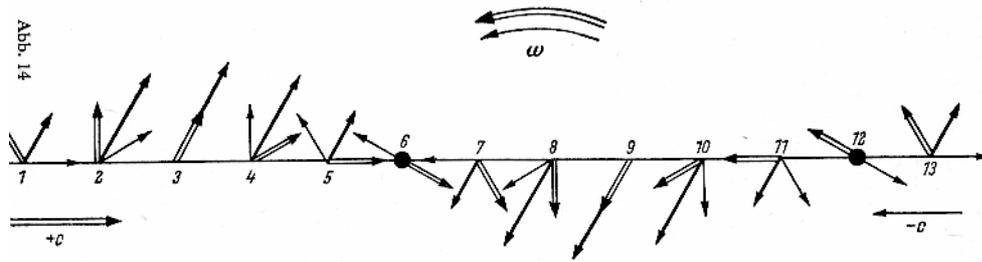
5.3.2 Interferenz von Wellen (Quer- und Längswellen) in einem Punkt des Wellenträgers

Bei der Interferenz von Wellen in einem Punkt P des Wellenträgers sind die Schwingungszeiger jeder Erregung nach den Regeln der Zeigeraddition zu addieren.

Folgerungen:

Konstruktive Interferenz in P		Destruktive Interferenz in P	
Gangunterschied	Phasendifferenz	Gangunterschied	Phasendifferenz
$\delta = k \cdot \lambda$ ($k = 0, 1, 2, \dots$)	$\Delta\varphi = k \cdot 2\pi$	$\delta = (2k - 1) \cdot \lambda/2$ ($k = 1, 2, \dots$)	$\Delta\varphi = (2k - 1) \cdot \pi$

Zusammenhang zwischen Gangunterschied und Phasendifferenz: $\frac{\Delta\varphi}{2\pi} = \frac{\delta}{\lambda}$



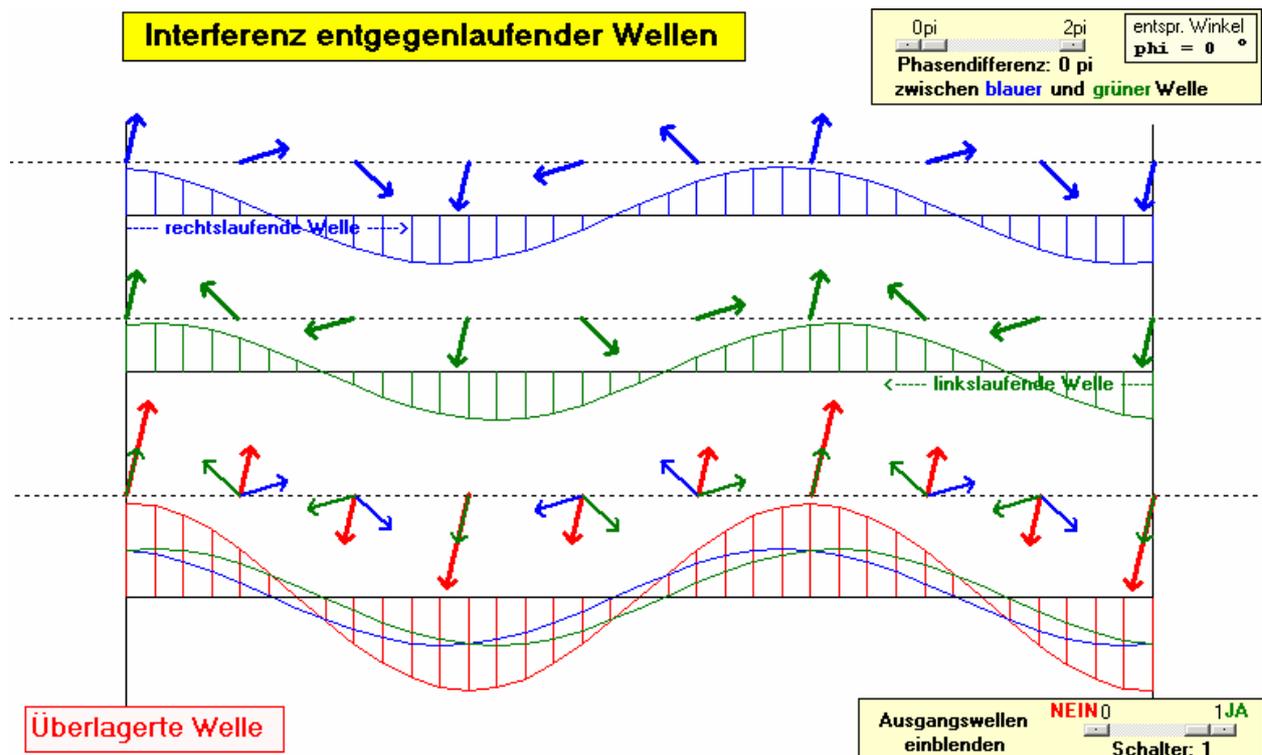
5.3.3 Stehende Querwellen

Literatur: Dorn-Bader Physik 12/13 S. 138

Programm:

- (LEU CD): F. Bader : simulationsprogramme.htm → Programme F.Bader → „Einführung der Zeiger-Addition an fortschreitenden und stehenden Wellen“
- Pakma: Wellen, Interferenz entgegenlaufender Wellen - Zeigerdarstellung

Erklärung der Schwingungsknoten und Schwingungsbäuche der stehenden Welle durch Zeigeraddition.



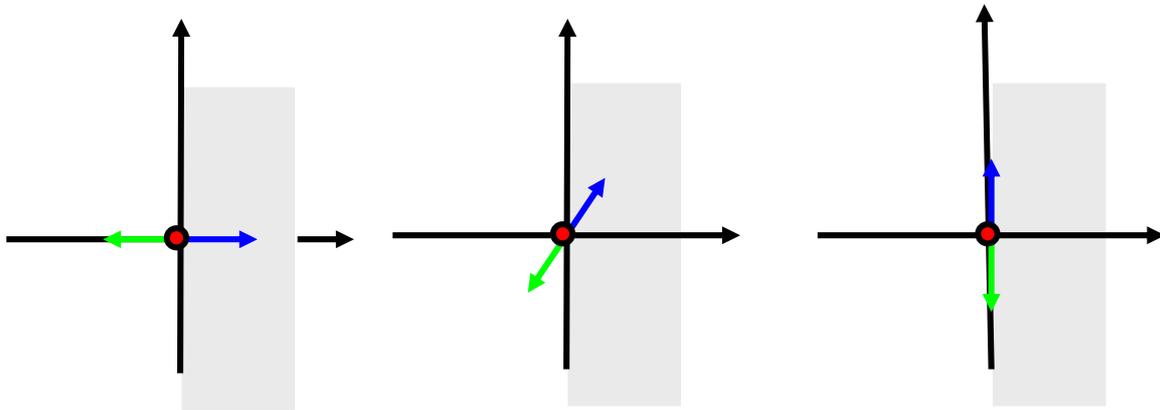
5.3.4 Reflexion am festen und freien Ende

Literatur: Dorn-Bader Physik 12/23 S. 140

Programm Pakma: Wellen, Reflexion eines Wellenbergs am festen Ende, Reflexion eines Wellenbergs am freien Ende

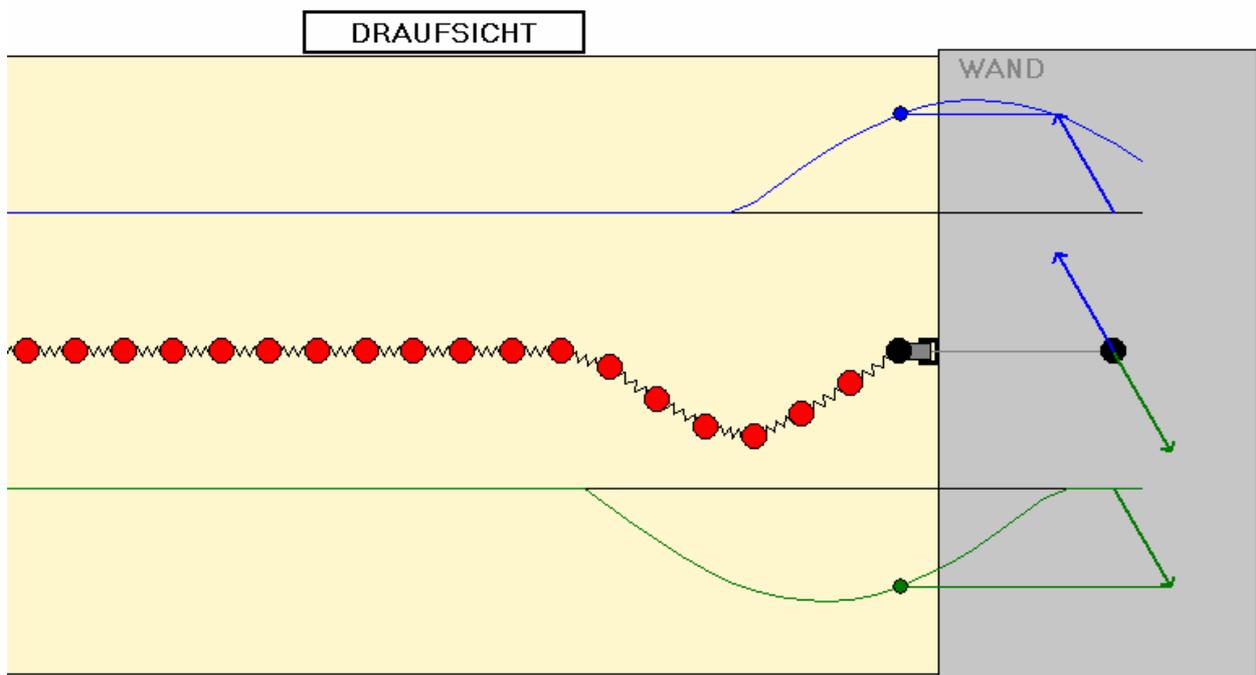
a) Reflexion am festen Ende

Drei aufeinanderfolgende Momentaufnahmen der Reflexion am festen Ende .
(Phasensprung um π). Blauer Zeiger einlaufende Welle, grüner Zeiger reflektierte Welle, roter Zeiger resultierende Welle.



Auslenkung (resultierender Zeiger) am festen Ende immer Null.

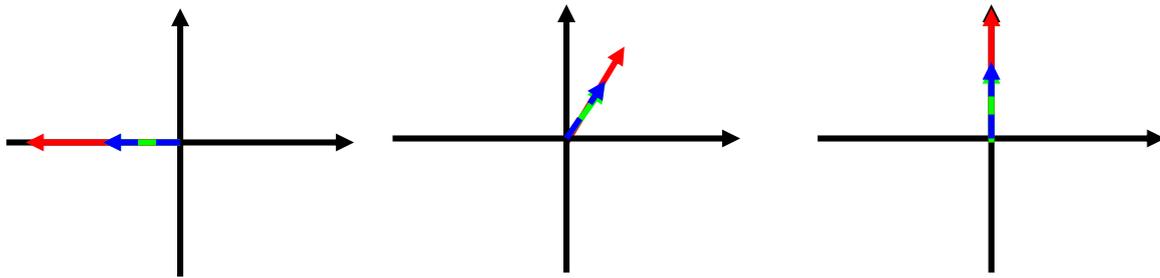
Reflexion mechanischer Wellen (festes Ende, Teil2)



b) Reflexion am freien Ende

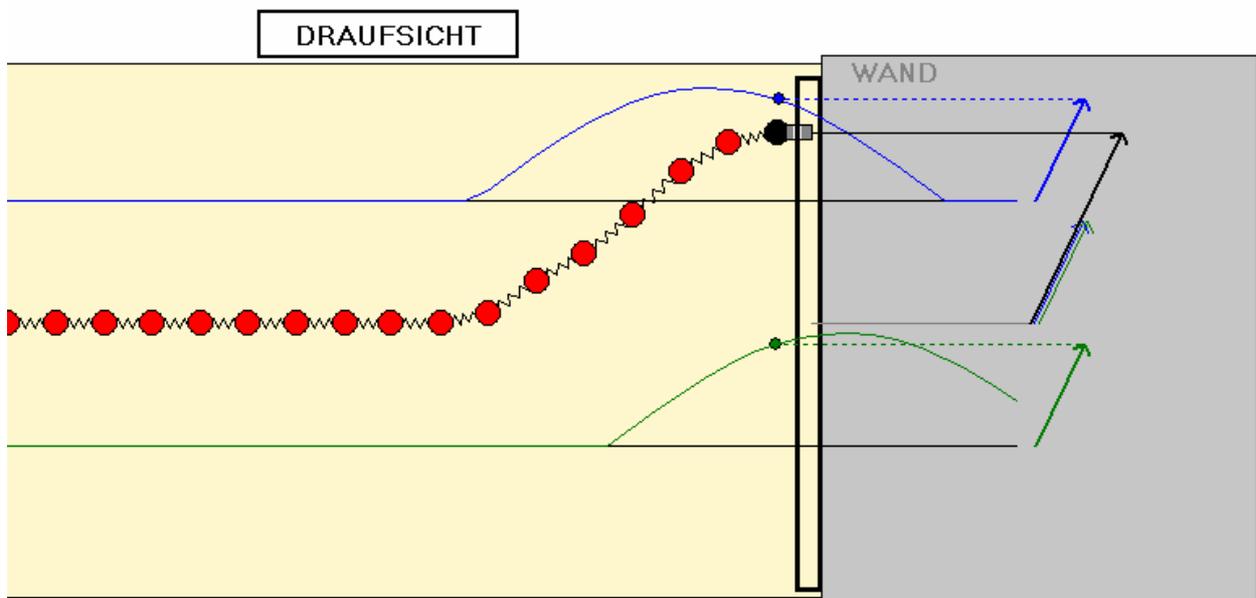
Drei aufeinanderfolgende Momentaufnahmen der Reflexion am freien Ende (kein Phasensprung).

Blauer Zeiger einlaufende Welle, grüner Zeiger reflektierte Welle, roter Zeiger resultierende Welle.



Doppelte Auslenkung am freien (losen) Ende.

Reflexion mechanischer Wellen (freies Ende, Teil2)



5.4 Interferenzphänomene

5.4.1 Interferenzfeld zweier Quellen im Raum

Literatur: Dorn-Bader Physik 12/23 S. 180

Programme:

- W. Wegner



ZeigerP1.exe



PrjIntFd.exe

- Pakma: Interferenzphänomene, Interferenz im 2-dimensionalen Raum

Problemstellung:

Im Raum befinden sich mehrere kohärente Quellen Q_1, Q_2, \dots an verschiedenen Orten. Welches „Signal“ registriert ein Empfänger in einem beliebigen Zielort Z ?

Beispiel Wasserwellenwanne: 2 Stifte tauchen gleichphasig in eine Wasseroberfläche ein.

Lösung: Die Wegunterschiede von den Orten der verschiedenen Quellen Q_1, Q_2, \dots zum Zielort Z bestimmen die resultierende Amplitude im Zielort.

1. Eine Quelle:

Im räumlichen Wellenfeld *einer* Quelle Q beschreiben wir die Schwingungen an verschiedenen Zielpunkten durch jeweils einen Zeiger. Alle Zeiger an den verschiedenen Zielpunkten rotieren mit gleicher Winkelgeschwindigkeit. Ihre momentanen Phasen hängen vom Abstand zur Quelle ab; die Amplituden ändern sich in einem begrenzten Zielgebiet nur unwesentlich.

2. Zwei Quellen:

Im räumlichen Wellenfeld *zweier* Quellen Q_1, Q_2 beschreiben wir die Schwingungen an verschiedenen Zielpunkten Z durch einen Zeiger, der durch Addition zweier Zeiger entsteht, deren Phase jeweils durch den Abstand des Zielpunkts Z zur zugehörigen Quelle Q_1 bzw. Q_2 bestimmt ist. Die Differenz δ der beiden Abstände $\overline{ZQ_1}$ und $\overline{ZQ_2}$ bestimmt die *Phasendifferenz* der beiden Zeiger und damit auch die Länge des resultierenden Zeigers.

Für $\delta = n \cdot \lambda$, $n \in \mathbb{N}$ ist die Phasendifferenz 2π und die Länge des resultierenden Zeigers maximal ($\uparrow\uparrow$ Zeiger parallel). Für $\delta = (2n - 1) \cdot \lambda/2$, $n \in \mathbb{N}$ ist die Phasendifferenz π und die Länge des resultierenden Zeigers null ($\uparrow\downarrow$ Zeiger antiparallel).

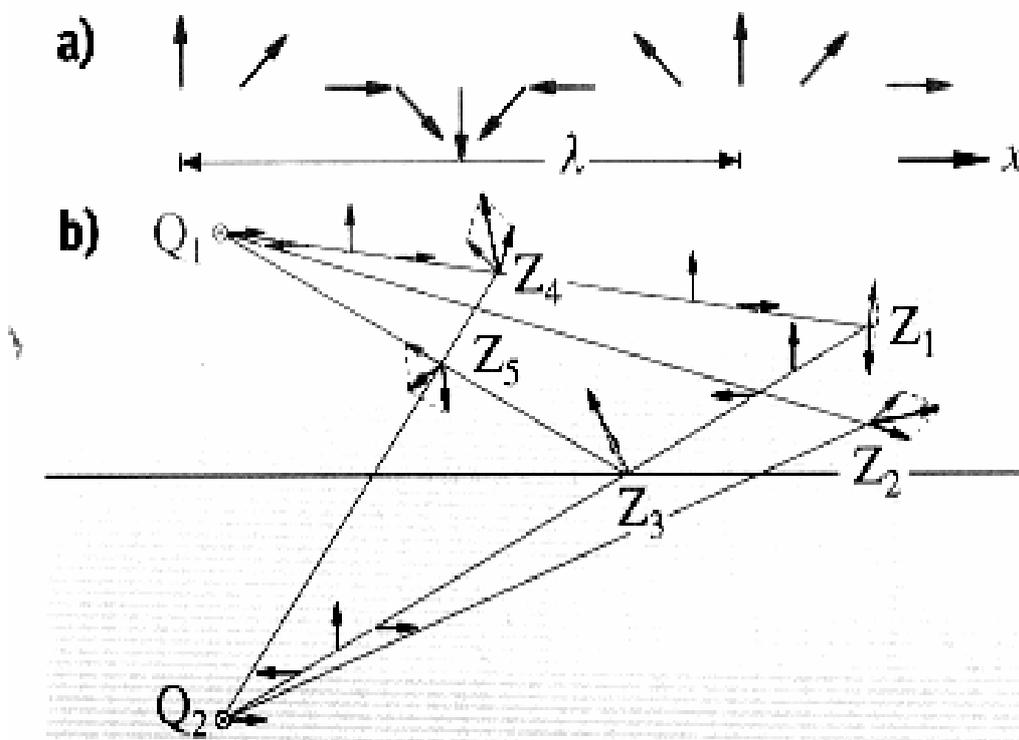


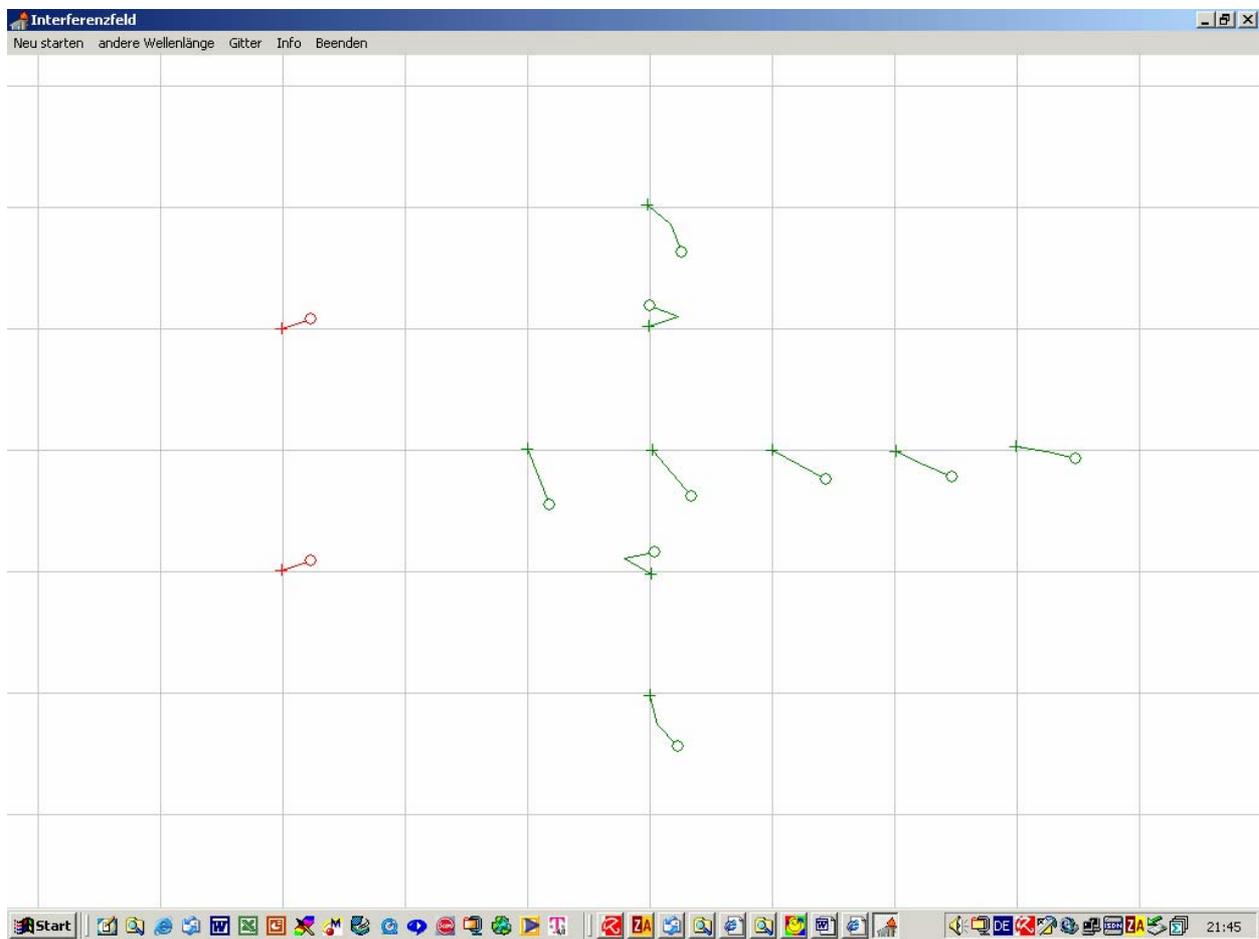
Bild a) Die Zeiger fortschreitender Wellen an jeweiligem Ort x rotieren mit der Frequenz f . Im obigen Momentbild sind die Phasen der Zeiger "eingefroren". Sie hängen umso mehr nach, je größer der Abstand x vom Erreger Q ist.

Bild b) Im Zielpunkt Z_1 ist die Wegdifferenz δ zu den beiden kohärenten Erregern Q_1 und Q_2 fast $\lambda/2$, der Zeiger von Q_1 also fast gegenphasig zum Zeiger von Q_2 . Die Amplitude des Summenzeigers ist praktisch null.

Im Zielpunkt Z_3 dagegen ist $\delta = 0$, die beiden gleichgerichteten Zeiger addieren sich zu einem Zeiger doppelter Länge.

Im Unterricht ist es methodisch sinnvoll, mit einem „Pizza-Rad“ mit daran befestigtem Zeiger die jeweiligen Wellenwege (z.B. in einer Skizze an der Tafel) nachzufahren und so im Zielpunkt die Phasenlage der zur Quelle 1 und 2 gehörigen Zeiger zu ermitteln. Die Drehung des Pizza-Rades um den Winkel 2π entspricht einem Weg der Länge λ . **Das Pizza-Rad ist damit ein λ -Zähler.**

Hat man verschiedene Medien und damit verschiedene Ausbreitungsgeschwindigkeiten (und nach $\lambda = c/f$ verschiedene Wellenlängen), so benutzt man Pizza-Räder mit verschiedenen Radien (Umfängen).



rot: Zeiger der beiden Quellen Q_1 und Q_2

grün: Addition der beiden Zeiger in verschiedenen Zielorten Z

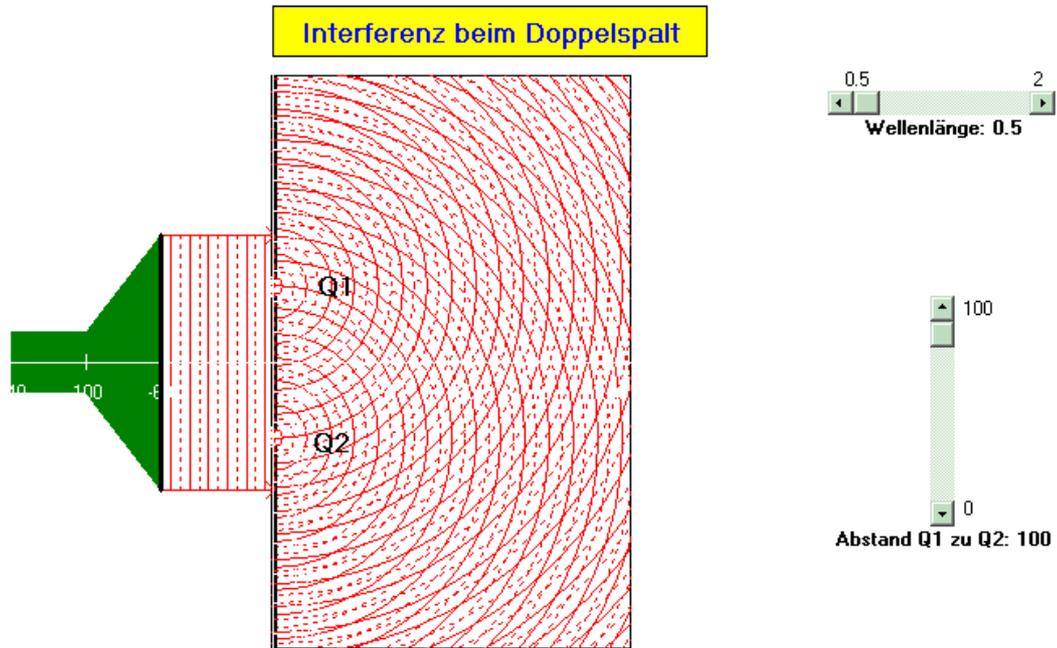
Programm Wegner : zeigerP1.exe

5.4.2 Interferenz beim Doppelspalt

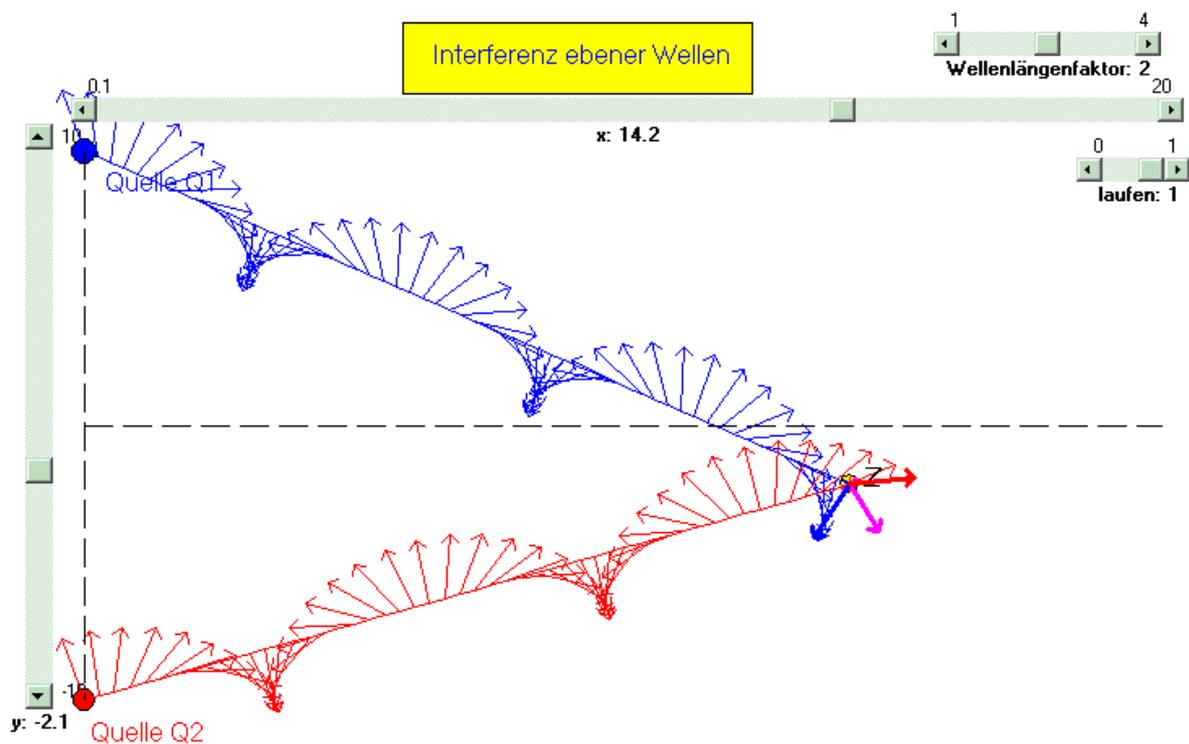
Literatur: Dorn-Bader Physik 12/13 S. 182

Programm Pakma: Interferenzphänomene

Versuch z.B. mit Wasserwellen

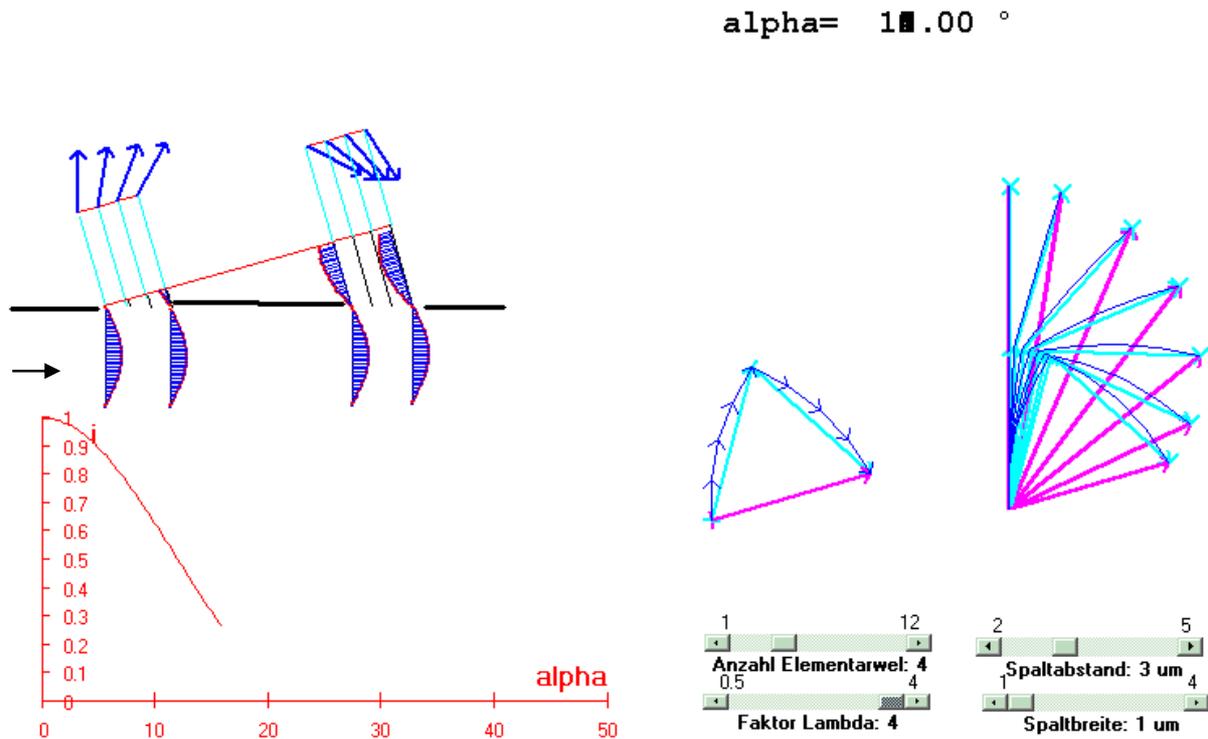


Zeigermodell beim Doppelspalt (entspricht zwei Quellen)



Jetzt kann die Herleitung der Gleichungen für die Winkel für Minima und Maxima beim Doppelspalt erfolgen.

Intensitätsdiagramm beim Doppelspalt mit Hilfe von Zeigern



Pakma: Interferenzphänomene, Beugung am Doppelspalt

Hier: Von jedem der beiden Doppelspalte gehen 4 Elementarwellen aus.

Konstruktion der Intensitätsverteilung i bei einem Doppelspalt auf einem Schirm als Funktion des Winkels α .

Auftrag für Schüler:

Konstruktion der Intensitätsverteilung auf dem Schirm (näherungsweise): Für besondere Zeigerstellungen werden die Gangunterschiede und daraus die Lage der entsprechenden Punkte auf dem Schirm berechnet.

Dabei wird die Verkettung der Schwingungszeiger eingeübt.

Als HA schreiben die Schüler ein Programm (z.B. mit EXEL) zur Berechnung des Intensitätsverlaufs.

5.4.3 Interferenz beim optischen Gitter

Siehe z.B. Dorn-Bader Physik 12/13 s. 186 f.

Insbesondere ist im Zeigermodell darzulegen, warum das Gitter dem Doppelspalt überlegen ist (S. 187 B3)

5.4.4 Interferenz beim n-fach Spalt

Der Vorteil der Zeigermethode bei der Ermittlung von Maxima und Minima in Wellenfeldern wird besonders deutlich bei Anordnungen mit wenigen Spalten (3, 4, 5, ...) oder mit wenigen Quellen (3, 4, 5, ...). Vorteile der Zeigermethode ergeben sich auch dann, wenn keine Fraunhofer-sche Beugung vorliegt sondern Fresnelsche Beugung (Quellen und /oder Ziele nahe beim n-fach Spalt)

LEU Ph 35: Abitur im Fach Physik ab 2004:

- Musteraufgabe1 (Wellen) Teil c (3-fach Spalt).
- Beispielaufgabe 3 , Teil a) (3-fach Spalt), Teil c) (Interpretation Intensitätsdiagramm von 4-fach Spalt)

Beugung am 3-fach Spalt

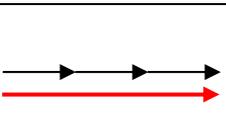
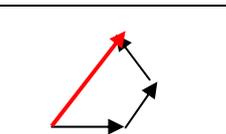
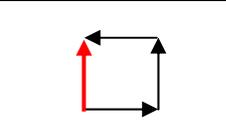
Man betrachtet Fraunhofersche Näherung:

- Quelle weit weg vom 3-fach Spalt, damit gleichphasige Erregung in den Spalten
- Schirm weit weg vom 3-fach Spalt, damit Amplituden der Elementarwellen, die von den einzelnen Spalten ausgehen, im Zielpunkte auf dem Schirm gleich groß (gleiche Zeigerlänge).

Durch einfache Zeigerüberlegungen können die Bedingungen für die Lage der Hauptmaxima und Minima gefunden. Weiterhin kann Lage und Zahl der Nebenmaxima ermittelt werden. Mit Hilfe eines Meterstabs (3 Teile werden verwendet) kann man die Länge des jeweils resultierenden Zeigers gut demonstrieren.

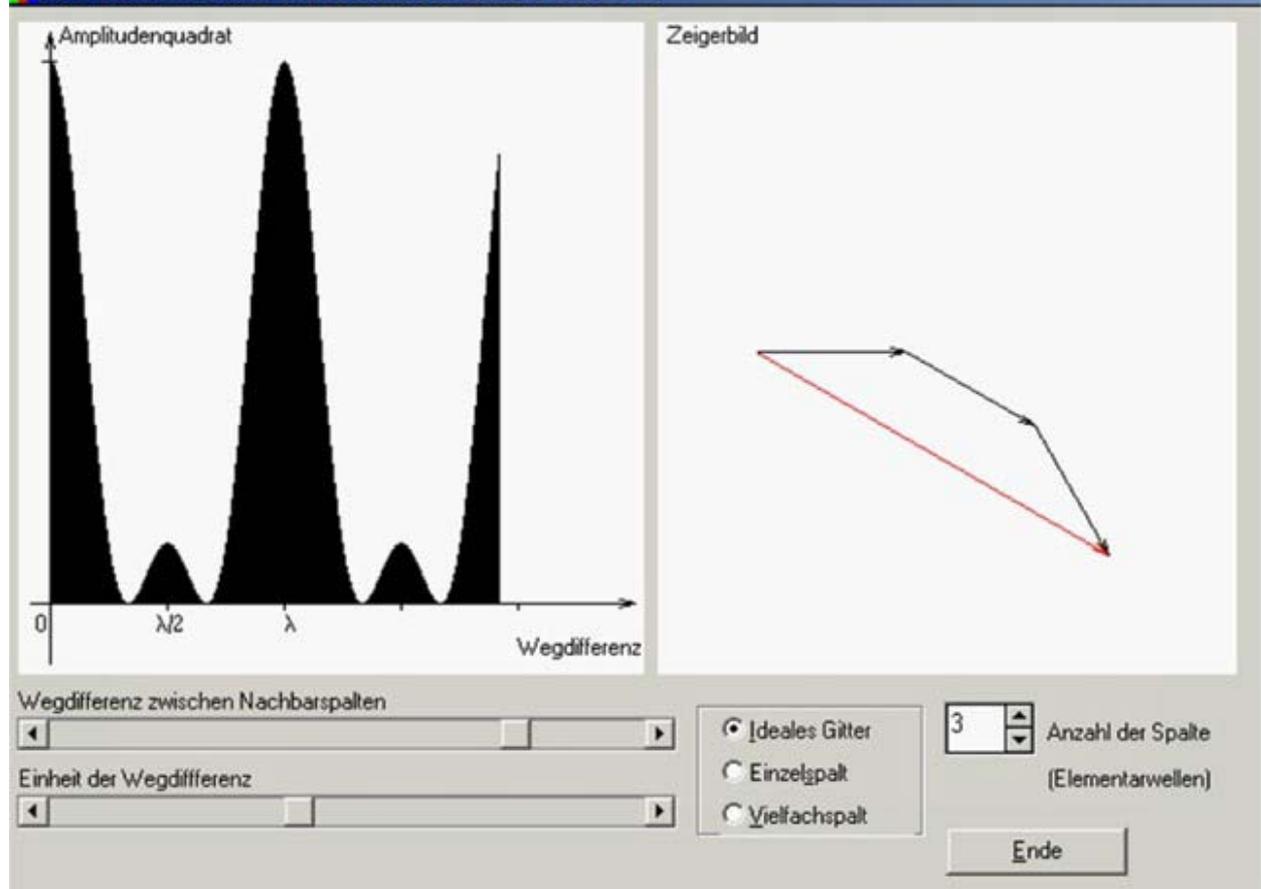
In nachstehender Tabelle ist der resultierende Zeiger jeweils rot gezeichnet.

Der Quotient A/A_1 ist ein Maß für den Quotient der Längen des resultierenden Zeigers und eines Einzelzeigers.

Zeiger	Phasenunterschied benachbarter Spalte $\Delta\varphi$	Wegunterschied benachbarter Spalte Δs	Amplitude A/A_1	Intensität $I/I_1 \sim (A/A_1)^2$
	$0 (0^\circ)$	0	3	9
	$\pi/3 (60^\circ)$	$\lambda/6$	2	4
	$\pi/2 (90^\circ)$	$\lambda/4$	1	1
	$2\pi/3 (120^\circ)$	$\lambda/3$	0	0

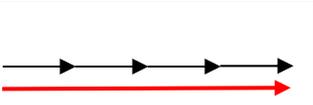
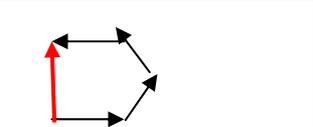
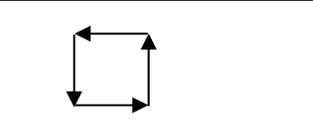
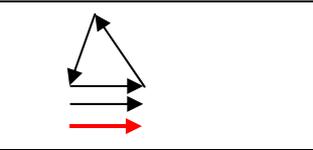
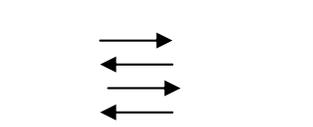
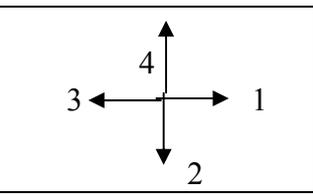
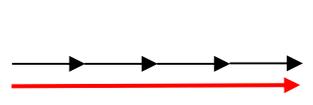
	π (180°)	$\lambda/2$	1	1
	$4\pi/3$ (240°)	$2\lambda/3$	0	0
	2π (360°)	λ	3	9

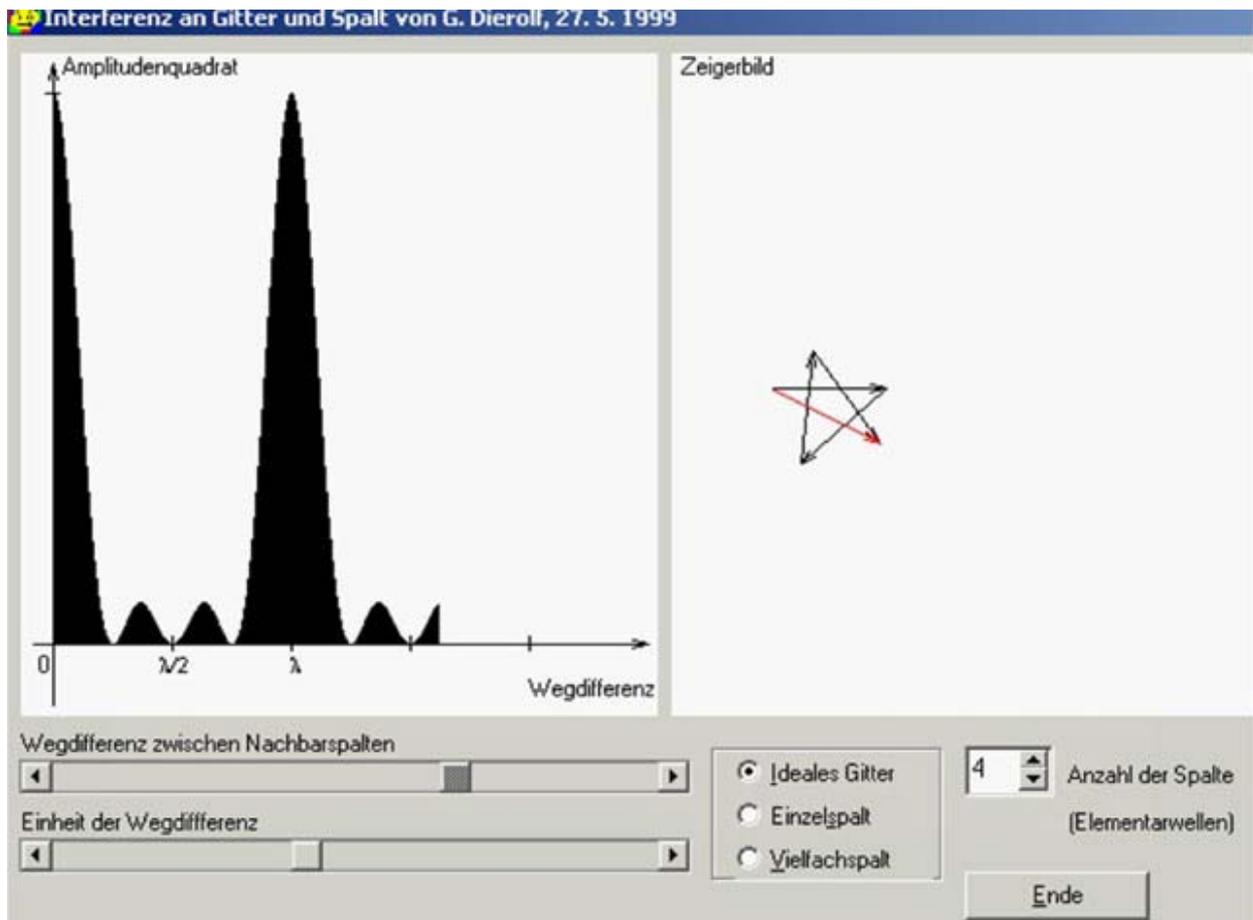
Interferenz an Gitter und Spalt von G. Dierolf, 27. 5. 1999



Beugung am 4-fach Spalt

Gleiche Vorüberlegungen und Voraussetzungen wie beim 3-fach Spalt.

Zeiger	Phasenunterschied benachbarter Spalte $\Delta\varphi$	Wegunterschied benachbarter Spalte Δs	Amplitude A/A_1	Intensität $I/I_1 \sim (A/A_1)^2$
	$0 (0^\circ)$	0	4	16
	$\pi/3 (60^\circ)$	$\lambda/6$	$\sqrt{3}$	3
	$\pi/2 (90^\circ)$	$\lambda/4$	0	0 1. Nebenminimum
	$2\pi/3 (120^\circ)$	$\lambda/3$	1	1
	$\pi (180^\circ)$	$\lambda/2$	0	0 2. Nebenminimum
	$3\pi/2 (270^\circ)$	$3\lambda/2$	0	0 3. Nebenminimum
	$2\pi (360^\circ)$	λ	4	16

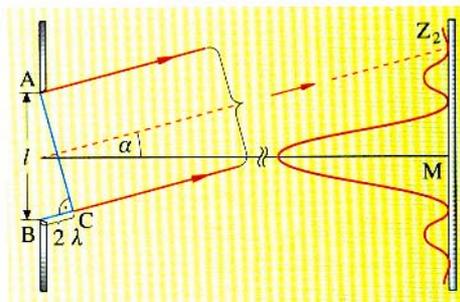


5.4.5 Beugung am Einzelspalt

Literatur: Dorn-Bader Physik 12/13 S . 190

Anmerkung: Im Dorn-Bader wird die Herleitung der Winkel für die Minima nicht allein mit Zeigern gemacht sondern noch mit der gewohnten Unterteilung des Einzelspalts in („willkürlich“ gewählte) Abschnitte. Diese Unterteilung in Abschnitte ist bei der konsequenten Verwendung des Zeigermodells nicht mehr nötig.

Herleitung der Bedingung für Minima und näherungsweise für die Nebenmaxima beim Einzelspalt mittels Zeigeraddition.



Gesucht: Winkel α_k , unter dem das k -te Minimum auf dem Schirm auftritt. (In der Skizze ist $k = 2$).

Voraussetzungen:

- Fraunhofersche Näherung: weil die Spaltbreite ca. 0,1 mm und der Anstand Spalt zu Schirm in der Größenordnung Meter ist, kann man die in Z ankommenden Wellenstrahlen als näherungsweise parallel auffassen.
- Da Spaltbreite groß gegen Lichtwellenlänge, muss man - im Gegensatz zum Gitter - den Spalt als Ausgangsort vieler Elementarwellen betrachten (breite Wellenfront). Im Prinzip müsste man von unendliche vielen Elementarwellen ausgehen.
- Wir gehen aus Gründen des einfacheren Zeichnens für die Schüler von **12 Elementarwellen** im Spalt aus (Zahl 12 ist willkürlich gewählt). Bei Verwendung eines Computerprogramms kann man auch eine beliebige Zahl nehmen.

Herleitung mit Zeigern

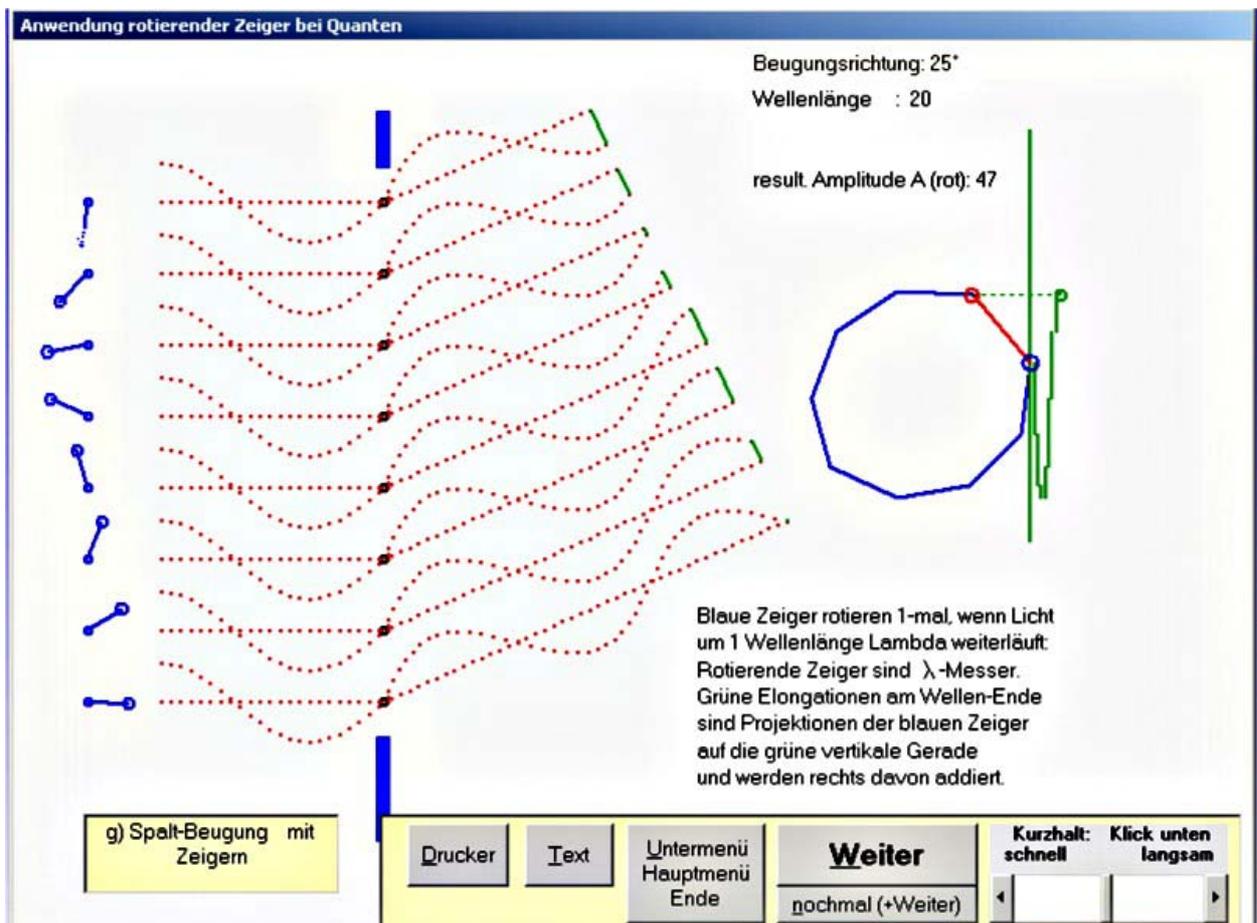
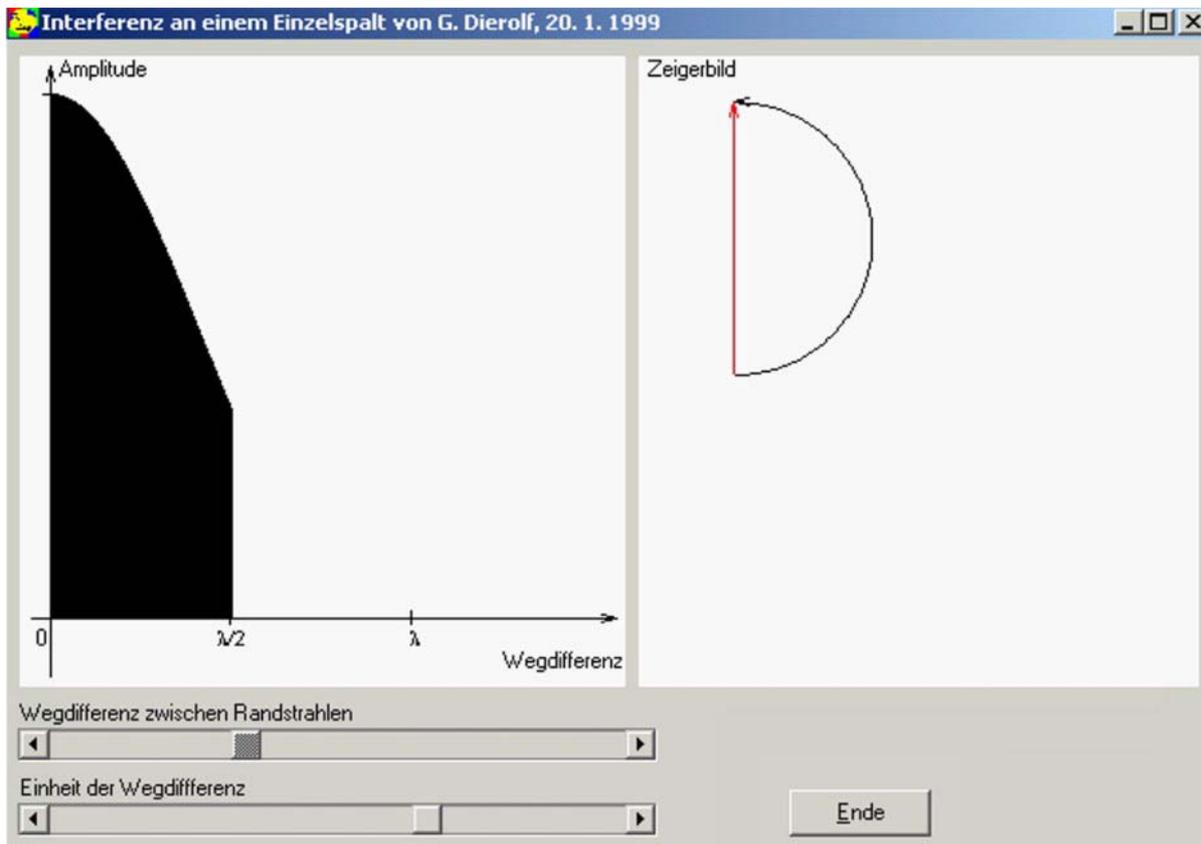
Zur Ermittlung der Intensität in einem beliebigen Punkt Z des Schirms muss man für jeden Wellenweg vom Einzelspalt zum Zielpunkt Z einen E-Zeiger laufen lassen. Während eines Zeigerumlaufs legt die Welle gerade eine Wellenlänge zurück. Der Zeiger wird zum λ -Zähler für diesen Wellenweg. Seine Endstellung gibt die Stellung des Schwingungszeigers in Z mit korrekter Phasenlage an. In jedem Punkt Z des Schirms müssen also die entsprechenden 12 Zeiger addiert werden.

0. Maximum:

Das 0. Maximum ergibt sich, wenn alle 12 Zeiger parallel sind. Die Phasendifferenz zwischen den Zeigern ist null. Für den Winkel des 0. Maximums ergibt sich $\alpha_{0, \text{Max}} = 0$.



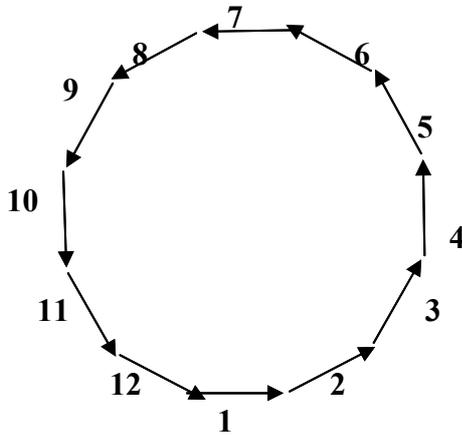
Zeigeraddition für Richtung zwischen 0. Maximum und 1. Minimum:



1. Minimum :

In einem Minimum ist die Zeigersumme null. Im 1. Minimum ist die Zeigersumme zum ersten Mal null.

Zeiger 1 und 12 haben fast die Phasendifferenz 2π . Würde man statt 12 Elementarzentren im Einzelspalt eine größere Anzahl n wählen, läge die Phasendifferenz zwischen dem ersten und dem letzten Zeiger näher bei 2π . Beim Grenzübergang unendlich vieler Elementarzentren geht diese Phasendifferenz gegen 2π .



Die Wellenstrahlen an den Rändern des Einzelspalts haben damit zueinander den Gangunterschied λ . Damit erhält man für den Winkel α_1 für das erste Minimum:

$$\sin \alpha_1 = \lambda/l.$$

Ergänzende Anmerkung:

Zeiger 1 und 7, 2 und 8 usw. sind antiparallel, d.h. der Phasenunterschied beträgt jeweils π (der entsprechende Gangunterschied der entsprechenden Wellenstrahlen $\lambda/2$). Sie löschen sich gegenseitig aus.

Dies entspricht bei der konventionellen Herleitung z.B. Dorn-Bader Physik 12/13 S. 191 B2, dass entsprechende Wellenstrahlen von Abschnitt I und II den Gangunterschied $\lambda/2$ haben und sich auslöschen.

Diese Überlegungen sind aber bei der Herleitung mit der Zeigermethode nicht mehr nötig!

2. Minimum

Die Zeigerkette schließt sich jetzt zweimal. Zwischen dem ersten und letzten Zeiger besteht die Phasendifferenz 4π , d.h. der Gangunterschied der zugehörigen Wellenstrahlen beträgt 2λ (siehe obige Skizze: Wellenstrahlen in Richtung Z_2).

Entsprechend folgt für den Winkel α_2 des 2. Minimums (Z_2 auf dem Schirm)

$$\sin \alpha_2 = 2\lambda/l.$$

In der doppelt geschlossenen Zeigerkette sind jetzt

Der 1. und 4. Zeiger

Der 2. und 5. Zeiger

...

der 7. und 10. Zeiger

....

antiparallel, d.h. Phasendifferenz π , d.h. Gangunterschied der zugehörigen Wellenstrahlen $\lambda/2$.

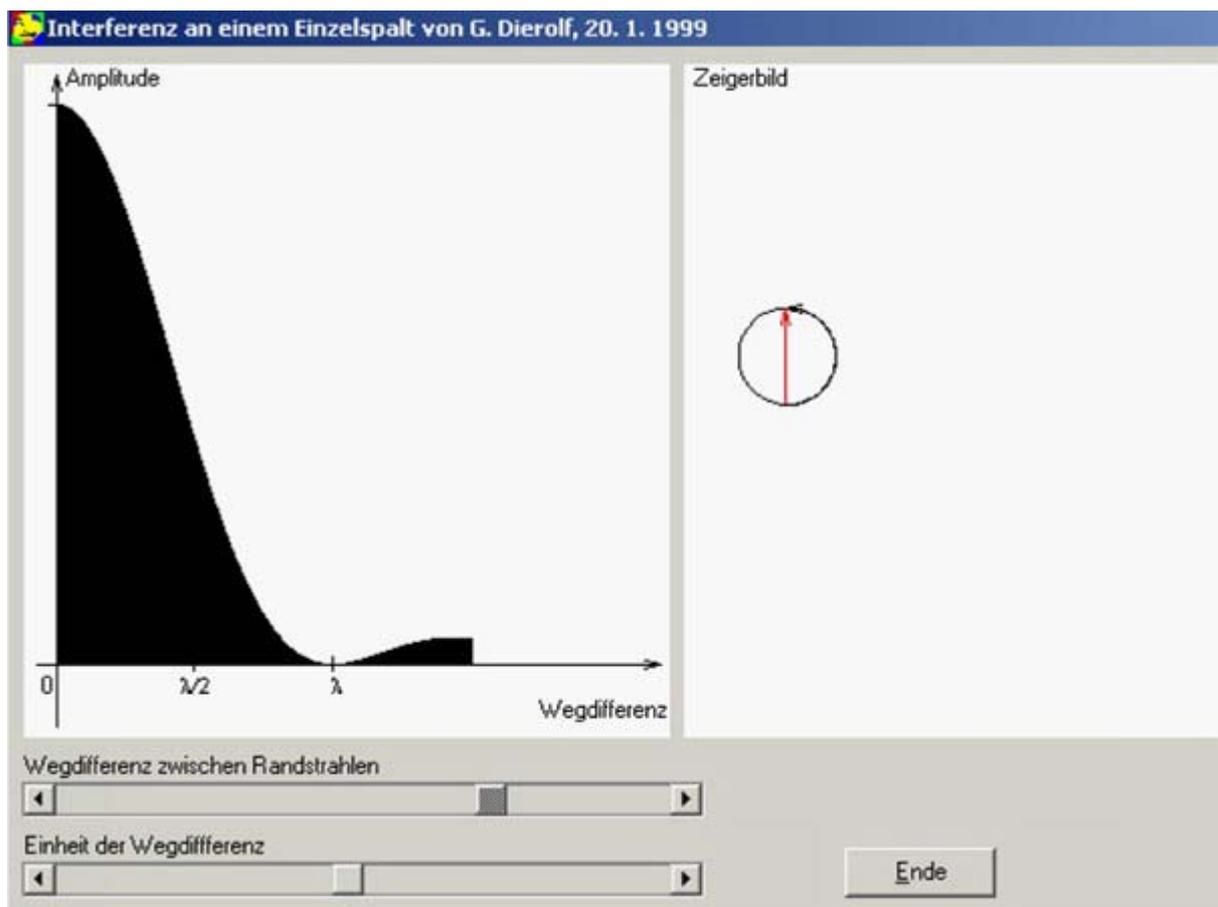
Die entsprechenden Wellenstrahlen löschen sich aus.

Man erkennt jetzt auch den großen Vorteil der Zeigermethode:

Es ist keine Unterteilung des Einzelspalts in 4 Bereiche nötig (Z.B. Dorn-Bader Physik 12/13 S. 191 B2 e)), aus den sich dann besonders ausgewählte Wellenstrahlen gegenseitig auslöschen. Damit ist auch der Schülereinwand hinfällig, dass entsprechende Wellenstrahlen aus Abschnitt I und II zwar den Gangunterschied $\lambda/2$ haben (Auslöschung) aber bei anderer Zusammenfassung Wellenstrahlen aus Abschnitt I und III den Gangunterschied λ hätten.

Näherungsweise Bestimmung der Maxima beim Einzelspalt

Verwendet man ein Simulationsprogramm zum Einzelspalt mit der Zeigermethode (Z.B. Dierolf), so kann man „experimentell“ näherungsweise die Phasendifferenz z.B. für das 1. Maximum anhand der Zeigerkette ermitteln. Man braucht ca. $1\frac{1}{2}$ Umläufe der Zeiger, so dass die Länge des resultierenden Summenzeigers maximal wird. D.h. der Phasenunterschied zwischen 1. und letztem Zeiger beträgt näherungsweise 3π , der zugehörige Gangunterschied der Wellenstrahlen $3/2 \cdot \lambda$ (siehe Dorn-Bader Physik 12/13 S. 191 B2 d)). Der exakte Wert liegt bei $1,430 \lambda$.



5.4.6 Huygens-Prinzip und Strahlenoptik

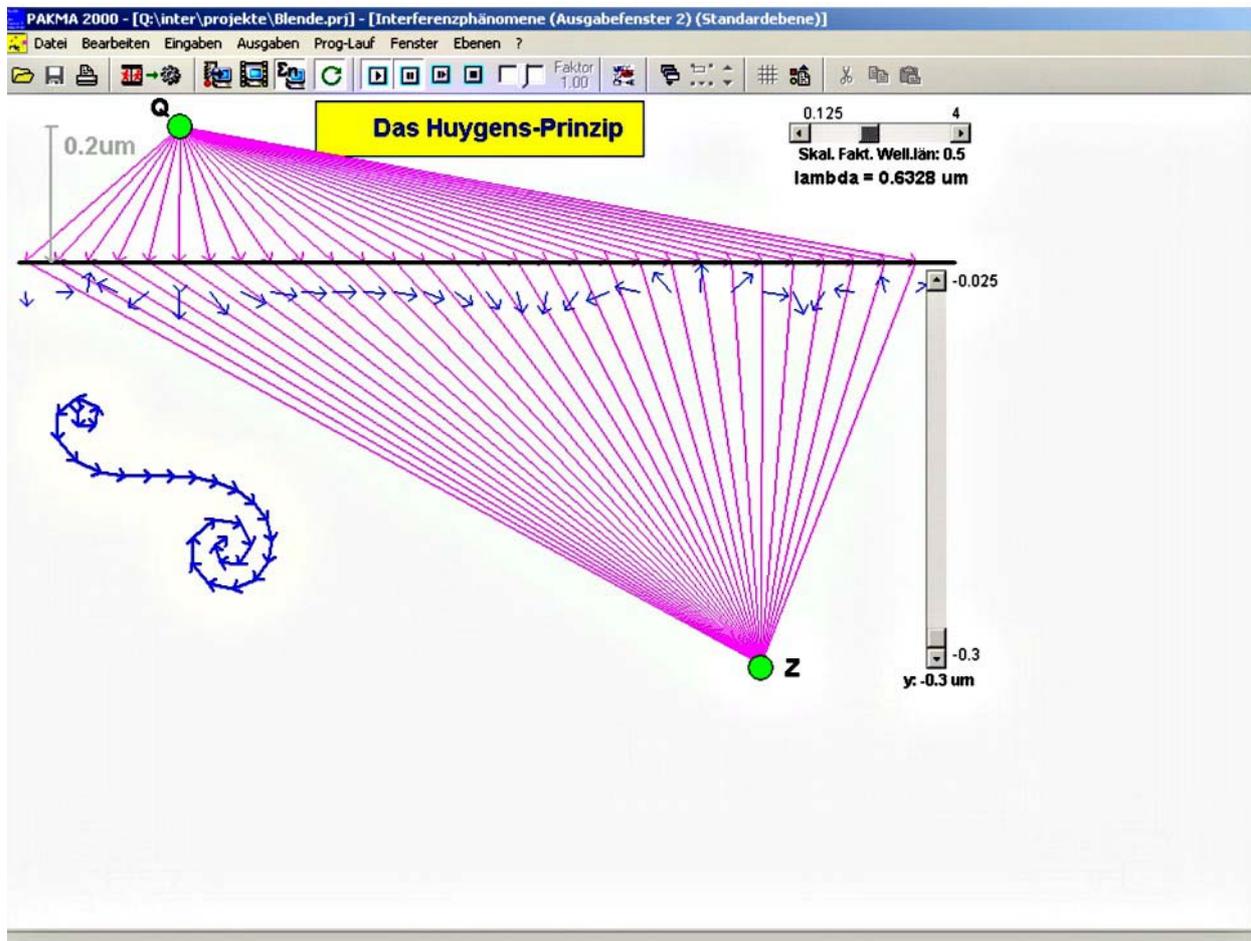
Programme:

- F. Bader, Diskette zu „Eine Quantenwelt ohne Dualismus“: Quanten.exe → Optik → b) Demonstration der Pfeiladdition beim Einzelspalt
- Pakma Physik 12/13 : Interferenzphänomene, Wellenwege durch eine Blendenöffnung
- W. Wegner: blende.exe

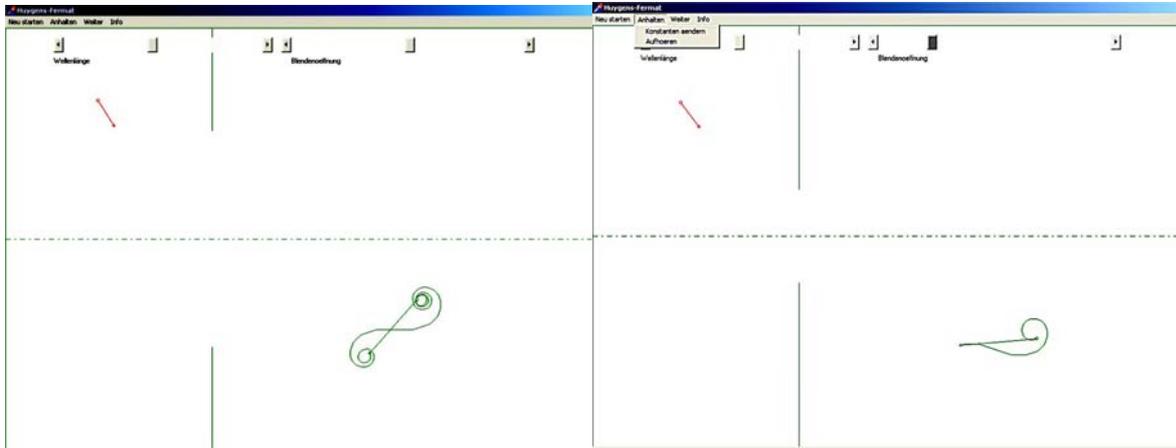
Der Lichtstrahl und das Huygens-Prinzip

Ausgangspunkt ist das Huygens-Prinzip.

Man betrachtet alle möglichen Wellenwege von der Quelle bis zum jeweiligen Zielpunkt. Die zugehörigen Elongationen (Zeiger) im Zielpunkt werden addiert.



Wie ändert sich in einem beliebigen Zielpunkt hinter einer Blende der resultierende Zeiger (und damit die Amplitude), wenn man die Blende etwas enger macht?
 Antwort mit Cornu-Spirale. Zunächst werden die Wickel der Cornu-Spirale aufgelöst, dabei bleibt die Länge des resultierenden Zeigers weitgehend unverändert.



Reflexion am ebenen Spiegel

Programm feyn : Reflektion am ebenen Spiegel

Reflexion am Spiegel

Lampe Detektor

Spiegel

Laufzeitdiagramm

Zeigeraddition

Laufzeit

Länge der Resultierenden

Quadrat der Resultierendenlänge

Spiegelbreite: min — max

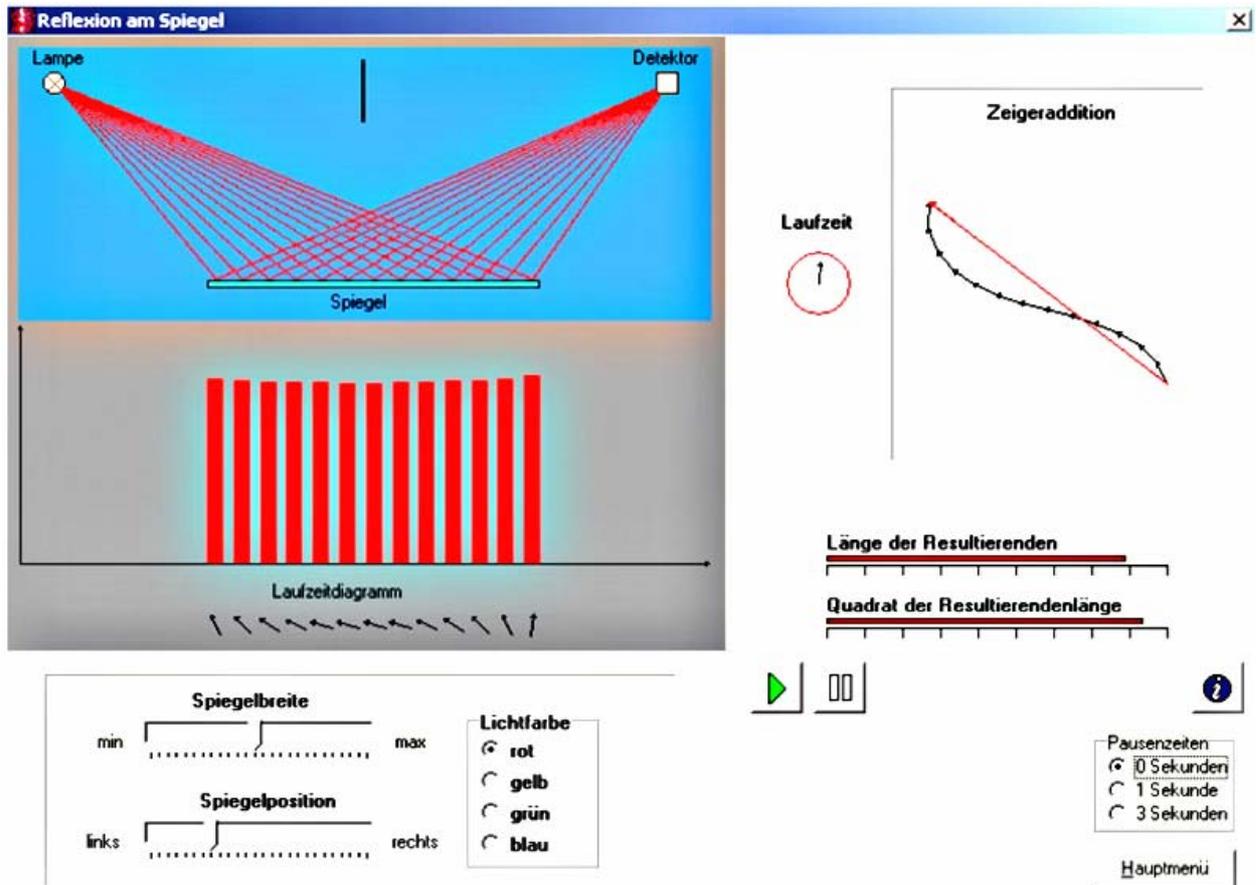
Spiegelposition: links — rechts

Lichtfarbe: rot, gelb, grün, blau

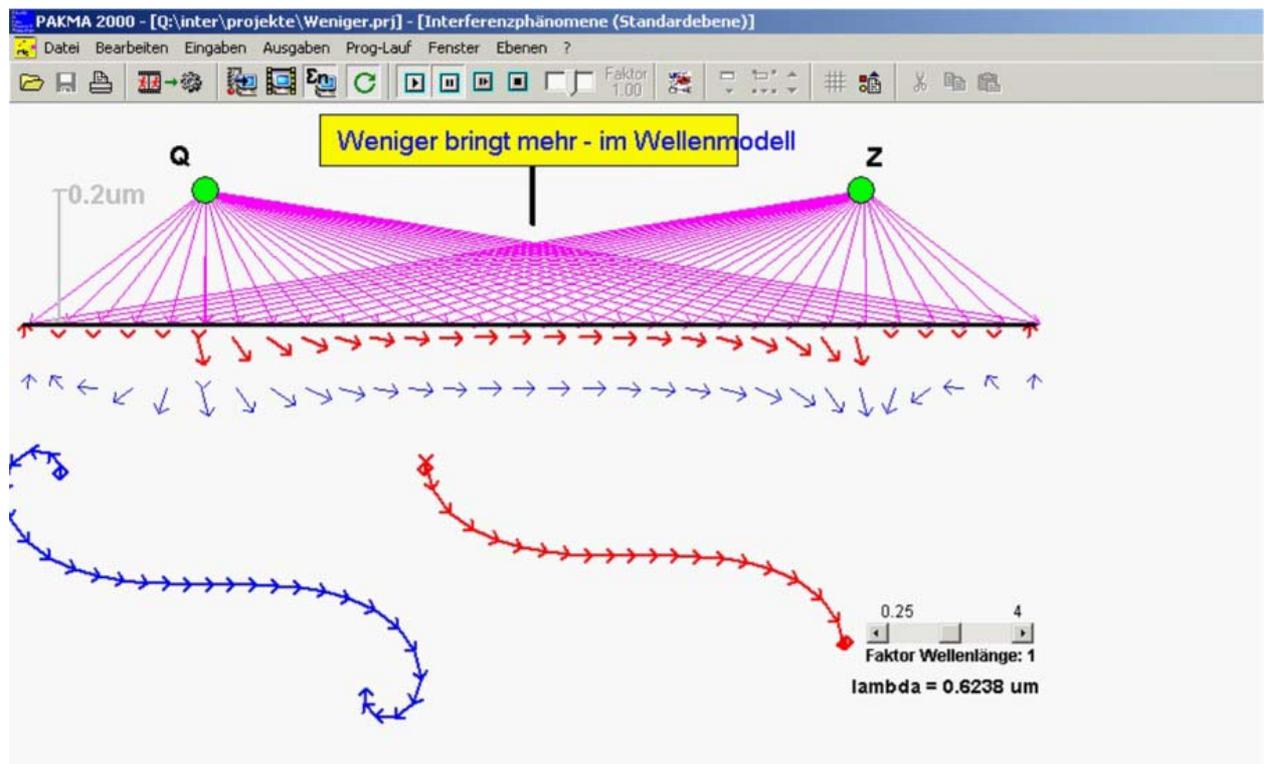
Pausenzeiten: 0 Sekunden, 1 Sekunde, 3 Sekunden

Hauptmenü

Reflexion: weniger Spiegel kann mehr Intensität bringen



Literatur: Dorn-Bader Physik 12/13 S. 197



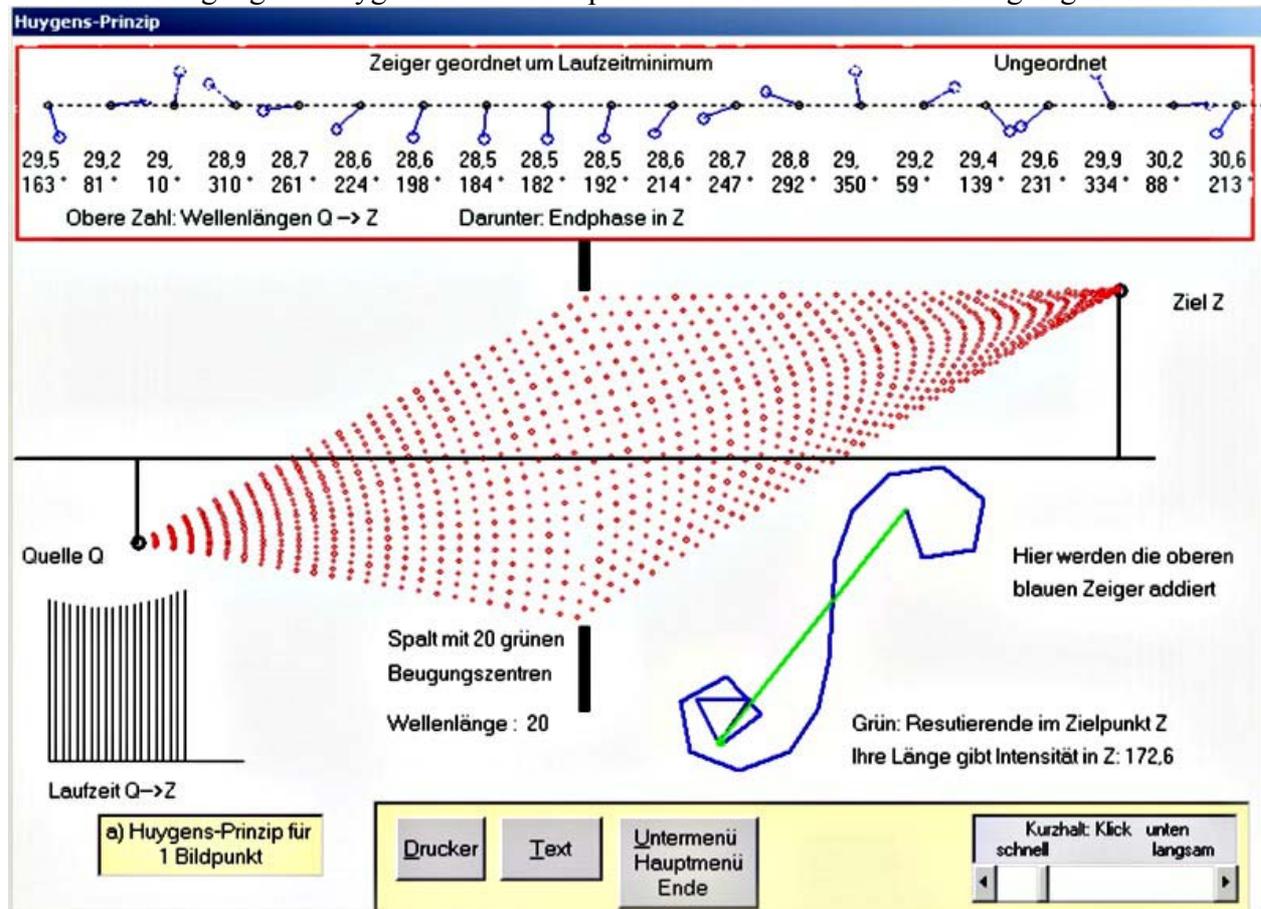
5.5 Quantenphysik

Literatur:

- Franz Bader: Eine Quantenwelt ohne Dualismus, Schroedel Verlag Nr. 76530
- R. Feynman: QED (Piper 1988)
- Josef Küblbeck, Rainer Müller: Die Wesenszüge der Quantenphysik (Aulis Verlag 2002, Praxis Schriftenreihe Physik Band 60)

5.5.1 Bedeutung des Zeigermodells in der Quantenphysik

Feynman schlug in seinem Buch QED vor, das Verhalten von Quanten mit rotierenden Zeigern zu beschreiben. Diese Zeiger stehen für die komplexen Wahrscheinlichkeitsamplituden Ψ der Quantenphysik, die Lösungen der Schrödinger Gleichung sind. Zu den Zeigern in der Quantenphysik kann man kommen, wenn man die tatsächlichen Bahnen der Wellenerregung im Huygensschen Prinzip der klassischen Wellentheorie geeignet umdeutet.



Im obigen Bild ist der Einzelspalt in 20 Beugungszentren eingeteilt. Für die Intensität im Zielpunkt Z muss man die zu den 20 Wellenwegen gehörenden Zeiger (blau) addieren.

Betrachtet man die Quelle Q jetzt nicht als Wellenerreger sondern als Quelle von Quantenobjekten, so benötigt man zur Berechnung der Antreffwahrscheinlichkeit für die Quantenobjekte in Z eine Umdeutung der Wellenwege. Nach der UBR kann einem Quantenobjekt ja keine Bahn im klassischen Sinn mehr zugeordnet werden. Die punktierten Linien von Q nach Z bedeuten jetzt mögliche Pfade (genauer Rechenpfade) der Quanten. Jedem möglichen Rechenpfad i (mathema-

tisch unendlich viele) wird in Z ein Ψ_i -Zeiger zugeordnet. Die Phasenlage des jeweiligen Ψ_i -Zeiger erhält man, in dem man einen λ -Zähler („Pizzarad“) längs eines möglichen Rechenpfades „abrollt“ und aus dessen Stellung in Z die Phasenlage für den Ψ_i -Zeiger ermittelt (modulo 2π). Die Summe der Ψ_i -Zeiger ergibt den resultierenden Ψ_{res} -Zeiger in Z , die komplexwertige Wahrscheinlichkeitsamplitude Ψ_{res} . Durch die Zeigeraddition wird automatisch das für die Quantenphysik grundlegende Superpositionsprinzip der (ununterscheidbaren) Möglichkeiten verwendet. Die Antreffwahrscheinlichkeitsdichte erhält man durch $|\Psi_{res}|^2$.

Siehe auch

- Dorn-Bader: Physik 12/13 S. 251.
- Küblbeck, Müller: Die Wesenszüge der Quantenphysik S. 50 ff

Umdeutung des Zeigermodells beim Übergang von der Wellenoptik zur Quantenphysik

Wellenoptik	Quantenphysik
Alle tatsächlichen Bahnen der Wellenerregung von der Quelle bis zum Zielort	Alle möglichen Pfade des Quantenobjekts im Sinne von Rechenpfaden von der Quelle bis zum Zielort
E-Zeiger als λ -Zähler für jeden Wellenweg	Ψ -Zeiger als λ -Zähler für jeden möglichen Rechenpfad.
E-Zeiger entspricht der elektrischen Feldstärke \vec{E} bei hoher Photonendichte	Ψ -Zeiger heißt Wahrscheinlichkeitsamplitude (entspricht keiner Observablen)
Superposition	Superposition bei mehreren ununterscheidbaren Möglichkeiten:
Realisiert durch Zeigeraddition am Zielort	Realisiert durch Zeigeraddition am Zielort
Gemessene Intensität $\sim \vec{E} ^2$	Antreffwahrscheinlichkeitsdichte $\sim \Psi_{res} ^2$

5.5.2 Der Doppelspalt

Behandlung der Interferenz einzelner Photonen am Doppelspalt mit dem Zeigermodell.

Am Doppelspalt stehen dem unteilbaren Quantenobjekt „Photon“ zwei mögliche, ununterscheidbare Pfade offen. Für jeden Pfad (Rechenpfad) wird ein Ψ -Zeiger eingeführt: Ψ_1 und Ψ_2 . Der Ψ -Zeiger rotiert als λ -Zähler (der Ψ -Zeiger dreht sich pro Weglänge λ um den Phasenwinkel 2π).

Am Zielort $Z(x)$ (Ort der Photonenlokalisation) werden die beiden Zeiger $\Psi_1(x)$ und $\Psi_2(x)$ addiert:

$$\Psi_{res}(x) = \Psi_1(x) + \Psi_2(x). \quad (\text{statt } \vec{E}_{res} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \text{ wie bei elektromagnetischer Welle})$$

Beim Doppelspalt interferieren die Möglichkeiten Ψ_1 und Ψ_2 des unteilbaren Photons. Die Antreffwahrscheinlichkeitsdichte für die Lokalisation sehr vieler, voneinander unabhängiger Photonen am Zielort $Z(x)$ erhält man durch $|\Psi_{res}(x)|^2$.

Deshalb nennt man $\Psi(x)$ **Wahrscheinlichkeitsamplitude**.

5.5.3 Materiewellen, deBroglie-Wellen

Die Ergebnisse der Elektronenbeugung werden mittels Materiewellen (deBroglie-Wellen) korrekt beschrieben. Wie bei Photonen gilt, dass dabei jedes Elektron mit sich selbst interferiert, indem all seine Möglichkeiten (Rechenpfade) interferieren. Auch hier gilt das Superpositionsprinzip für die Wahrscheinlichkeitsamplituden Ψ .

Man beschreibt eine deBroglie-Welle von Elektronen (Impuls p) durch ortsfeste, gegeneinander versetzte, mit der Frequenz $f = W/p$ rotierende Zeiger.

Für ein Elektron mit scharfem Impuls p muss die deBroglie-Welle nach der UBR ein unendlich langer Wellenzug sein (ebene Welle). Die Antreffwahrscheinlichkeitsdichte längs dieses unendlich langen Wellenzugs muss überall gleich groß sein, d.h. $|\Psi(x,t)|^2 = \text{konst.}$ Hieraus folgt eine konstante Zeigerlänge $|\Psi(x,t)| = \text{konst.}$.

deBroglie-Wellen mit Zeigern dargestellt

deBroglie-Welle für Elektronen mit scharfem Impuls

deBroglie-Wellenlänge 10 pm

Das Elektron (klassisch gesehen als roter Kreis) wäre doppelt so schnell wie die Wellen-Phase !

$|\Psi|^2$ (Zeigerlänge²) ist Antreff-Wahrscheinlichkeit für Elektronen und hier konstant.

Zeigerlänge ($|\Psi|$) konstant

Klassische Welle - zum Vergleich: keine konstante Elongation.

a) deBroglie-Welle mit Zeigern konstanter Länge

Drucker

Text

Untermenü
Hauptmenü
Ende

Weiter

Kurzhalt: Klick unten
schnell langsam

5.5.4 Materiewellen im Schattenwurf (Ketterle)

Literatur

- W. Ketterle, M. O. Meves: Bose-Einstein-Kondensation in einem Gas von Natrium-Atomen, Physikalische Blätter, 52 (1996) Nr.6, S. 573
- W. Ketterle: Bose-Einstein-Kondensate - eine neue Form von Quantenmaterie, Physikalische Blätter, 53 (1997) Nr. 7/8, S. 677
- W. Ketterle: Science, Vol. 275. 31 Jan. 1997

Simulationsprogramm

Dorn Bader Physik SEK II: Spezielle Relativitätstheorie und Quantenphysik
Schroedel Verlag 2002, ISBN 3-507-10725-2

W. Ketterle (Physik-Nobelpreis 2001) ließ bei einer Temperatur von 10^{-9} K (knapp über dem absoluten Nullpunkt), zwei Bose-Einstein-Kondensate von Natriumionen (gefangen in einer Atomfalle) sich langsam überlappen. Im Überlappungsgebiet zeigten sich periodische, sehr kontrastreiche Interferenzstreifen (Wellenlänge $\lambda \approx 30 \mu\text{m}$). Diese aus Natriumionen gebildeten **Materiewellen** können durch Interferenz sogar eine *stehende Materiewelle* erzeugen.

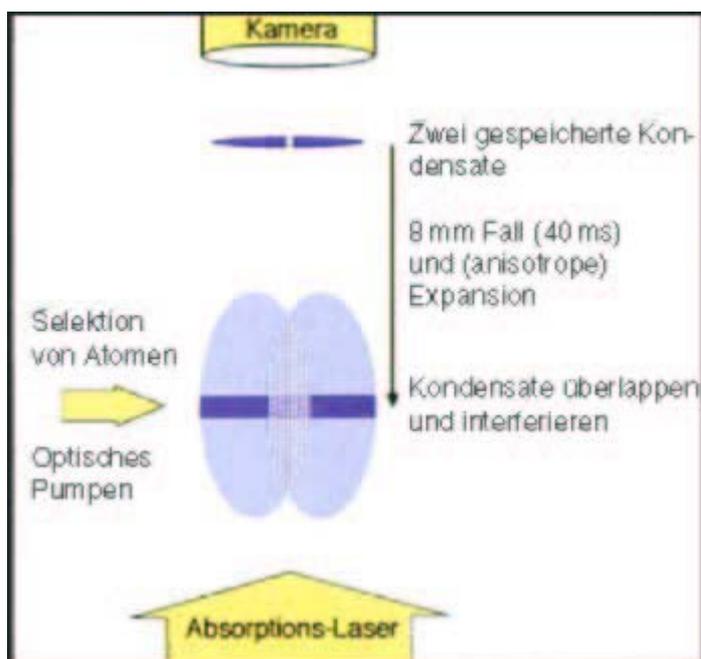
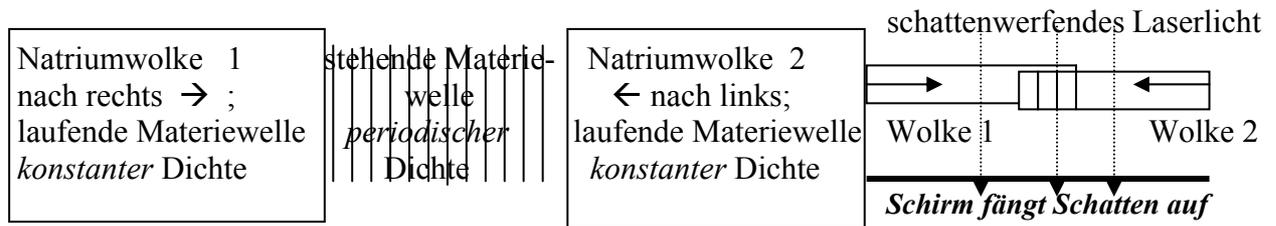
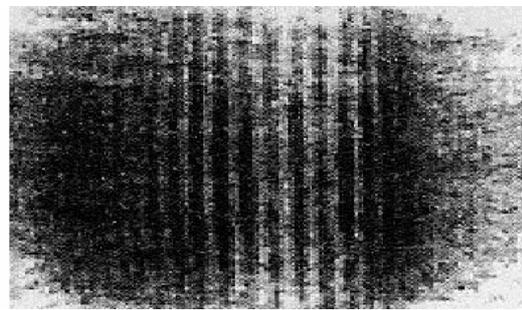
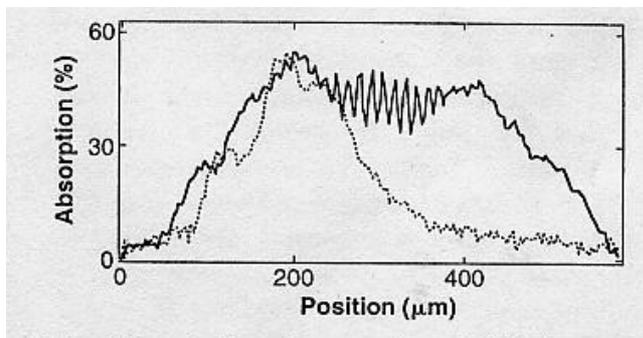


Abb. : Anordnung zur Beobachtung der Interferenz zweier Bose-Kondensate. In einem Doppelmuldenpotential werden zwei Bose-Kondensate erzeugt. Ein Laserstrahl, der abstoßende Kräfte auf die Atome ausübt, trennt die beiden Kondensate. Beim Ausschalten der Falle fallen sie aufgrund der Gravitation nach unten, dehnen sich ballistisch aus und überlappen. In der Überlappzone läßt sich ein Interferenzmuster mit hohem Kontrast beobachten, indem man ein Absorptionssbild mit einem vertikalen Laserstrahl aufnimmt. Ein weiterer Laserstrahl selektiert absorbierende Atome in einer dünnen Schicht durch optisches Pumpen. Diese „tomographische“ Methode verhindert, daß sich Interferenzmuster in verschiedenen Ebenen überlagern und somit aus-schmieren. (Phys. Bl. 53 (1997), Nr. 7/8, S. 679)

Aus Simulationsprogramm Dorn Bader Physik SEK II: Spezielle Relativitätstheorie und Quantenphysik Schroedel Verlag 2002, ISBN 3-507-10725-2 :



Zwei Natrium-Wolken laufen langsam gegeneinander und werden durch einfachen Schattenwurf sichtbar. Die Interferenzstreifen im Überlappungsgebiet zeigen eine zeitlich konstante, aber räumlich-periodische Teilchendichte der dort *stehenden* Welle. Dagegen ist bei den beiden *fortschreitenden* Wellen links und rechts die Teilchendichte konstant.



Linkes Bild:

Die punktierte Linie zeigt die schattenbildende Absorption in einer *Einzelwolke*.

Die Interferenz von zwei gegenläufigen Wolken erkennt man an den Zacken rechts im Schattenwurf.

Rechtes Bild:

Der Schatten, den die Natriumwolke im Überlappungsbereich wirft, ist dort hell, wo nur wenige Teilchen vorhanden sind, die das schattenwerfende Licht absorbieren. Er ist dunkel, wo die Teilchen dicht liegen. Ihre Dichte, also die Antreffwahrscheinlichkeit $|\Psi|^2$ der Ionen, schwankt im Überlappungsbereich räumlich periodisch, ist aber zeitlich konstant.

Dieser Schattenwurf eines quantenkorrelierten Bose-Kondensats von stehenden de Broglie-Wellen zeigt, dass man ohne komplexwertige Wellenfunktion $\Psi(x,t)$ nicht rechnen kann. Deshalb werden bei diesem Beispiel Zeiger zur Beschreibung notwendig.

Das Experiment von Ketterle zeigt, was Schrödinger so schockierend fand, nämlich dass man von der Vorstellung des Schwingens klassischer Wellen in einer Materiewelle Abschied nehmen muss.

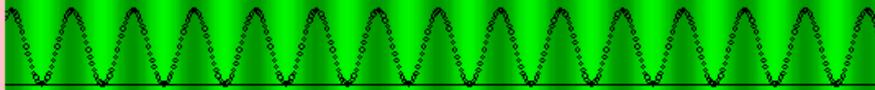
Zwei gegenläufige Materiewellen superponieren zu einer stehenden

Rot: Fortschreitende Materiewelle nach rechts; Psi-Zeiger haben konstante Länge

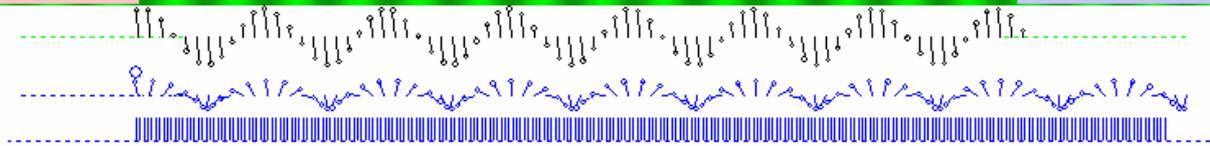
$(\Psi)^2_{\text{rot}} = \text{konstant}$



Stehende Materiewelle; $\Psi^2(\text{res})$ und Teilchendichte periodisch



aus 2 gegenläufigen superponiert



$(\Psi)^2_{\text{blau}} = \text{konstant}$

Grün: Schatten der Interferenz beim Überlappen (dunkel wo Ψ^2 groß):

Die schwarzen Zeiger weisen auf räumlich periodische Atomdichte Ψ^2

e) Ketterle-Experiment
mit
Materiewellen

Drucker

Text

Untermenü
Hauptmenü
Ende

Stop

nochmal(+Weiter)

Kurzhalt: Klick unten
schnell langsam

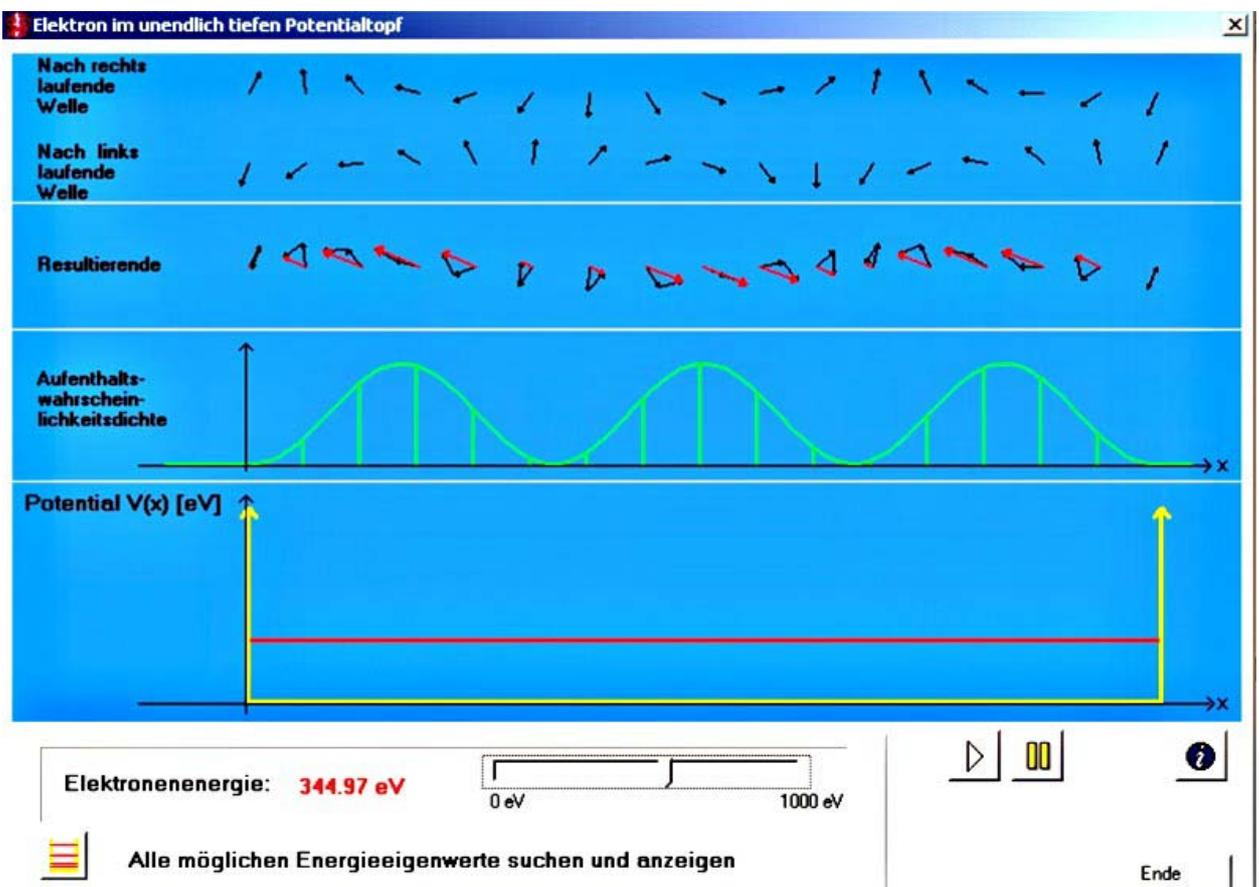
5.5.5 Elektronen in einem linearen Potentialtopf

Literatur:

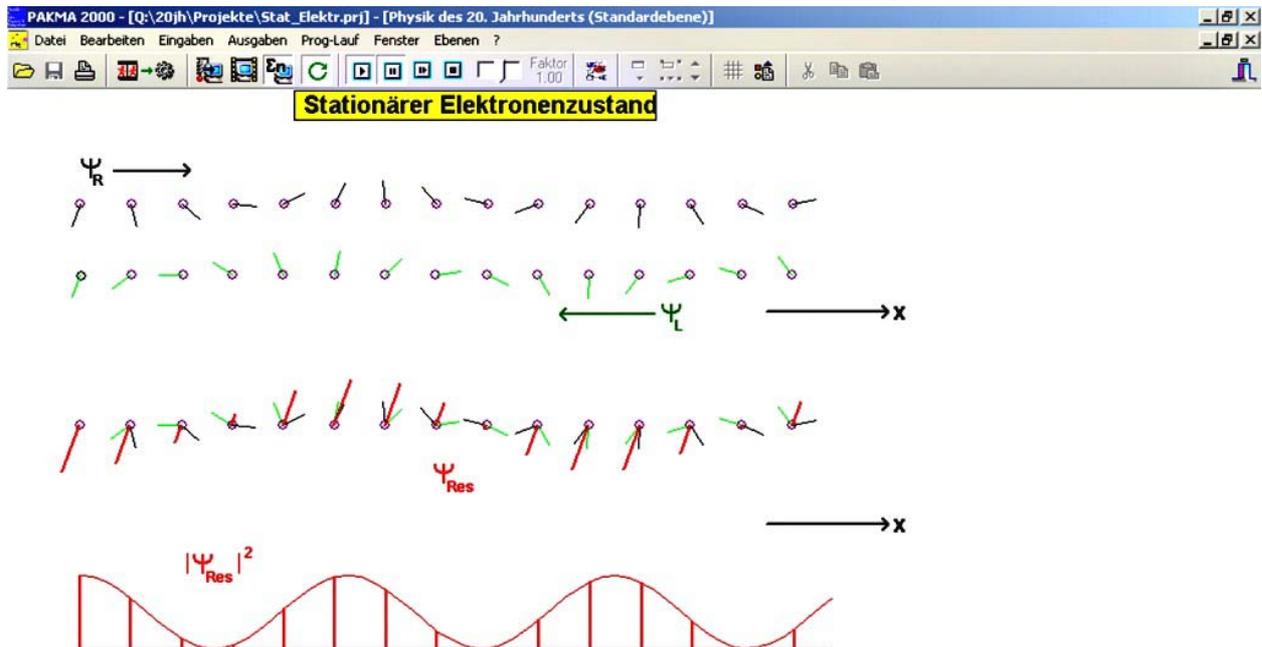
- Franz Bader: Eine Quantenwelt ohne Dualismus, Schroedel Verlag Nr. 76530
- R. Feynman: QED (Piper 1988)

Simulationsprogramme:

- **Feyn.exe** (Matthias Amelunxen 1999 Universität Mainz)
Hier kann die Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte eines Elektrons in einem unendlich tiefen Potentialtopf mit Hilfe des Zeigermodells dargestellt werden. Die Energie des Elektrons in eV kann per Schieberegler eingestellt werden.



- **Pakma 2000:** → Physik 12/13 → Physik des 20. Jahrhunderts → stationärer Elektronenzustand



Ein Elektron ist in einem recht langen eindimensionalen Puffer eingeschlossen. Der linke und rechte Abschluss ist ein Elektronenspiegel. Der Elektronenzustand wird durch die Überlagerung einer nach rechts und einer nach links laufenden Ψ_R und Ψ_L Welle beschrieben. Diese Ψ -Wellen werden - in dem mittleren Bereich ohne die Abschlüsse an dem Ende des Pufferes zu betrachten - in diesem Projekt jeweils durch rotierende Zeiger dargestellt. In der Ebene darunter werden diese Zeiger addiert. Sie stellen die Beschreibung der sich bei Addition von Ψ_R und Ψ_L ergebenden resultierenden Ψ_{Res} -Welle dar (Dorn-Bader Physik 12/13 S. 268).

Für Schüler macht diese Superposition von nach links und nach rechts laufender Materiewelle immer wieder Schwierigkeiten, weil sie argumentieren: ein Elektron kann sich doch nicht zugleich nach links und nach rechts bewegen. Hier kann der Verweis auf den Doppelspalt hilfreich sein. Auch beim Doppelspalt ist die von der klassischen Anschauung geprägte Aussage falsch: durch einen Spalt muss das Photon doch gehen! Es geht in der Quantenphysik um die Superposition der Möglichkeiten (Rechenpfade).