Michael Rode

Das Zeigermodell im Unterricht über Quantenphysik nutzen

Eine kurze Anleitung

SENSTUFE:	10–13
ITUMFANG:	variabel, unterrichtsbegleitend
THEMEN:	Schwingungen und Wellen, Quantenphysik
PETENZEN:	Modellieren, Umgang mit mathematischen Darstellungen
TERIALIEN:	[3]

In diesem Beitrag werden zunächst die Grundlagen des Zeigermodells knapp dargestellt mit dem Ziel, Anwendungshinweise zu geben. An diesen grundlegenden Teil schließen sich je ein Abschnitt über das Mach-Zehnder-Interferometer und eine Erweiterung zur Zeigermultiplikation an. Letztere gehört zwar nicht zum Kern der Curricula, es soll jedoch deutlich werden, welche besonderen Stärken das Zeigermodell entwickelt, wenn man zusätzlich zur weithin bekannten Addition von Zeigern auch deren Multiplikation einführt. Diese Multiplikation sowie die darauf aufbauende Vermittlung zwischen „Wellenbeschreibung" und „stochastischer Deutung" werden hier nach unserer Kenntnis erstmalig für den Unterricht elementarisiert dargestellt und ermöglichen auch einen stringenten Zugriff auf die Verschränkung (s. Kasten 5 im fachlichen Basisartikel).

Grundlagen

Mithilfe von Zeigern lassen sich die zur Beschreibung der Quantenphysik erforderlichen, komplexwertigen Funktionen schulgerecht elementarisieren. So wird das dem Gebiet inhärente Unanschauliche symbolisch unterstützt.

Diese Funktionen können in der Form $\Psi(t, x) = A \cdot e^{i(\omega t - kx)}$ notiert werden. Dabei sind $\omega = 2\pi/T$ und $k = 2\pi/\lambda$.

$\Psi(\varphi) = A \cdot e^{i\varphi} = A \cdot (\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$, damit lassen sich Ψ-Funktionen durch rotierende Zeiger in der Gauß'schen Zahlenebene darstellen. In dieser Darstellung ist die Rechtsachse die reelle Achse, die Hochachse ist die imaginäre Achse (s. **Abb. 1**).

Diese Darstellung bedingt die folgenden Regeln:

- **R1:** Für $t = 0$ und $x = 0$ steht der zugehörige Zeiger in „3-Uhr-Stellung" („Startposition").
- **R2:** Für $t = 0$ und wachsendes x („in Ausbreitungsrichtung") erscheinen die zu den einzelnen Oszillatoren gehörenden Zeiger im Uhrzeigersinn weitergedreht. Nach einer Wellenlänge ist eine vollständige Drehung absolviert.
- **R3:** Für einen ausgewählten Oszillator an einem festen Ort x erfolgt die Drehung des Zeigers mit zunehmender Zeit t gegen den Uhrzeigersinn. Nach Ablauf einer Periodendauer T hat sich dieser Zeiger einmal gedreht.

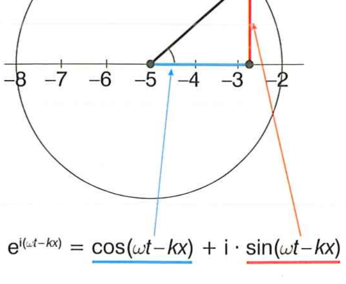
Erste Schritte

Es hat sich bewährt, im Unterricht zu untersuchende Situationen zunächst mit einer fiktiven Wellenlänge von $\lambda = 4$ cm durchzuführen. In der Regel wird man den Zeitpunkt $t = 0$ betrachten. Unter diesen Bedingungen kann man Zeigerstellungen mithilfe eines Lineals auf Achtel-Umdrehungen genau bestimmen (s. **Abb. 2**).

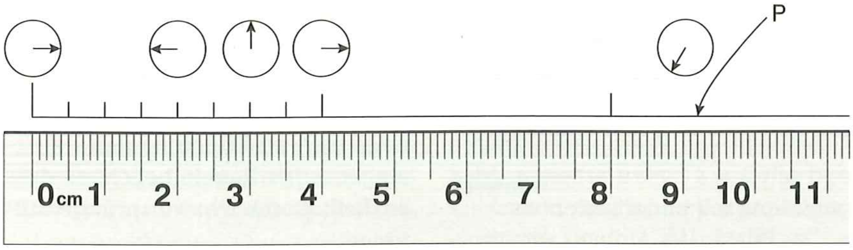
Erst später und mit dynamischen Geometrieprogrammen wird man auch die Zeit variieren, z. B. um sich zu überzeugen, dass die Interferenzmuster zeitlich konstant sind.

Einsatz des Zeigermodells

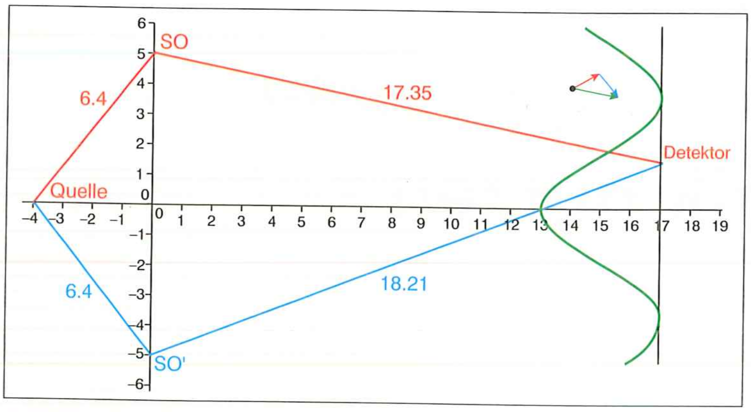
Das Zeigermodell ist bereichsübergreifend. In meinem Unterricht wird es bereits eingeführt, um Schwingungen oder Wellen zu beschreiben. In



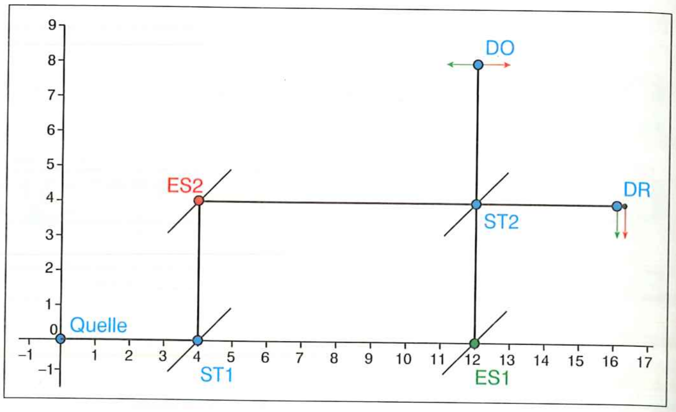
1 | Ein mit zunehmender Zeit t an einem festen Ort x gegen den Uhrzeigersinn rotierender Zeiger, dargestellt in der Gauß'schen Zahlenebene, mit seinen Projektionen auf die beiden Achsen.



2 | Beispiel für die Bestimmung einer Zeigerstellung. Der Nullpunkt des Lineals kennzeichnet die Lage des fiktiven Senders, die Ausbreitung erfolgt nach rechts. Daher erfolgt die Drehung bei Bewegung von links nach rechts mit dem Uhrzeigersinn. Wie in allen gleichartigen Beispielen wird $\lambda = 4$ cm gewählt. Der Abstand vom Sender zum Punkt P beträgt 9,2 cm. Das entspricht etwas mehr als 2 2/8 Umdrehungen. Die Zeigerstellung ist also etwa „7 Uhr".



3 | Darstellung einer Doppelspalt-Situation: Zur oberen Verbindung Quelle–Detektor gehört eine Pfadlänge von etwa 23,8 cm. Nimmt man $\lambda = 4$ cm an, so ergeben sich 5 7/8 Umdrehungen, der zugehörige Zeiger hat also „nicht ganz sechs Umdrehungen geschafft". Für den unteren Pfad ergeben sich 24,6 cm, entsprechend 6 1/8 Umdrehungen. Die beiden Zeiger und deren Summe sind oben rechts dargestellt. Die Kurve am rechten Bildrand stellt das Quadrat der Amplitude dar – es wird also angenommen, dass mit Mikrowellen und nicht mit Schall gearbeitet wird.



4 | Prinzipzeichnung eines Mach-Zehnder-Interferometers (mit ST: Strahlteiler, ES: Endspiegel. DO bzw. DR: Detektoren). Wegen der Annahme $\lambda = 4$ cm wurden alle relevanten Längen als Vielfache von 4 cm gewählt. Auf dieser Grundlage lassen sich die Zeigerstellungen an den Detektoren sehr einfach bestimmen: Entscheidend für die Ergebnisse sind unter diesen Bedingungen nur die Phasensprünge gemäß den Regeln **R4** und **R5**.

diesem Fall bedeuten die Länge des Zeigers $|\Psi|$ die (reelle) Amplitude und das in der Quantenphysik wichtige $|\Psi|^2$ die Intensität.

Auch eine der beiden Projektionen auf die Achsen hat im klassischen Fall eine Bedeutung: Im mechanischen Fall beschreibt sie die Elongation, je nach Achse, auf die man projiziert, dies gilt sowohl für longitudinale als auch für transversale Wellen. Bei elektromagnetischen Wellen bedeutet die Projektion auf die Hochachse die elektrische Feldstärke (s. a. die ausführliche Einführung in [1]).

In der Quantenphysik kommt den Projektionen keine selbstständige Bedeutung zu. In quantenphysikalischen Situationen ergibt $|\Psi|^2$ ein Maß für die Nachweiswahrscheinlichkeit, mit der man in einem gegebenen Aufbau ein auf festgelegte Weise präpariertes Quantenobjekt in einem Detektor nachweisen kann.

Beschreibung von Interferenz

Um Standardsituationen zu verstehen, bietet es sich an, zunächst stets auf der Grundlage von Prinzipzeichnungen und mit $\lambda = 4$ cm zu arbeiten. Man geht dann folgendermaßen vor:

- Das Prinzip des Aufbaus wird großformatig aufgezeichnet.
- Die Längen aller denkbaren Verbindungen Quelle–Detektor („Pfade") werden ausgemessen.
- Die zugehörigen Zeigerstellungen werden auf 1/8-Umdrehungen ($\triangleq$ 0,5 cm) genau auf dem Lineal abgelesen.
- Die beteiligten Zeiger werden so addiert, wie man es aus der Sekundarstufe I von Kräften her kennt.
- Die Länge des resultierenden Zeigers ist proportional zur Amplitude. Mikrofone beispielsweise messen Amplituden, also Zeigerlängen. Misst der Detektor Energiestromstärken (wie z. B. bei Licht), muss die Länge des resultierenden Zeigers noch quadriert werden.

Mit einem dynamischen Geometrie-Programm kann man das Ergebnis für jeden Ort des Detektors bestimmen und grafisch über den möglichen Orten des Detektors auftragen (s. **Abb. 3**).

Viele weitere einschlägige Beispiele findet man in [3].

Mach-Zehnder-Interferometer mit Zeigern modellieren

Will man Interferometer beschreiben, muss man zusätzlich zu den bereits eingeführten Regeln beachten, dass an Reflektoren Phasensprünge auftreten.

- **R4:** Endspiegel erzeugen stets Phasensprünge von 180°.
- **R5:** Verlustlose und symmetrische Strahlteiler erzeugen einen Phasensprung von 90° im Gegenuhrzeigersinn für die reflektierten Anteile. Die transmittierten Anteile erfahren keinen Phasensprung.

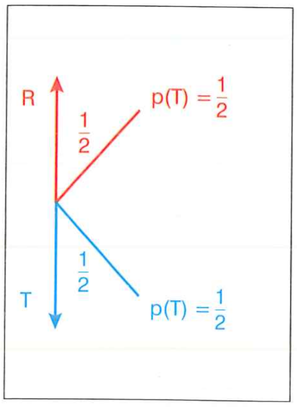
Begründungen und Beschreibungen von Experimenten können beim Verfasser abgerufen werden (s. a. [1]).

Es zeigt sich, dass bei einem optimal justierten Mach-Zehnder-Interferometer (mit nicht-divergentem Licht betrieben) kein Licht am Detektor DO, dafür aber alles Licht am Detektor DR registriert wird (s. **Abb. 4**).

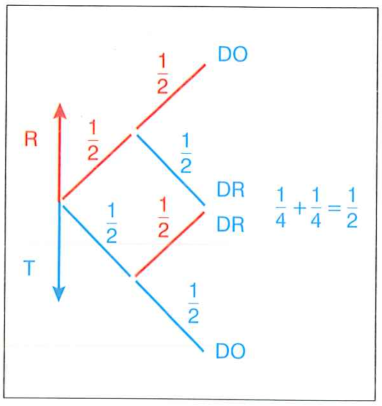
Zeigermultiplikation

Die → *stochastische Deutung* von Interferenzmustern kann man mit Gewinn vertiefen, indem man die Vorgänge am Mach-Zehnder-Interferometer noch einmal anders und vertiefend untersucht. Ziel der hier vorgeschlagenen Erweiterung ist u. a., zwischen Teilchen- und Wellenbild zu vermitteln. Anknüpfend an die aus dem Mathematikunterricht bekannten Pfadregeln gewinnt man durch die beiden, einander widersprechenden Darstellungsformen Einsicht in die Notwendigkeit der Zeigermultiplikation, ohne die man nicht sachgerecht über Verschränkung sprechen kann.

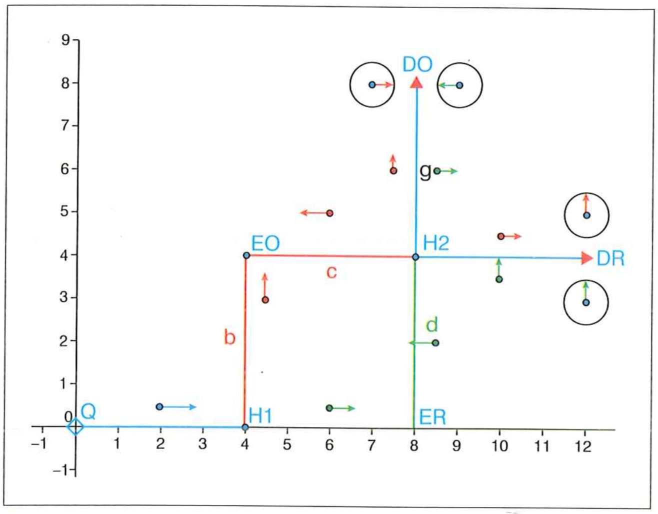
Das Verhalten einzelner Photonen am ersten Strahlteiler (ST1; s. **Abb. 4**) könnte man als Zufallsexperiment



5 | Wahrscheinlichkeitsbaum für das Strahlteiler-Experiment unter der Annahme einer 50:50-Teilung. T steht für Transmission, zugehörige Pfade im Baum werden nach unten eingetragen, angedeutet durch den Pfeil „T" (*kein* Zeiger!). Reflexion (R) wird durch Pfade nach oben dargestellt.



6 | Wahrscheinlichkeits-Baum für das Mach-Zehnder-Interferometer unter der Annahme, dass über die Vorgänge durch Würfeln entschieden wird. Es ergibt sich, dass beide Detektoren mit der (gleichen) Wahrscheinlichkeit von 0,5 ansprechen müssten, wenn es sich um ein klassisches Würfelexperiment handeln würde.



7 | Darstellung eines Mach-Zehnder-Interferometers mit den abschnittsweise bestimmten Zeigern. Deren Länge wird nach jedem Strahlteiler verkürzt. Das modelliert die Abnahme der Amplituden. An den Detektoren sind die zu den Pfaden gehörenden Zeiger-Produkte eingetragen. Man erkennt, dass an DO niemals ein Ereignis registriert wird, an DR immer. (Die zugrunde gelegte Wellenlänge beträgt auch hier 4 cm.)

auffassen und durch einen Wahrscheinlichkeitsbaum beschreiben (s. **Abb. 5**): Photonen werden dort zufallsbedingt ungeteilt entweder reflektiert oder transmittiert.

Wenn man die beiden Pfade, die am Strahlteiler entstehen, in einem Mach-Zehnder-Aufbau zusammenführt, sollte man für unteilbare Objekte, über deren Geschick klassisch gewürfelt würde, einen erweiterten Baum zeichnen können (s. **Abb. 6**).

Ein Experiment mit Licht zeigt aber bekanntlich Interferenz, die sich in **Abbildung 4** dadurch äußert, dass der Detektor DO niemals Licht empfängt. Die (wie erwartet falsche) Vorhersage, die man aus dem Würfel-Gedanken erhält, wird zu einer richtigen, wenn man die Wahrscheinlichkeits-Pfadregeln umdeutet. Diese Pfadregeln fordern Multiplikation längs eines Pfades zu einem Ereignis und Addition bei Vorliegen mehrerer Pfade zum gleichen Ereignis.

Auch Zeiger kann man multiplizieren, wobei die Multiplikation folgenden Regeln unterliegt:

- **R6:** Man schreibt jedem aufeinander folgenden Abschnitt längs eines Pfades im Interferometer unabhängig voneinander einen Zeiger zu, der am Beginn in der Ausgangsstellung („3 Uhr") startet und entsprechend der Länge des Abschnitts gedreht wird.
- **R7:** Die Phasenverschiebung durch Reflexion gemäß **R4–5** wird dem auf einen Spiegel folgenden Abschnitt zugeordnet. Die Wahrscheinlichkeit für Reflexion bzw. Transmission wird ggf. durch eine entsprechende Verkürzung des Zeigers (p = 0,5 ≙ Verkürzung auf $\sqrt{0{,}5} \cdot$ *Ausgangslänge*) dargestellt. Die Wurzel muss eingeführt werden, weil die Nachweiswahrscheinlichkeit das Quadrat der Zeigerlänge darstellt.
- **R8:** Multiplizieren zweier Zeiger bedeutet „Drehungen addieren" sowie „Längen multiplizieren": Man muss den ersten Zeiger um so viel weiter drehen, wie der zweite angibt. Die erste Regel ist im Unterricht unbedingt erforderlich, wenn man die hier beschriebene Erweiterung mitgehen möchte. Auf die Beachtung der Multiplikation der Amplituden kann man meist ohne Verlust an Klarheit verzichten. [1)]

Das Ergebnis der Modellierung zeigt in Übereinstimmung mit den Überlegungen zu **Abbildung 4**, dass die Nachweiswahrscheinlichkeit am oberen Detektor DO stets Null ist, am rechten (DR) aber stets 1 (vgl. **Abb. 7**). Das Verfahren funktioniert also zuverlässig.

Gleichzeitig kann man damit eine tragfähige Synthese zwischen Wahrscheinlichkeits-Bild und Zeiger-Bild gewinnen: Mit Zeigern („Wahrscheinlichkeits-Amplituden") zu rechnen, bedeutet eine der Quantenphysik angepasste Anwendung bekannter Regeln über Wahrscheinlichkeiten.

Erfahrungen

In meinem Unterricht hat sich die Pfadmethode einschließlich der Zeigermultiplikation inzwischen in drei Durchgängen bewährt – mit Zeigern arbeiten wir schon deutlich länger als ein Jahrzehnt. Die Erweiterung um die Pfadmultiplikation trägt zum Nachdenken über Physik bei, vertieft die stochastische Deutung der Interferenzmuster und ist ein geeignetes Mittel, um naiven Dualismus zu vermeiden.

Anmerkung

1) Zeiger sind komplexwertige Exponentialfunktionen. Darum bedeutet deren Multiplikation die Addition der Exponenten („weiter drehen") und die Multiplikation der reellen Amplituden.

Literatur

[1] Barth, M. (Hrsg.): Schwingungen und Wellen. NiU Physik 22 (2011), Nr. 125.
[2] Pade, J.; Polley, L.: Phasenverschiebung am Strahlteiler. In: PhyDid 3 (2004), Nr. 1, S. 39f.
[3] Rode, M.: Geogebra. Oberstufenphysik – Schwingungen und Wellen. 2016. – *https://www.geogebra.org/m/t2y8FjNk* [21.04.2017].