Vorkurs: Logik für die Informatik

Wintersemester 2025/2026

Thomas Zeume

Umfrage und Live-Fragen

partici.fi/69820001

Logik in der Informatik: Formale Verifikation

iPhone 4

- Aus einer Pressemeldung von 2013 [heise.de]

- Um auf die Kontaktliste eines gesperrten iPhones zuzugreifen, konnte man
  - es einschalten,
  - den „Entsperren"-Slider nach rechts ziehen,
  - auf „Notruf" tippen,
  - auf den Ausschalt-Knopf drücken, bis die Ausschalt-Option angezeigt wird,
  - „Abbrechen" klicken,
  - eine Notrufnummer wählen, verbinden und sofort wieder auflegen,
  - das Gerät aus- und einschalten,
  - den „Entsperren"-Slider ziehen,
  - den Ausschaltknopf gedrückt halten,
  - kurz bevor die Ausschalt-Option angezeigt wird, auf „Notruf" drücken

Oh nein!

- Die Kontakte öffneten sich und blieben geöffnet, solange der Ausschaltknopf gedrückt bleibt

Logik in der Informatik: Formale Verifikation

Frage

Wie lässt sich überprüfen, ob ein System eine Eigenschaft hat?

- Klassische Methode zum Finden von Bugs:

  Testen! Testen! Testen!

- **Problem:** in der Regel zu viele mögliche Eingaben, um alle zu testen

- **Besser: Formale Verifikation**
  - Formale Korrektheitsbeweise für Soft- und Hardware
  - Möglichst: Automatisiert

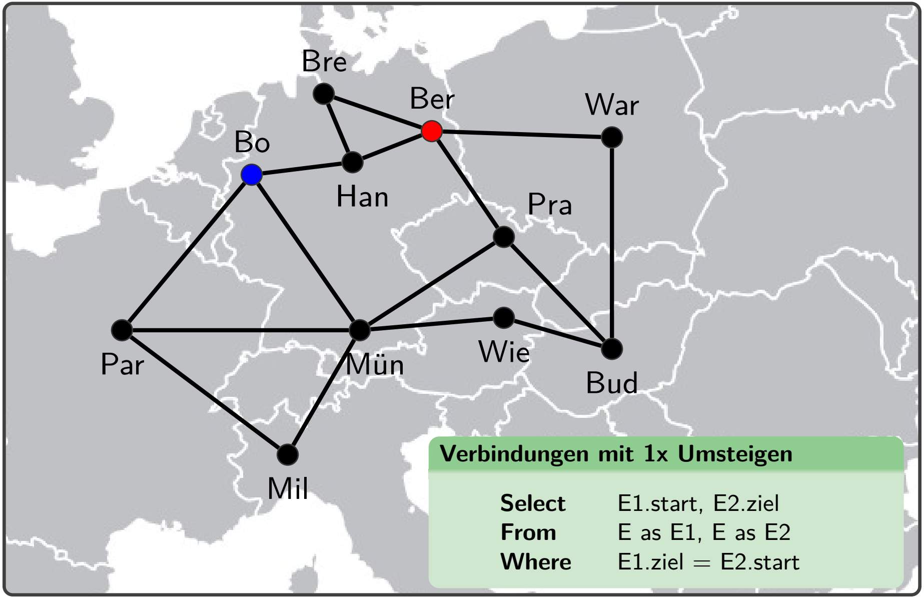
- Grundlegendes algorithmisches Problem:
  - **Gegeben:** Ein System S und eine Eigenschaft E
  - **Frage:** Wie lässt sich automatisch überprüfen, ob S die Eigenschaft E hat?

- **Grundidee:**
  - Formalisiere die Eigenschaft durch eine logische Formel φ
  - Modelliere das System durch ein formales Modell M
  - Überprüfe, ob das formale Modell M die Formel φ erfüllt

- Passende Logik:

  Temporallogik

Logik in der Informatik: Datenbanken

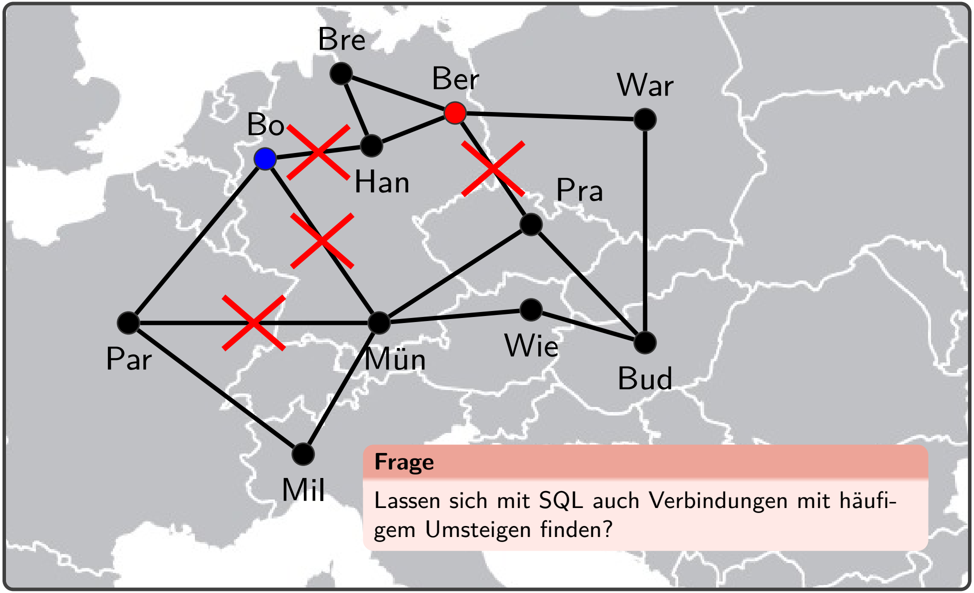


Verbindungen mit 1x Umsteigen

Select	E1.start, E2.ziel
From	E as E1, E as E2
Where	E1.ziel = E2.start

Streik!

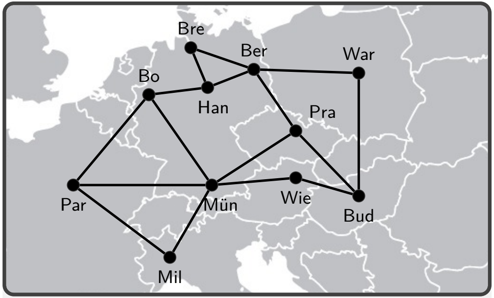
Logik in der Informatik: Datenbanken



Frage

Lassen sich mit SQL auch Verbindungen mit häufigem Umsteigen finden?

Logik in der Informatik: Datenbanken



Erreichbarkeitsanfrage

Gegeben: Ein Graph $G = (V, E)$

Gesucht: Alle Paare $(x, y) \in V \times V$, sodass es einen Weg von x nach y in G gibt

Frage

Lässt sich die Erreichbarkeitsanfrage in (Kern-)SQL ausdrücken?

- **Kern-SQL:** Kein Grouping, keine Aggregation, keine Rekursion

- **Idee:** Beantwortung der Frage mit **logischen Methoden**

Fragestellung

↓

Übersetzung in logische Fragestellung

↓

Lösung mit Methoden der Logik

↓

Rückübertragung der Lösung

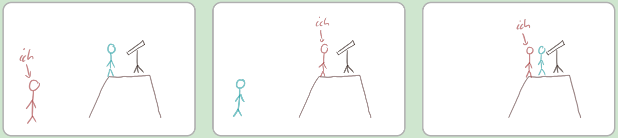
- Passende Logik:

  Prädikatenlogik (kurz: FO)

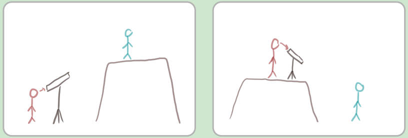
Gründe für Formale Logik: Präzision

Beispiel: Mehrdeutigkeit der Umgangsprache

- „Ich sah den Mann auf dem Berg mit dem Teleskop“
- Es gibt mindestens folgende Interpretationen dieses Satzes:
  - „. . . Berg mit dem Teleskop“:



  - „Ich sah. . . mit dem Teleskop“:



✎ Idee zu diesen drei Folien: Foliensatz von Prof. Kastens, Paderborn

Gründe für formale Logik: Struktur von Zusammenhängen

Eine schlüssige Überlegung

- Wenn der Zug zu spät kommt und keine Taxis am Bahnhof sind, kommt Jane zu spät zu ihrem Termin

- Der Zug ist zu spät
- Aber Jane ist pünktlich

⇒ Also sind Taxis am Bahnhof

Noch eine schlüssige Überlegung

- Falls es regnet und John seinen Schirm nicht dabei hat, wird er nass

- Es regnet
- Aber John wird nicht nass

⇒ Also hat er seinen Schirm dabei

☞ Beispiele aus [HR]

- Die beiden Beispiele sind sehr ähnlich

- In beiden Fällen haben wir es mit 3 elementaren Aussagen zu tun:

(1)	Der Zug ist zu spät	Es regnet
(2)	Es sind Taxis am Bahnhof	John hat seinen Schirm dabei
(3)	Jane kommt zu spät	John wird nass

- Die Struktur der Argumentation ist jeweils gleich:
  - Falls (1) gilt und (2) nicht gilt, so gilt (3)
  - (1) gilt
  - (3) gilt nicht

  ⇒ Also gilt (2)

- **Beobachtung:**
  - Die Argumentation ist unabhängig vom Inhalt der Aussagen (1) – (3)
  - Es kommt nur auf den logischen Zusammenhang zwischen den Aussagen an

Gründe für formale Logik: Problemlösen

Eine typische Logelei

- **Anna:** „Jan oder ich werden zur Party gehen“
- **Jan:** „Entweder Patrick oder ich werden zur Party gehen“
- **Patrick:** „Entweder Anna oder ich werden zuhause bleiben“

  $\Rightarrow$ D.h. Anna bleibt genau dann zuhause, wenn ich nicht zuhause bleibe.

- Wer geht zur Party?

- Wir kürzen ab:
  - A steht für „Anna wird zur Party gehen“
  - P steht für „Patrick wird zur Party gehen“
  - J steht für „Jan wird zur Party gehen“

- Es ergibt sich die Formel:

$$(J \vee A) \wedge (P \leftrightarrow \neg J) \wedge (\neg A \leftrightarrow \neg\neg P)$$

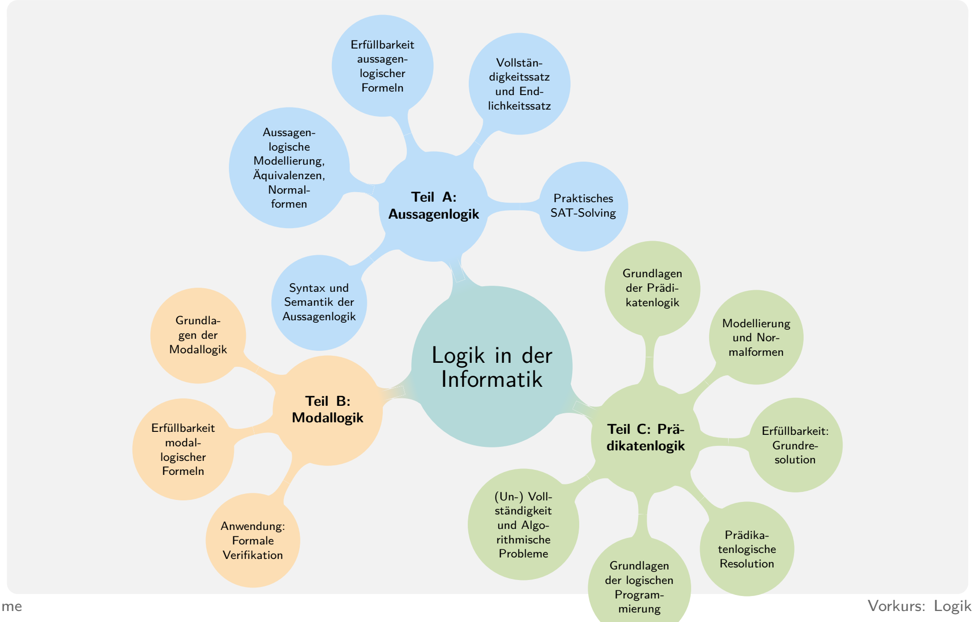
- Durchgehen aller Wahrheitsbelegungen: Nur **eine** Wahrheitsbelegung macht die Formel wahr:

$$P \mapsto \texttt{falsch}$$
$$J \mapsto \texttt{wahr}$$
$$A \mapsto \texttt{wahr}$$

- Das bedeutet: Wenn alle drei die Wahrheit gesagt haben, werden Jan und Anna zur Party gehen, und Patrick zuhause bleiben

- **Beobachtung:** Die logische Formalisierung erlaubt die Anwendung systematischer Methoden zur Lösung von Problemen

Logik in der Informatik: Vorlesungsüberblick



Inhalt

Syntax und Semantik der Aussagenlogik

Aussagen und Aussagenvariablen

- Aussagenlogik ist die **Logik der Aussagen**
- **Was ist eine Aussage?**

- **Beispiele für Aussagen:**
  - Der Zug ist pünktlich.
  - Alle Marsianer lieben Pizza.
  - Der BVB wird Champions League Sieger der Saison 2025/2026.
  - Der VFL steigt auf.
  - Jede gerade Zahl, die größer als 2 ist, ist die Summe zweier Primzahlen.

- **Keine Aussagen sind:**
  - Geben Sie mir mal das Salz, bitte?
  - Alles Gute!
  - Möge das bessere Team gewinnen!

- Was unterscheidet Aussagen von anderen Sätzen?
  - ➡ Aussagen können wahr oder falsch sein

- Gemäß dieser Erkenntnis wählen wir unsere **Abstraktion** von Aussagen:

  etwas, das wahr oder falsch sein kann

- Statt sprachlicher Aussagen verwenden wir **Variablen**, die die Werte **wahr** oder **falsch** annehmen können
- Solche Variablen nennen wir dann **Aussagevariablen**

Aussagenlogik: Syntax

- Wir verwenden **aussagenlogische Variablen**
  - $A, B, C, \ldots$
  - A_i, für alle $i \in \mathbb{N}$ ☞ und weitere, wenn nötig
- **AV** bezeichne die Menge aller aussagenlogischen Variablen

Definition: Syntax aussagenlogischer Formeln

- Die Menge **AL** der **aussagenlogischen Formeln** ist die kleinste Menge, die die folgenden Eigenschaften hat:

(1) $\top$ und $\bot$ sind in AL (**wahr** und **falsch**)

(2) Jede Variable aus AV ist in AL

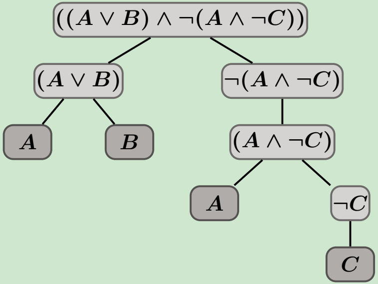
(3) Sind φ_1 und φ_2 in AL, so auch

- $\neg\varphi_1$, (**Negation**)
- $(\varphi_1 \wedge \varphi_2)$, (**Konjunktion**)
- $(\varphi_1 \vee \varphi_2)$, (**Disjunktion**)

- Formeln der Typen (1) und (2) nennen wir **atomar**

Beispiel

- $((A \vee B) \wedge \neg(A \wedge \neg C))$ ist eine aussagenlogische Formel, denn



- Keine aussagenlogischen Formeln:
  - $A \wedge \neg B)$
  - $A \wedge B \vee C$

Aussagenlogik: Semantik (1/3)

- Bisher haben wir nur definiert, wie aussagenlogische Formeln aussehen:

  Syntax aussagenlogischer Formeln
- Jetzt definieren wir, was sie bedeuten:

  Semantik aussagenlogischer Formeln

- Was soll beispielsweise die Bedeutung der Formel

$$\varphi = ((A \vee B) \wedge \neg(A \wedge \neg C))$$

  sein?

- **Ansatz:** Wenn jeder vorkommenden Variable ein Wahrheitswert zugewiesen ist, dann kann auch einer aussagenlogischen Formel ihr Wahrheitswert zugewiesen werden

Definition: Wahrheitsbelegung

- Eine **Wahrheitsbelegung** ist eine partielle Funktion $\alpha : \mathrm{AV} \rightharpoonup \{0, 1\}$
- Eine Belegung α heißt **passend** für eine Formel φ, wenn $\alpha(X)$ für alle in φ vorkommenden Variablen X definiert ist

- Partielle Funktion: Nicht jeder Variablen aus AV muss ein Wert zugewiesen werden

- Aussprache der griechischen Buchstaben:
  - φ, Φ: „Phi“
  - ψ, Ψ: „Psi“
  - χ: „Chi“
  - α: „Alpha“
  - β: „Beta“

Aussagenlogik: Semantik (2/3)

- Die Semantik von φ ordnet jeder passenden Belegung α einen Wahrheitswert $[\![\varphi]\!]_\alpha$ zu

Definition: Semantik aussagenlogischer Formeln

- Sei $\varphi \in \mathrm{AL}$ und α eine zu φ passende Belegung
- Wir definieren $\underline{[\![\varphi]\!]_\alpha}$ induktiv nach der Struktur von φ:

- $[\![\bot]\!]_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{0}$, $[\![\top]\!]_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{1}$
- $[\![X]\!]_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \alpha(X)$ für Variablen $X \in \mathrm{AV}$

- $[\![\neg\varphi_1]\!]_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \mathbf{1} & \text{falls } [\![\varphi_1]\!]_\alpha = \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \text{falls } [\![\varphi_1]\!]_\alpha = \mathbf{1} \end{cases}$

- $[\![(\varphi_1 \wedge \varphi_2)]\!]_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \mathbf{1} & \text{falls } [\![\varphi_1]\!]_\alpha = \mathbf{1} \text{ und } [\![\varphi_2]\!]_\alpha = \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \text{andernfalls} \end{cases}$
- $[\![(\varphi_1 \vee \varphi_2)]\!]_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} \mathbf{1} & \text{falls } [\![\varphi_1]\!]_\alpha = \mathbf{1} \text{ oder } [\![\varphi_2]\!]_\alpha = \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \text{andernfalls} \end{cases}$

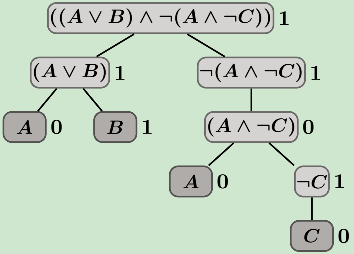
- α **erfüllt** φ, falls $[\![\varphi]\!]_\alpha = \mathbf{1}$ ☞ Schreibweise: $\underline{\alpha \models \varphi}$

Aussagenlogik: Semantik (3/3)

Beispiel

- Sei φ die Formel $((A \lor B) \land \neg(A \land \neg C))$
- Sei die Belegung α wie folgt gegeben:
  - $\alpha(A) = 0$
  - $\alpha(B) = 1$
  - $\alpha(C) = 0$

- Induktive Auswertung von φ für α:



- In formaler Notation:
  - $[\![B]\!]_\alpha = 1$
  - $[\![A]\!]_\alpha = [\![C]\!]_\alpha = 0$
  - $[\![\neg C]\!]_\alpha = 1$
  - $[\![(A \lor B)]\!]_\alpha = 1$
  - $[\![(A \land \neg C)]\!]_\alpha = 0$
  - $[\![\neg(A \land \neg C)]\!]_\alpha = 1$
  - $[\![((A \lor B) \land \neg(A \land \neg C))]\!]_\alpha = 1$

- Also: $\alpha \models ((A \lor B) \land \neg(A \land \neg C))$

Wahrheitstabellen am Beispiel

Beispiel

- Sei φ wieder die Formel $((A \lor B) \land \neg(A \land \neg C))$

- Dann ist die Semantik von φ durch die folgende Wahrheitstabelle gegeben:

$\alpha(A)$	$\alpha(B)$	$\alpha(C)$	$[\![\varphi]\!]_\alpha$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

- Jede Zeile der Wahrheitstabelle entspricht also genau einer Belegung α der Variablen von φ

✎ Künftig werden wir in Tabellenköpfen oft statt „$\alpha(X)$“ und „$[\![\varphi]\!]_\alpha$“ nur „X“ und „φ“ schreiben

Von natürlicher Sprache zu Formeln

Modellierung mit Aussagenlogik: Erstes Beispiel

Beispiel [Grohe, RWTH Aachen]

- „Das Fluchtauto war rot oder grün und hatte weder vorne noch hinten ein Nummernschild“
- Elementare Aussagen:
  - R: Das Fluchtauto war rot
  - G: Das Fluchtauto war grün
  - V: Das Fluchtauto hatte vorne ein Nummernschild
  - H: Das Fluchtauto hatte hinten ein Nummernschild
- Gesamtaussage:

$$(R \vee G) \wedge (\neg V \wedge \neg H)$$

Rezept: Modellierung mit aussagenlogischen Formeln

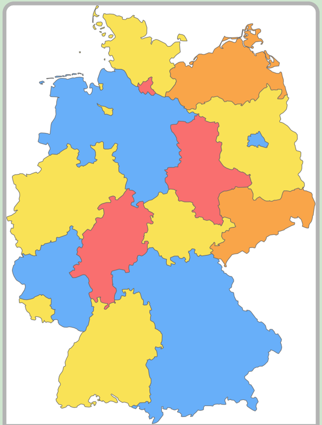
(1) Bestimmen der benötigten aussagenlogischen Variablen und ihrer intendierten Bedeutung

(2) Aufstellen der aussagenlogischen Formel

✎ Wählt “sprechende” Namen für die Variablen!

Modellierung mit Aussagenlogik: Zweites Beispiel (1/3)

Landkartenfärbung



- **Landkartenfärbung**: Die Bundesländer Deutschlands lassen sich mit vier Farben so färben, dass benachbarte Länder verschiedene Farben haben
  - ➡ Wir sagen: Es gibt eine **zulässige** 4-Färbung
- **Frage:** Gibt es auch eine zulässige 3-Färbung?

- **Lösungsansatz 1:** Probieren + Denken
  - ➡ Ansatz ist fehleranfällig, langsam

- **Lösungsansatz 2:** Aussagenlogik

(1) Konstruiere eine Formel φ sodass

$$\varphi \text{ hat eine erfüllende Belegung}$$
$$\Leftrightarrow \text{ es gibt eine zulässige } 3\text{-Färbung der Karte}$$

➡ Erfüllende Belegungen sollen zulässigen 3-Färbungen entsprechen

(2) Überprüfe, ob φ eine erfüllende Belegung hat

➡ Ansatz leicht auf andere Karten übertragbar

- **Hier:** Lösungsansatz 2

Modellierung mit Aussagenlogik: Zweites Beispiel (2/3)

- Unsere Farben:

  rot, blau und gelb

- Aussagenlogische Variablen: eine für jedes Bundesland und jede Farbe
  - R_{NRW} steht für „NRW hat die Farbe rot"
  - B_{NRW} steht für „NRW hat die Farbe blau"
  - Y_{NRW} steht für „NRW hat die Farbe gelb"
  - usw.

- Unsere Formel muss sicherstellen:
  1. Jedes Bundesland wird mit genau einer Farbe gefärbt
  2. Zwei benachbarte Bundesländer werden nicht gleich gefärbt

- Jedes Bundesland, wie bspw. NRW, hat genau eine Farbe:
  - NRW wird mit mindestens einer Farbe gefärbt:

    $$\varphi^{\geq 1}_{\text{NRW}} \stackrel{\text{def}}{=} Y_{\text{NRW}} \vee R_{\text{NRW}} \vee B_{\text{NRW}}$$

  - NRW wird mit höchstens einer Farbe gefärbt:

    $$\begin{aligned}\varphi^{\leq 1}_{\text{NRW}} \stackrel{\text{def}}{=} \quad & \neg(Y_{\text{NRW}} \wedge R_{\text{NRW}}) \\ & \wedge \neg(B_{\text{NRW}} \wedge R_{\text{NRW}}) \\ & \wedge \neg(B_{\text{NRW}} \wedge Y_{\text{NRW}})\end{aligned}$$

  - NRW hat genau eine Farbe:

    $$\varphi^{=1}_{\text{NRW}} \stackrel{\text{def}}{=} \varphi^{\geq 1}_{\text{NRW}} \wedge \varphi^{\leq 1}_{\text{NRW}}$$

- Benachbarte Länder wie NRW und Hessen haben nicht dieselbe Farbe:

  $$\begin{aligned}\varphi^{\neq}_{\text{NRW,HS}} \stackrel{\text{def}}{=} \quad & \neg(Y_{\text{NRW}} \wedge Y_{\text{HS}}) \\ & \wedge \neg(R_{\text{NRW}} \wedge R_{\text{HS}}) \\ & \wedge \neg(B_{\text{NRW}} \wedge B_{\text{HS}})\end{aligned}$$

Modellierung mit Aussagenlogik: Zweites Beispiel (3/3)

- Insgesamt erhalten wir die Formel:

$$\begin{aligned}\varphi \overset{\text{def}}{=} \quad & \varphi^{=1}_{\mathrm{NRW}} \land \varphi^{=1}_{\mathrm{BW}} \land \varphi^{=1}_{\mathrm{BY}} \land \varphi^{=1}_{\mathrm{RP}} \land \varphi^{=1}_{\mathrm{SR}} \land \varphi^{=1}_{\mathrm{HS}} \land \varphi^{=1}_{\mathrm{TH}} \land \varphi^{=1}_{\mathrm{SX}} \\ & \land \varphi^{=1}_{\mathrm{NI}} \land \varphi^{=1}_{\mathrm{SA}} \land \varphi^{=1}_{\mathrm{BR}} \land \varphi^{=1}_{\mathrm{B}} \land \varphi^{=1}_{\mathrm{HH}} \land \varphi^{=1}_{\mathrm{HB}} \land \varphi^{=1}_{\mathrm{MV}} \land \varphi^{=1}_{\mathrm{SH}} \\ & \land \varphi^{\neq}_{\mathrm{NRW,HS}} \land \varphi^{\neq}_{\mathrm{BW,BY}} \land \varphi^{\neq}_{\mathrm{BW,RL}} \land \varphi^{\neq}_{\mathrm{BW,HS}} \land \varphi^{\neq}_{\mathrm{BY,HS}} \land \varphi^{\neq}_{\mathrm{BY,TH}} \\ & \land \varphi^{\neq}_{\mathrm{BY,SX}} \land \varphi^{\neq}_{\mathrm{SR,RL}} \land \varphi^{\neq}_{\mathrm{RL,HS}} \land \varphi^{\neq}_{\mathrm{RL,NRW}} \land \varphi^{\neq}_{\mathrm{HS,TH}} \land \varphi^{\neq}_{\mathrm{HS,NI}} \\ & \land \varphi^{\neq}_{\mathrm{TH,SX}} \land \varphi^{\neq}_{\mathrm{TH,SA}} \land \varphi^{\neq}_{\mathrm{TH,NI}} \land \varphi^{\neq}_{\mathrm{SX,BR}} \land \varphi^{\neq}_{\mathrm{SX,SA}} \land \varphi^{\neq}_{\mathrm{NRW,NI}} \\ & \land \varphi^{\neq}_{\mathrm{NI,SH}} \land \varphi^{\neq}_{\mathrm{NI,HB}} \land \varphi^{\neq}_{\mathrm{NI,HH}} \land \varphi^{\neq}_{\mathrm{NI,MV}} \land \varphi^{\neq}_{\mathrm{NI,SA}} \land \varphi^{\neq}_{\mathrm{NI,BR}} \\ & \land \varphi^{\neq}_{\mathrm{SA,BR}} \land \varphi^{\neq}_{\mathrm{BR,MV}} \land \varphi^{\neq}_{\mathrm{BR,B}} \land \varphi^{\neq}_{\mathrm{SH,HH}} \land \varphi^{\neq}_{\mathrm{SH,MV}}\end{aligned}$$

- Dies ist eine Abkürzung für eine Konjunktion von über 150 Teilformeln

- **Es gilt:** Die Deutschland-Karte hat eine zulässige 3-Färbung
  $\Leftrightarrow$ Es gibt eine Wahrheitsbelegung, die φ wahr macht

- **Frage:** Wie lässt sich herausfinden, ob diese Formel (un-)erfüllbar ist?

- **Naïv:** Wahrheitstabelle mit $2^{3\cdot 16}$ Zeilen
- **Besser: Veranstaltung "Logik für die Informatik"**

Zusammenfassung

- **In diesem Vorlesungskapitel haben wir gesehen:**
  - Gründe für die Formalisierung mit Logiken
  - Syntax und Semantik der Aussagenlogik
  - Wahrheitstabellen
  - Modellierung mit Aussagenlogik

- Dieser Foliensatz basiert auf Vorlesungsfolien von **Thomas Schwentick** und **Thomas Zeume**

Literaturhinweise

Lehrbücher

- M. Kreuzer and S. Kühling. *Logik für Informatiker.* Pearson, 2006 (Kapitel 2)
- Uwe Schöning. *Logik für Informatiker.* Spektrum Akademischer Verlag, 5. a. edition, 2000 (Kapitel 1.1)