Handreichung und Übersicht zu den Materialien des Projekts „diAM:INT“

Stand 2. Januar 2025

Im Rahmen des Projekts *diAM:INT (digitale Anwendungsaufgaben zur Mathematik in Informatik, Naturwissenschaften und Technik)* wurden anwendungsorientierte Online-Übungseinheiten zu mathematischen Grundlagen für MINT-Studiengänge unter einer CC BY-SA 4.0 Lizenz als Open Educational Resources über ORCA.nrw veröffentlicht.
Dazu gehören Online-Rechen- und Verständnisaufgaben des Fragetyps STACK und Programmieraufgaben (Jupyter-Notebooks) in der Sprache Python, die die Studierenden zum eigenständigen Explorieren und Visualisieren mathematischer Sachverhalte befähigen, und mit deren Hilfe komplexere Anwendungsaufgaben in einem realistischen Setting bearbeitet werden können. Alle Materialien werden am Lernzyklus Explorieren – Trainieren – Anwenden ausgerichtet, um handlungs- und anwendungsorientierte Mathematiklehre studiengangs- und hochschulübergreifend zu unterstützen.
Die Materialien sind als ein Online-Kurs des Learning Management Systems Moodle veröffentlicht. Dieser Online-Kurs stellt die Materialien nach inhaltlichen Schwerpunkten (Teilgebiet – Themenbereich – Konzept/Methode) strukturiert dar. Die Programmieraufgaben (Jupyter-Notebooks) jedes Themenbereichs sind über JupyterLite direkt im Browser (ohne zusätzliche Software) einsehbar und können dort getestet werden. Die Online-Rechen- und Verständnisaufgaben sind den jeweiligen Konzepten/Methoden der Themenbereiche zugeordnet und dort in Tests organisiert. Die einzelnen Online-Rechen- und Verständnisaufgaben sind in der Fragensammlung des Online-Kurs abgelegt und nach dem analogem Schema in Kategorien (Teilgebiet – Themenbereich – Konzept/Methode) eingeteilt.
Dieses Dokument enthält eine Übersicht der im Rahmen des Projekts veröffentlichten Materialien sowie Informationen zu ihrer Verwendung in Lehrveranstaltungen und zu ihrer Weiterentwicklung. Die inhaltliche Struktur dieses Dokumentes folgt der Struktur des Online-Kurses, in dem die Materialien veröffentlicht sind. Diese Hinweise sind nach Materialtypen aufgeteilt.

Verantwortlich für das Projekt und Urheber:innen der Materialien Prof. Dr. Laura Anderle, Hakim Günther, Tim Inoue, Sebastian Friedrich, Zafer Bayram (Westfälische Hochschule Gelsenkirchen, Bocholt, Recklinghausen, WH); Prof. Dr. Volker Meden, Dr. Michael Kubocz, Kai Adamowicz (Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen, RWTH); Dr. Jörg Härterich, Dr. Michael Kallweit, Dr. Benjamin Schulz-Rosenberger, Emma van der Smagt (Ruhr-Universität Bochum, RUB);

Rechen- und Verständnisaufgaben (STACK)

Die Rechen- und Verständnisaufgaben wurden mit dem freien Fragetyp STACK entwickelt. Durch die Verknüpfung von STACK mit dem Computer-Algebra-System Maxima können mathematische Ausdrücke eingegeben, ausgewertet und auf mathematische Eigenschaften hin überprüft werden. Studierende erhalten auf ihre Antworten individuell angepasstes Feedback sowie Zugang zu ausführlichen Musterlösungen. Viele Aufgaben sind zudem randomisiert, sodass sie mit unterschiedlichen Zahlenwerten oder mit verschiedenen Funktionstermen beliebig oft bearbeitet werden können. Weitere Informationen zu STACK finden Sie unter `https://stack-assessment.org/`.
Dieses Dokument umfasst eine Übersicht aller im Rahmen des Projekts veröffentlichten Rechen- und Verständnisaufgaben. Die Aufgaben sind in vier Ebenen inhaltlich gegliedert (Teilgebiet – Themenbereich – Konzept/Methode – Aufgabe). Jedem Themenbereich ist ein partielles Inhaltsverzeichnis vorangestellt, dass die Aufgaben des jeweiligen Themenbereichs abbildet. Jede Aufgabe wird durch einen individuellen Titel, einen Screenshot, eine Beschreibung des Themas, der Benennung der zur Bearbeitung erforderlichen Vorkenntnisse, Angaben zu Randomisierung und Anpassung, sowie etwaigen Sonderoptionen erschlossen. Aufgaben die strukturell identisch sind oder aufeinander aufbauen sind durchnummeriert:

- Eine Nummerierung nach (1), (2), usw. bedeutet, dass die Aufgaben strukturell identisch sind, jedoch unterschiedliche Beispiele verwenden.
- Die Nummerierung (1/3), (2/3), usw. weist darauf hin, dass die Aufgaben Teil einer Reihe aufeinander aufbauender Aufgaben sind.

Hier ist zu bemerken, dass alle Aufgaben, auch Aufgaben, die aufeinander aufbauen, so gestaltet sind, dass sie unabhängig voneinander bearbeitet werden können. Insbesondere enthält keine Aufgabe Verweise auf andere Aufgaben.

Technische Voraussetzungen und obligatorische Einstellungen

Damit Sie die Rechen- und Verständnisaufgaben des Projekts nutzen können, müssen bestimmte technische Voraussetzungen erfüllt sein. Bitte klären Sie mit Ihrem Administrationsteam, ob diese an Ihrem Standort gegeben sind. Falls die Voraussetzungen noch nicht erfüllt sind, informieren Sie Ihr Administrationsteam, damit die notwendigen Anpassungen vorgenommen werden können. Es ist besonders wichtig zu beachten, dass ausschließlich freie und kostenlose Software installiert werden muss und nur wenige Einstellungen vorgenommen werden müssen.

- **Fragetyp STACK** Zur Verwendung der Rechen- und Verständnisaufgaben ist der Fragetyp STACK erforderlich. Dieser ist als Plugin für die Learning Management Systeme Moodle verfügbar. Die Aufgaben des Projekts wurden mit der STACK-Version 4.4.2 in Moodle getestet.
- **Maxima-Pakete** Alle Rechen- und Verständnisaufgaben des Projekts verwenden Maxima-Funktionen aus den Paketen distrib und descriptive. Diese müssen ggf. vom Administrationsteam Ihres Learning Management Systems installiert und in den Einstellungen des STACK-Plugins hinterlegt werden.
- **Javascript** Da in einem Teil der Aufgaben des Projekts JavaScript-Code eingebettet ist, muss in Ihrem Learning Management System die Verwendung von JavaScript erlaubt sein.

Hinweise zum Einsatz der Aufgaben

Bitte beachten Sie die folgenden Aspekte, wenn Sie die Aufgaben des Projekts in Ihrem Kurs einsetzen.

Informationen für Studierende

Um Verwirrung und Frustration bei den Studierenden zu verhindern, empfehlen wir, Studierende über folgende Aspekte zu informieren.

Empfohlene Geräte Alle Rechen- und Verständnisaufgaben des Projekts können grundsätzlich mit Smartphones und Tablets genutzt werden. Dennoch empfehlen wir die Nutzung von Desktop oder Laptop Computern.

Hilfen bei der Eingabe mathematischer Ausdrücke

Da die Eingabe mancher mathematischer Ausdrücke in STACK-Aufgaben nicht intuitiv ist, wurden viele Aufgaben um Hinweise zur Syntax der erwarteten Eingabe ergänzt.

Punkte und Bewertung

In diesem Projekt sind der Aufgabenwert eines jeden Rückmeldebaums aller Aufgaben (Gewichtung des jeweiligen Aufgabenteils) und die erreichbaren Punkte aller Aufgaben auf 1 festgesetzt. Die durch die Überprüfung in Rückmeldebäumen vergeben Scores sind Vielfache von 0.1 zwischen 0 und 1.
Für einen besseren Überblick gehen wir kurz auf die genannten Begriffe im Kontext der automatisierter Bewertung ein: Seien $B_1, ..., B_n$ die in einer Frage angelegten Rückmeldebaäume. Bei der Antwortüberprüfung im Rückmeldebaum B_i wird der Studierendenantwort A_i eine Zahl $S_i(A_i)$ zwischen 0 und 1 (Score) zugeordnet. Für den Rückmeldebaum B_i ist eine Gewichtung w_i (Aufgabenwert) festgelegt. In diesem Projekt ist der Aufgabenwert eines jeden Rückmeldebaums als 1 gewählt. Der Studierendenantwort $A = (A_1, \ldots, A_n)$ für die gesamte Aufgabe wird das gewichtete Mittel (Finaler Score)

$$S(A) = \frac{\sum_{i\in 1,\ldots,n} w_i S_i(A_i)}{\sum_{i\in 1,\ldots,n} w_i}$$

(unter Vernachlässigung von Abzügen) zugeordnet. Der Finale Score ist ebenfalls eine Zahl zwischen 0 und 1. Anschließend wird der Studierendenantwort A die Anzahl der erreichten Punkte

$$P(A) = P_{\max} S(A)$$

zugeordnet. Dabei ist $P_{\max}$ ist die maximal Anzahl der in der Aufgabe erreichbaren Punkte (erreichbare Punkte). In diesem Projekt sind die erreichbaren Punkte einer jeden Aufgabe auf 1 festgesetzt.
Bei dem Einsatz einer Rechen- und Verständnisaufgabe als Frage in einem Test, werden die in der Frage hinterlegten erreichbaren Punkte als Standardeinstellung für die Frage im Test übernommen. Sie können die erreichbaren Punkte der Frage in dem Test individuell wählen. Dies hat keinen Einfluss auf die erreichbaren Punkte als Einstellung der Rechen- und Verständnisaufgabe.

Hinweise zur Weiterentwicklung der Aufgaben

Bitte beachten Sie die folgenden Aspekte, wenn Sie die Aufgaben des Projekts bearbeiten oder weiterentwickeln.

Empfohlener Texteditor

Für die Bearbeitung und Weiterentwicklung der Rechen- und Verständnisaufgaben empfehlen wir dringend, den Moodle-Texteditor *Einfacher Text* (englisch: *Plain text area*), da in einem Teil der

Aufgaben des Projekts JavaScript-Code (JavaScript-Bibliothek JSXGraph) eingebettet ist. Die in Moodle vorinstallierten WYSIWYG-Editoren („Atto“ und „TinyMCE“) sind dafür (Stand 2. Januar 2025) nicht geeignet, da sie in JavaScript-Code verwendete Sonderzeichen durch entsprechende HTML-Entitäten ersetzen (z.B. `&` durch `&` oder `<` durch `<`).
Bitte beachten Sie, dass bereits das Öffnen im Bearbeitungsmodus und erneute Abspeichern einer Aufgabe in Atto- oder TinyMCE-Editor dazu führt, dass mit JavaScript-Code gestaltete Elemente von Aufgaben unbrauchbar werden. Aufgaben, deren Antwort auf mit JavaScript-Code gestalteten Elemente beruht, werden komplett unbrauchbar. Falls Sie den Moodle-Texteditor *Einfacher Text* nicht auswählen können, wenden Sie sich bitte an Ihr Administrationsteam.

Frage-Tests

Zu jeder Rechen- und Verständnisaufgaben wurden Fragetests hinterlegt, um die Funktionalität der Aufgaben zu überprüfen. In diesen Fragetests werden die erwarteten Ergebnisse für potenzielle Antworten von Studierenden (Score, Abzüge und Rückmeldungen) mit den tatsächlichen von dem System ermittelten und zurückgegeben Ergebnissen verglichen.
Wenn Sie eine Aufgabe bearbeiten oder weiterentwickeln, empfehlen wir Ihnen, abschließend mithilfe der hinterlegten Frage-Tests zu überprüfen, ob die Aufgabe wie beabsichtigt funktioniert.

Bearbeitung von interaktiven Grafiken

Die interaktiven Grafiken wurden mithilfe der freien JavaScript-Bibliothek *JSXGraph* erstellt und sind somit in reinem JavaScript-Code geschrieben. Für Veränderungen an den Grafiken muss dieser Code verändert werden. Für umfangreiche Änderungen des JavaScript-Codes empfehlen wir die Verwendung eines geeigneten Code-Editor, da keiner der in Moodle vorinstallierten Editoren die Struktur und Syntax von JavaScript-Code visuell hervorhebt. Es findet auch keine Fehlerdiagnose oder Fehlermeldung bei Syntax- oder logischen Fehlern im JavaScript-Code beim Speichern einer Aufgabe statt. Weitere Informationen und die Dokumentation zu JSXGraph finden Sie unter http://JSXGraph.uni-bayreuth.de.

Programmieraufgaben (Jupyter-Notebooks)

Für Programmieraufgaben wird das offene Dokumentenformat Jupyter-Notebook (.ipynb) verwendet. Dieses kombiniert einen ausführbaren Python-Computercode mit Beschreibungen (Einführungstexte zum Thema, mathematische und physikalische Parameter, Hilfestellungen zum Programmcode, Aufgaben etc.), Daten, Visualisierungen, Diagrammen sowie interaktiven Steuerelementen. Voraussetzung für die Nutzung ist jedoch die Installation eines aktuellen Python-Interpreters (`https://www.python.org/`.) und eines Editors wie z.B. JupyterLab auf den Rechnern der Studierenden bzw. der Software JupyterHub auf den Servern der Hochschule. Beide Umgebungen bieten eine Möglichkeit, den Zugriff und die Ausführung von Jupyter-Notebooks zu organisieren. Weitere Information zu Jupyter finden Sie hier `https://jupyter.org/`.

Technische Voraussetzungen und obligatorische Einstellungen

Zusätzlich zu der Installation von JupyterLab oder JupyterHub ist eine Installation von weiteren Python-Bibliotheken und -Paketen (minimaler Set) notwenig, um das Bearbeiten und Visualisieren von mathematischen Sachverhalten zu ermöglichen:

- **NumPy** ist eine freie Python-Bibliothek, die für das Arbeiten mit Arrays verwendet wird. Sie bietet auch Funktionen für die Anwendungsbereiche der linearen Algebra, Fourier-Transformation und Matrizen an (`https://numpy.org/`).

- **SciPy** ist eine freie Python-Bibliothek, die für wissenschaftliche und numerische Berechnungen verwendet wird. Sie enthält Module für Optimierung, lineare Algebra, Integration, Interpolation, spezielle Funktionen, FFT, Signal- und Bildverarbeitung, ODsE-Löser und weitere in der Wissenschaft und Technik üblichen Aufgaben (`https://scipy.org/`).
- **SymPy** ist eine freie Python-Bibliothek, die ähnlich wie ein Computeralgebrasystem (CAS) symbolische Berechnungen ermöglicht (`https://www.sympy.org/en/index.html`).
- **Matplotlib** ist eine freie Python-Bibliothek, die es erlaubt, mathematische Darstellungen aller Art anzufertigen. (`https://matplotlib.org/`).
- **ipywidgets** sind interaktive Widgets, welche es erlauben, dass Nutzer z.B. mit Hilfe von beweglichen Slidern, Daten verändern und die veränderten Ergebnisse instantan sehen können (`https://pypi.org/project/ipywidgets/`).

Hinweise zum Einsatz der Aufgaben

Bitte beachten Sie die folgenden Aspekte, wenn Sie die Jupyter-Notebooks des Projekts in Ihrem Kurs einsetzen.

Informationen für Dozierende

Die Jupyter-Notebooks sind, wie die STACK-Aufgaben, unterschiedlichen mathematischen Themengebieten zugeordnet. Intern erfolgt eine weitere Aufteilung in zwei Kategorien: "Selbststudium" und "Summative Bewertung". Die Notebooks aus der Kategorie "Summative Bewertung" können somit auch in summativen Tests, z.B. in wöchentlichen Übungen mit Punktevergabe, eingesetzt werden.

Punkte und Bewertung

Die Notebooks aus der Kategorie "Summative Bewertung" enthalten keine Angaben zu erreichbaren Punkten pro Notebook bzw. pro Teilaufgabe. Diese müssen durch die Dozierenden/Übungsleitung festgelegt werden. Eine automatische Bewertung von bearbeiteten Notebooks mit zusätzlicher Angabe einer Musterlösung ist nicht vorhanden. Im Falle einer Bewertung müssen die bearbeiteten Notebooks individuell durch geeignete Personen bewertet und z.B. in Tutorien mit Hilfe der Musterlösung besprochen werden.

Bearbeitung der Jupyternotebooks

Es ist zu beachten, dass für die Bearbeitung einiger Notebooks, weitere Python-Bibliotheken und -Pakete (über das minimale Set hinaus) notwendig sind. Weitere Informationen zu den einzelnen Jupyter-Notebooks finden Sie im Kapitel II.

Inhaltsverzeichnis

I Rechen- und Verständnisaufgaben (STACK)

1 Grundbegriffe

1.1 Äquivalenzumformungen von Termen, Gleichungen und Ungleichungen

Dieser Themenbereich umfasst Aufgaben zu Äquivalenzumformungen von Termen, Gleichungen und Ungleichungen. Der Schwerpunkt liegt dabei auf polynomialen Gleichungen und Ungleichungen sowie auf Betrags- und exponentiellen Ungleichungen. Physikalische Gesetze wie das Newtonsche Gravitationsgesetz, das Stefan-Boltzmann Gesetz und das Hagen-Poiseuille Gesetz werden herangezogen, um die Anwendung mathematischer Umformungen in der Physik zu demonstrieren. Dabei wird auf den Umgang mit physikalischen Einheiten, die Berücksichtigung signifikanter Stellen und die Interpretation von Abhängigkeiten physikalischer Größen eingegangen.

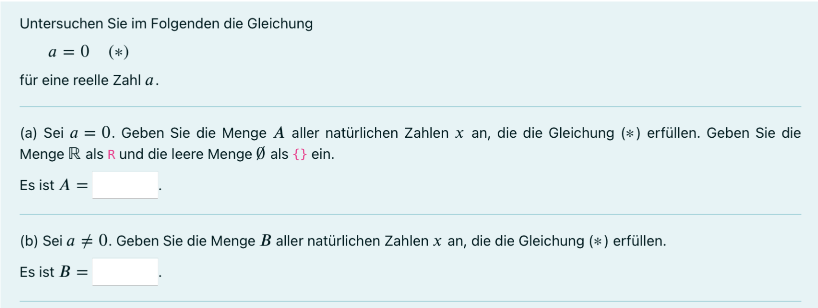
Inhaltsverzeichnis

1.1.1 Gleichungen

1.1.1.1 Polynomiale Gleichungen (1) (konstant)

Tags: Äquivalenzumformung, Umformung, Lösungsmenge

Screenshot: (Stand 29.07.2024)



Autor: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: In dieser Aufgabe soll die Menge aller reellen Zahlen x angegeben werden, die die Gleichung

$$a = 0$$

unter den Bedingungen $a = 0$ in Aufgabenteil (a) und $a \neq 0$ in Aufgabenteil (b) erfüllen.

Vorkenntnisse: Rechenregeln für reelle Zahlen, Äquivalenzumformung, Angabe von Lösungsmengen

Randomisierung: keine

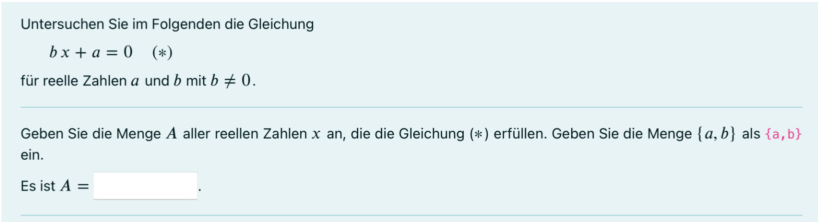
Anpassungen: keine

Verbotene Wörter: solve, find_root, algsys

Sonderoption: Feedback unterdrücken: ja

1.1.1.2 Polynomiale Gleichungen (2) (linear)

Tags	Äquivalenzumformung, Umformung, Lösungsmenge
Screenshot	(Stand 29.07.2024)

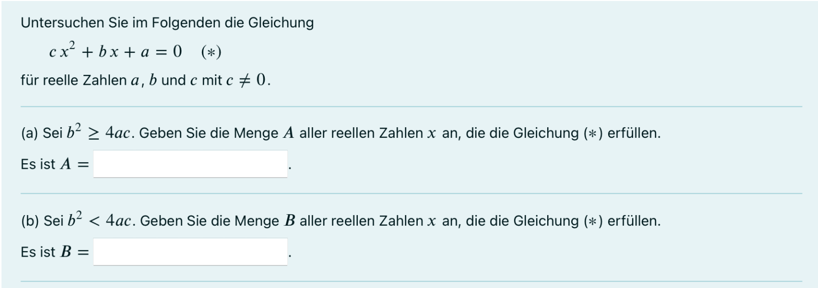


Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll die Menge aller reellen Zahlen x angegeben werden, die die Gleichung $$b\,x + a = 0$$ unter der Bedingung $b \neq 0$ erfüllen.
Vorkenntnisse	Rechenregeln für reelle Zahlen, Äquivalenzumformung, Angabe von Lösungsmengen
Randomisierung	keine
Anpassungen	keine
Verbotene Wörter	solve, find_root, algsys
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

1.1.1.3 Polynomiale Gleichungen (3) (quadratisch)

Tags: Äquivalenzumformung, Umformung, Lösungsmenge

Screenshot: (Stand 29.07.2024)



Untersuchen Sie im Folgenden die Gleichung

$c\,x^2 + b\,x + a = 0 \quad (*)$

für reelle Zahlen a, b und c mit $c \neq 0$.

(a) Sei $b^2 \geq 4ac$. Geben Sie die Menge A aller reellen Zahlen x an, die die Gleichung $(*)$ erfüllen.

Es ist $A =$.

(b) Sei $b^2 < 4ac$. Geben Sie die Menge B aller reellen Zahlen x an, die die Gleichung $(*)$ erfüllen.

Es ist $B =$.

Autor: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: In dieser Aufgabe soll die Menge aller reellen Zahlen x angegeben werden, die die Gleichung

$$c\,x^2 + b\,x + a = 0$$

unter der Bedingung $c \neq 0$ und den Bedingungen $b^2 \geq c\,a$ in Aufgabenteil (a) und $b^2 < c\,a$ in Aufgabenteil (b) erfüllen.

Vorkenntnisse: Rechenregeln für reelle Zahlen, Äquivalenzumformung, Angabe von Lösungsmengen

Randomisierung: keine

Anpassungen: keine

Verbotene Wörter: solve, find_root, algsys

Sonderoption: Feedback unterdrücken: ja

1.1.1.4 Betragsgleichung (1)

Tags	Betragsgleichung, logische Verknüpfungen.
Screenshot	(Stand 13.09.2024)

Gegeben ist die folgende Betragsgleichung

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto\left|\frac{x+a}{b-x}\right|=18 \quad \text{mit} \quad a,b>0\in\mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie alle $x\in\mathbb{R}$ gemeinsam mit den Nebenbedingungen, welche von den beiden Parametern a und b abhängen. Verwenden Sie bitte in den Nebenbedingungen, falls notwendig, die logischen Verknüpfungen `and` bzw. `or` und die Vergleichszeichen $<$ bzw. $>$.

(i) $x_1 =$ ______,

(ii) Nebenbedingung für die Lösung x_1:

______.

(iii) $x_2 =$ ______,

(iv) Nebenbedingung für die Lösung x_2:

______.

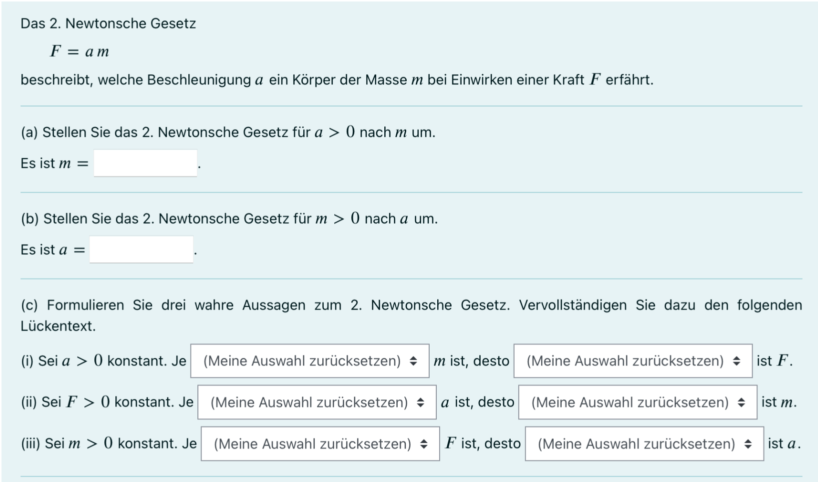
Autor	Michael Kubocz (RWTH)
Idee	Michael Kubocz
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	Eine einfache Betragsgleichung mit zwei beliebigen Parametern a und b ist gegeben. In Aufgabenteilen (i-iv) werden die zwei Lösungen und jeweils die dazugehörigen Nebenbedingungen in Abhängigkeit der beiden Parameter a und b berechnet und angegeben.
Verbotene Wörter	solve.
Vorkenntnisse	Betrag, logische Verknüpfungen, Fallunterscheidung.
Randomisierung	Die rechte Seite der Betragsgleichung wird zufällig und als ganzzahlig gewählt.
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja.

1.1.2 Physikalische Gesetze als Beispiel von Gleichungen

1.1.2.1 2. Newtonsche Gesetz (1)

Tags: Äquivalenzumformung, Umformung

Screenshot: (Stand 29.07.2024)



Autor: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: In dieser Aufgabe soll das 2. Newtonsche Gesetz

$$F = m\,a$$

nach der Masse m und nach der Beschleunigung a umgestellt werden. Anschließend sollen drei qualitative Aussagen zur gegenseitigen Abhängigkeit der einzelnen Bestimmungsgrößen mithilfe eines Lückentexts formuliert werden.

Vorkenntnisse: Rechenregeln für reelle Zahlen, Äquivalenzumformung

Randomisierung: keine

Anpassungen: keine

Verbotene Wörter: solve, find_root, algsys

Sonderoption: Feedback unterdrücken: ja

1.1.2.2 Allgemeine Gasgleichung (1)

Tags: Äquivalenzumformung, Umformung, Funktionsgraph

Screenshot: (Stand 29.07.2024)

Die Allgemeine Gasgleichung (oder Zustandsgleichung idealer Gase)

$$V = \frac{R\,T\,n}{p}$$

beschreibt, welches Volumen V ein ideales Gas der Stoffmenge n bei einer Temperatur T und einem Druck p einnimmt. Dabei bezeichne R die allgemeine Gaskonstante.

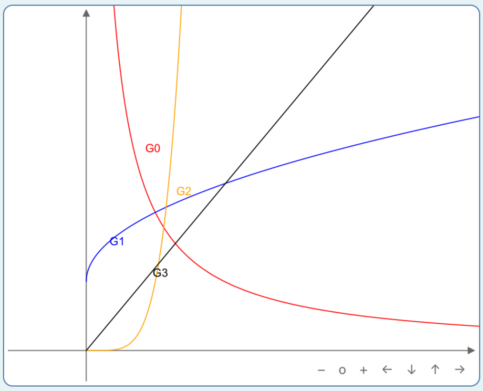
(a) Stellen Sie die Allgemeine Gasgleichung für $V > 0$ nach p um.

Es ist $p =$ ______ .

(b) Stellen Sie das Allgemeine Gasgleichung für $n\,R > 0$ nach T um.

Es ist $T =$ ______ .

(c) Untersuchen Sie V als Funktion V_{pn} von T für Konstanten $R,\ p,\ n > 0$ und als Funktion V_{Tn} von p für Konstanten $R,\ T,\ n > 0$. Die folgende Abbildung zeigt die Graphen der Funktionen V_{pn}, V_{Tn} und zwei weitere Funktionsgraphen.



Entscheiden Sie (rein qualitativ), welche der abgebildeten Graphen $G0, \ldots, G3$ die Graphen der Funktionen V_{pn} und V_{Tn} sind. Vervollständigen Sie dazu den folgenden Lückentext.

(i) Es ist (Meine Auswahl zurücksetzen) der Graph der Funktion V_{pn}.

(ii) Es ist (Meine Auswahl zurücksetzen) der Graph der Funktion V_{Tn}.

Autor: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: In dieser Aufgabe soll die allgemeine Gasgleichung

$$V = \frac{R\,T\,n}{p}$$

nach dem Druck p in Aufgabenteil (a) und nach der Temperatur T in Aufgabenteil (b) umgestellt werden. In Aufgabenteil (c) sollen aus vier Graphen die Graphen ausgewählt werden, die rein qualitativ das Volumen V in Abhängigkeit der Temperatur T bzw. das Volumen V in Abhängigkeit des Drucks p jeweils bei Festhalten der übrigen Bestimmungsgrößen beschreiben.

Vorkenntnisse: Äquivalenzumformung, Erkennen charakteristischer Funktionsgraphen

Randomisierung: keine

Anpassungen: keine

Verbotene Wörter: solve, find_root, algsys

Sonderoption: Feedback unterdrücken: ja

Bemerkung	Aufgabe 4.2.4.4 behandelt ebenfalls die Allgemeine Gasgleichung im Themenfeld der mehrdimensionalen Analysis.

1.1.2.3 Barometrische Höhenformel (1)

Tags: Äquivalenzumformung, Umformung, Exponentialfunktion, Logarithmus

Screenshot: (Stand 29.07.2024)

> Untersuchen Sie mithilfe der barometrischen Höhenformel
>
> $$p = p_0\, e^{-\frac{g\, h\, \rho_0}{p_0}}$$
>
> den Zusammenhang zwischen der Flughöhe h eines Airbus A321XLR, dem Luftdruck p auf Flughöhe, dem Luftdruck p_0 am Boden und der Dichte ρ_0 der Luft am Boden. Es bezeichne g die Erdbeschleunigung.
>
> Das Pitot-Statik-System eines Airbus A321XLR zeigt einen Luftdruck p von $3.06 \cdot 10^4\ \mathrm{Pa}$ an. Die Flugverkehrskontrolle meldet einen Luftdruck p_0 von $1.0135 \cdot 10^5\ \mathrm{Pa}$ und Dichte ρ_0 der Luft von $1.1563 \cdot 10^0\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ auf Höhe des Meeresspiegels. Berechnen Sie die Flughöhe h des Airbus A321XLR über dem Meeresspiegel und geben Sie diese in m auf 3 signifikante Stellen genau an. Nehmen Sie für die Berechnung näherungsweise an, dass die Erdbeschleunigung g gleich $9.81 \cdot 10^0\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ ist.
>
> Es ist $h =$ ______.

Autoren: Emma van der Smagt (RUB)
Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee: Emma van der Smagt

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: In dieser Aufgabe soll die barometrische Höhenformel

$$p = p_0\, e^{-\frac{g h \rho_0}{p_0}}$$

nach der Dichte ρ_0 auf Höhe null und nach der Höhe h umgestellt werden. Anschließend sollen drei qualitative Aussagen zur gegenseitigen Abhängigkeit der einzelnen Bestimmungsgrößen mithilfe eines Lückentexts formuliert werden.

Vorkenntnisse: Rechenregeln für reelle Zahlen, Äquivalenzumformung, Potenzgesetze, Logarithmusgesetze

Randomisierung: keine

Anpassungen: keine

Verbotene Wörter: solve, find_root, algsys

Sonderoption: Feedback unterdrücken: ja

1.1.2.4 Hagen-Poiseuille Gesetz (1)

Tags Äquivalenzumformung, Umformung

Screenshot (Stand 29.07.2024)

Das Hagen-Poiseuille Gesetz

$$\frac{V}{t} = \frac{\pi\, R^4\, (p_1 - p_2)}{8\, L\, \eta}$$

beschreibt den Volumenstrom $\frac{V}{t}$ einer laminaren Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit der dynamischen Viskosität η durch ein Rohr der Länge L mit kreisförmigem Querschnitt von Radius R. Der Volumenfluss wird durch die Druckdifferenz $(p_1 - p_2)$ des Drucks p_1 auf der Eingangsseite und des Drucks p_2 auf der Ausgangsseite des Rohrs bestimmt. Dabei bezeichne π die Kreiszahl.

(a) Stellen Sie das Hagen-Poiseuille Gesetz für $V > 0$, $(p_1 - p_2) > 0$ und $R > 0$ nach L um. Geben Sie η als `eta`, π als `%pi` und p_1, p_2 als `p1`, `p2` ein.

Es ist $L =$ ______.

(b) Stellen Sie das Hagen-Poiseuille Gesetz für $(p_1 - p_2) > 0$ und $L > 0$ nach R um.

Es ist $R =$ ______.

(c) Formulieren Sie drei wahre Aussagen zum Hagen-Poiseuille Gesetz. Vervollständigen Sie dazu den folgenden Lückentext.

(i) Seien $L > 0$, $(p_1 - p_2) > 0$ und $R > 0$ konstant. Je (Meine Auswahl zurücksetzen) η ist, desto (Meine Auswahl zurücksetzen) ist $\frac{V}{t}$.

(ii) Seien $\eta > 0$, $(p_1 - p_2) > 0$ und $R > 0$ konstant. Je (Meine Auswahl zurücksetzen) $\frac{V}{t}$ ist, desto (Meine Auswahl zurücksetzen) ist L.

(iii) Seien $\eta > 0$, L und $\frac{V}{t} > 0$ konstant. Je (Meine Auswahl zurücksetzen) $(p_1 - p_2)$ ist, desto (Meine Auswahl zurücksetzen) ist R.

Autor Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee Jörg Härterich

Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz CC BY-SA 4.0

Thema In dieser Aufgabe soll das Hagen-Poiseuille Gesetz

$$\frac{V}{t} = \frac{\pi\,(p1 - p2)\,R^4}{8\,\eta\,L}$$

nach der Länge L und nach dem Radius R des Rohr mit kreisförmigem Quesrchnitt jeweils in Abhängigkeit des Volumenstroms $\frac{V}{t}$, der Druckdifferenz $p1 - p2$ am Ein- und Ausgang des Rohrs und der dynamischen Viskosität η umgestellt werden. Anschließend sollen drei qualitative Aussagen zur gegenseitigen Abhängigkeit der einzelnen Bestimmungsgrößen mithilfe eines Lückentexts formuliert werden.

Vorkenntnisse Rechenregeln für reelle Zahlen, Äquivalenzumformung

Randomisierung keine

Anpassungen keine

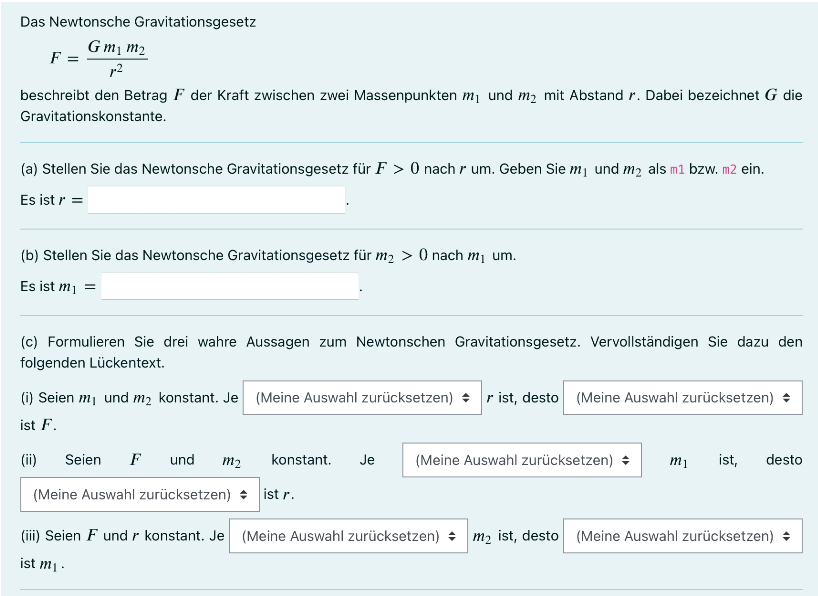
Verbotene Wörter solve, find_root, algsys

Sonderoption Feedback unterdrücken: ja

1.1.2.5 Newtonsches Gravitationsgesetz (1)

Tags: Äquivalenzumformung, Umformung

Screenshot: (Stand 29.07.2024)



Das Newtonsche Gravitationsgesetz

$$F = \frac{G\, m_1\, m_2}{r^2}$$

beschreibt den Betrag F der Kraft zwischen zwei Massenpunkten m_1 und m_2 mit Abstand r. Dabei bezeichnet G die Gravitationskonstante.

(a) Stellen Sie das Newtonsche Gravitationsgesetz für $F > 0$ nach r um. Geben Sie m_1 und m_2 als `m1` bzw. `m2` ein.

Es ist $r =$.

(b) Stellen Sie das Newtonsche Gravitationsgesetz für $m_2 > 0$ nach m_1 um.

Es ist $m_1 =$.

(c) Formulieren Sie drei wahre Aussagen zum Newtonschen Gravitationsgesetz. Vervollständigen Sie dazu den folgenden Lückentext.

(i) Seien m_1 und m_2 konstant. Je (Meine Auswahl zurücksetzen) r ist, desto (Meine Auswahl zurücksetzen) ist F.

(ii) Seien F und m_2 konstant. Je (Meine Auswahl zurücksetzen) m_1 ist, desto (Meine Auswahl zurücksetzen) ist r.

(iii) Seien F und r konstant. Je (Meine Auswahl zurücksetzen) m_2 ist, desto (Meine Auswahl zurücksetzen) ist m_1.

Autor: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: In dieser Aufgabe soll das Newtonsche Gravitationsgesetz

$$F = \frac{G\, m_1\, m_2}{r^2}$$

nach dem Abstand r und nach der Masse m_1 umgestellt werden. Anschließend sollen drei qualitative Aussagen zur gegenseitigen Abhängigkeit der einzelnen Bestimmungsgrößen mithilfe eines Lückentexts formuliert werden.

Vorkenntnisse: Rechenregeln für reelle Zahlen, Äquivalenzumformung

Randomisierung: keine

Anpassungen: keine

Verbotene Wörter: solve, find_root, algsys

Sonderoption: Feedback unterdrücken: ja

1.1.2.6 Newtonsches Gravitationsgesetz (2)

Tags	Äquivalenzumformung, Umformung
Screenshot	(Stand 29.07.2024)

Auf einen künstlichen Satelliten S der vernachlässigbar kleinen Masse m auf einem konzentrischen Orbit mit Radius r um die Erde wirkt die Gravitationskraft

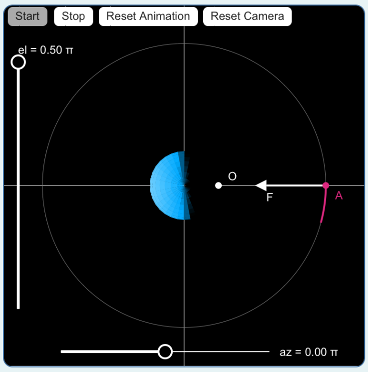
$$F_G = G\,\frac{M\,m}{r^2}$$

als Zentripetalkraft

$$F_p = m\,\frac{v^2}{r} = m\,\omega^2\,r.$$

Dabei bezeichnen G die Gravitationskonstante, M die Masse der Erde, v die Umlaufgeschwindigkeit von S auf dem Orbit und ω die zugehörige Winkelgeschwindigkeit.

Die folgende Abbildung zeigt modellhaft einen Satelliten A auf seinem konzentrischen äquatorialen Orbit um den Planeten Erde im Bezugssystem eines Beobachters O auf der Erdoberfläche. Die als an A angehefteter Vektorpfeil F dargestellte Gravitationskraft ist eine Zentralkraft und wirkt in diesem Spezialfall einer konzentrischen Umlaufbahn als Zentripetalkraft orthogonal zur Umlaufbahn.



(a) Geben Sie den Radius r des Orbits von S in Abhängigkeit der Masse M der Erde, der Bahngeschwindigkeit $v > 0$ von S und der Gravitationskonstante G an.

Es ist $r =$ ________ .

(b) Geben Sie den Radius r der Umlaufbahn von S in Abhängigkeit der Masse M der Erde, der Winkelgeschwindigkeit $\omega > 0$ von S und der Gravitationskonstante G an. Geben Sie ω als `omega` ein.

Es ist $r =$ ________ .

Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	Für einen künstlichen Satelliten vernachlässigbarer Masse auf einem konzentrischen Orbit um die Erde wirkt die Gravitationskraft F_G (siehe Aufgabe 1.1.2.5) als als Zentripetalkraft F_p. In dieser Aufgabe soll das Kräftegleichgewicht $F_G = F_p$ nach dem Radius r in Abhängigkeit von der Bahngeschwindigkeit v und in Abhängigkeit der Winkelgeschwindigkeit ω umgestellt werden.
Vorkenntnisse	Rechenregeln für reelle Zahlen, Äquivalenzumformung
Randomisierung	keine
Anpassungen	keine
Verbotene Wörter	solve, find_root, algsys
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

1.1.2.7 Stefan-Boltzmann Gesetz (1)

Tags: Äquivalenzumformung, Umformung

Screenshot: (Stand 29.07.2024)


Das Stefan-Boltzmann Gesetz

$$P = A\,T^4\,\sigma$$

beschreibt, welche Strahlungsleistung P ein idealer schwarzer Körper der Oberfläche A mit absoluter Temperatur T aussendet. Dabei bezeichne σ die Stefan-Boltzmann-Konstante.

(a) Stellen Sie das Stefan-Boltzmann Gesetz für $T > 0$ nach A um. Geben Sie σ als `sigma` ein.

Es ist $A =$.

(b) Stellen Sie das Stefan-Boltzmann Gesetz für $A > 0$ nach T um.

Es ist $T =$.

(c) Formulieren Sie drei wahre Aussagen zum 2. Newtonsche Gesetz. Vervollständigen Sie dazu den folgenden Lückentext.

(i) Sei $T > 0$ konstant. Je (Meine Auswahl zurücksetzen) A ist, desto (Meine Auswahl zurücksetzen) ist P.

(ii) Sei $P > 0$ konstant. Je (Meine Auswahl zurücksetzen) T ist, desto (Meine Auswahl zurücksetzen) ist A.

(iii) Sei $A > 0$ konstant. Je (Meine Auswahl zurücksetzen) P ist, desto (Meine Auswahl zurücksetzen) ist T.

Autor: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: In dieser Aufgabe soll das Stefan-Boltzmann Gesetz

$$P = A\,T^4\,\sigma$$

nach der Oberfläche A und nach der Temperatur T eines idealen schwarzen Körpers umgestellt werden. Anschließend sollen drei qualitative Aussagen zur gegenseitigen Abhängigkeit der einzelnen Bestimmungsgrößen mithilfe eines Lückentexts formuliert werden.

Vorkenntnisse: Rechenregeln für reelle Zahlen, Äquivalenzumformung

Randomisierung: keine

Anpassungen: keine

Verbotene Wörter: solve, find_root, algsys

Sonderoption: Feedback unterdrücken: ja

1.1.2.8 Wurfparabel (1)

Tags Äquivalenzumformung, Umformung, Trigonometrisch Funktion

Screenshot (Stand 29.07.2024)

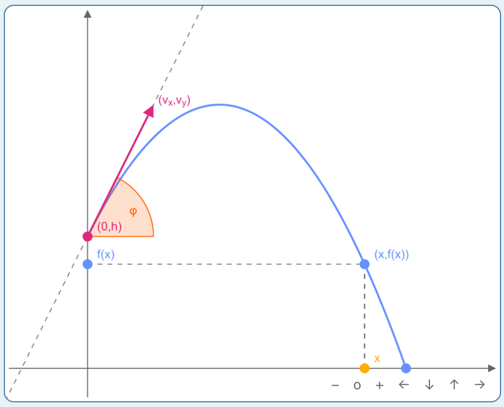
Die durch

$$(c_x(t), c_y(t)) = (0, h) + t\,(v_x, v_y) - \frac{1}{2}\,g\,t^2\,(0, 1)$$

definierte Funktion beschreibt die Bahnkurve eines Körpers während eines Wurfs in einem homogenen Schwerefeld (unter Vernachlässigung des Luftwiderstands). Dabei bezeichne $(0, h)$ den Ort und damit h die Höhe des Abwurfs, (v_x, v_y) die Geschwindigkeit des Abwurfs und g die Schwerebeschleunigung. Das Bild der durch $(c_x(t), c_y(t))$ definierten Funktion wird Wurfparabel genannt. Falls die Geschwindigkeit des Abwurfs ungleich null, so heißt der Winkel φ zwischen (v_x, v_y) und einer zur x-Achse parallelen Geraden durch $(0, h)$ Wurfwinkel.

Die folgende Abbildung zeigt die oben beschriebene Bahnkurve. Sie können den Ort $(0, h)$ des Wurfs entlang der y-Achse verschieben (Punkt ● auf der y-Achse) und die Geschwindigkeit (v_x, v_y) des Wurfs durch Verschieben der Pfeilspitze des Vektors verändern (Pfeil →). Der Wurfwinkel φ ist als Kreisausschnitt (Sektor ◁) gekennzeichnet.

Beachten Sie, dass sich für $v_x \neq 0$ die Bahnkurve als Graph einer reellen Funktion f über der x-Achse darstellen lässt. Sie können das Funktionsargument x entlang der x-Achse verschieben (Punkt ● auf der x-Achse).



(a) Bestimmen Sie für $v_x \neq 0$ die reelle Funktion f, sodass $f(c_x(t)) = c_y(t)$ für alle $t > 0$ ist. Geben Sie v_x und v_y als `vx` bzw. `vy` ein.

Es ist $f(x) =$ ______.

(b) Geben Sie für $v_x \neq 0$ die reelle Funktion f in Abhängigkeit des Wurfwinkels $\varphi \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ und des Betrags $r = \|(v_x, v_y)\|$ der Geschwindigkeit (v_x, v_y) des Abwurfs an, indem Sie v_x und v_y geeignet ersetzen. Geben Sie φ als `phi` ein.

Es ist $f(x) =$ ______.

Autoren Emma van der Smagt (RUB)
Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee Emma van der Smagt

Lizenz CC BY-SA 4.0

Thema In dieser Aufgabe soll die durch

$$(c_x(t), c_y(t)) = (0, h) + t\,(v_x, v_y) - \frac{1}{2}\,g\,t^2\,(0, 1)$$

beschriebene Wurfparabel untersucht werden. In Aufgabenteil (a) soll eine Funktion f über der x-Achse angegeben werden, die die Eigenschaft $f(c_x(t)) = c_y(t)$ für alle t erfüllt. Insbesondere stimmt damit der Graph von f mit der Wurfparabel überein. In Aufgabenteil (b) sollen Geschwindigkeitsvektor (v_x, v_y) bezüglich ebener Polarkoordinaten dargestellt und dessen Komponenten in der Darstellung von f in Aufgabenteil (a) geeignet ersetzt werden.

Vorkenntnisse Äquivalenzumformung, trigonometrische Funktionen, ebene Polarkoordinaten

Randomisierung	keine
Anpassungen	keine
Verbotene Wörter	solve, find_root, algsys
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

1.1.2.9 Wurfparabel (2)

Tags	Äquivalenzumformung, Umformung, Nullstelle, Extremwert
Screenshot	(Stand 29.07.2024)

Die durch

$$(c_x(t), c_y(t)) = (0, h) + t\,(v_x, v_y) - \tfrac{1}{2}\,g\,t^2\,(0, 1)$$

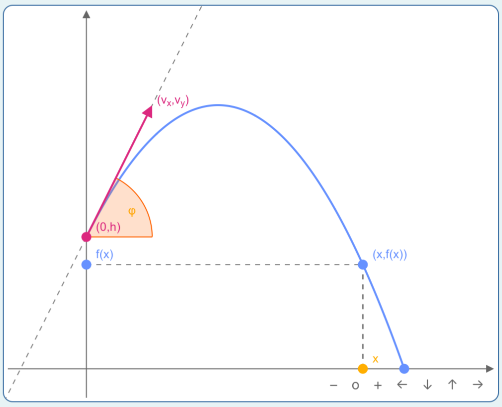
definierte Abbildung c beschreibt die Bahnkurve eines Körpers während eines Wurfs in einem homogenen Schwerefeld (unter Vernachlässigung des Luftwiderstands). Dabei bezeichne $(0, h)$ den Ort und damit $h \geq 0$ die Höhe des Abwurfs, (v_x, v_y) die Geschwindigkeit des Abwurfs und $g > 0$ die Schwerebeschleunigung. Das Bild der durch $(c_x(t), c_y(t))$ definierten Funktion für $t \geq 0$ wird Wurfparabel genannt. Falls die Geschwindigkeit des Abwurfs ungleich null ist, so heißt der Winkel φ zwischen (v_x, v_y) und einer zur x-Achse parallelen Geraden durch $(0, h)$ Wurfwinkel. Für $v_x \neq 0$ lässt sich die Wurfparabel auch als Graph der durch

$$f(x) = -\tfrac{g\,x^2}{2\,v_x^2} + \tfrac{v_y\,x}{v_x} + h$$

definierten Funktion f über der x-Achse darstellen.

Die folgende Abbildung zeigt die oben beschriebene Bahnkurve. Sie können den Ort $(0, h)$ des Wurfs entlang der y-Achse verschieben (Punkt ● auf der y-Achse) und die Geschwindigkeit (v_x, v_y) des Wurfs durch Verschieben der Pfeilspitze des Vektors verändern (Pfeil →). Der Wurfwinkel φ ist als Kreisausschnitt (Sektor ◅) gekennzeichnet.

Für $v_x \neq 0$ können Sie das Funktionsargument x von f entlang der x-Achse verschieben (Punkt ● auf der x-Achse).



(a) Bestimmen Sie für $v_x \geq 0$ den eindeutigen Punkt (x_M, y_M) der Wurfparabel, sodass für alle Punkt (x, y) auf der Wurfparabel $y \leq y_M$ gilt. Im Folgenden verstehen wir (x_M, y_M) als den höchsten Punkt auf der Bahnkurve des geworfenen Körpers. Wir bezeichnen y_M als maximale Wurfhöhe. Unterscheiden Sie dabei die folgenden Fälle. Geben Sie einen Punkt $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ als `[a,b]` ein.

(i) Für $v_y > 0$ ist $(x_M, y_M) =$ ________ .

(ii) Für $v_y \leq 0$ ist $(x_M, y_M) =$ ________ .

(b) Bestimmen Sie für $h > 0$ den eindeutigen Punkt (x_0, y_0), an dem die Wurfparabel die x-Achse schneidet. Im Folgenden verstehen wir (x_0, y_0) als den Punkt, an dem der geworfene Körper auf dem Boden auftrifft. Wir bezeichnen x_0 als Wurfweite.

Es ist $(x_0, y_0) =$ ________ .

Autoren	Emma van der Smagt (RUB)
	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Emma van der Smagt
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll die durch

$$(c_x(t), c_y(t)) = (0, h) + t\,(v_x, v_y) - \frac{1}{2}\,g\,t^2\,(0, 1)$$

beschriebene Wurfparabel untersucht werden. In Aufgabenteil (a) soll die maximale Wurfhöhe als Extremwert der y-Komponente c_y bestimmt werden. In Aufgabenteil (b) soll die Wurfweite als Nullstelle der y-Komponente c_y bestimmt werden.

Vorkenntnisse	Äquivalenzumformung, trigonometrische Funktionen, Bestimmung von Nullstellen, Charakterisierung von Extremstellen
Randomisierung	keine
Anpassungen	keine
Verbotene Wörter	solve, find_root, algsys
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

1.1.3 Physikalische Gesetze und Umgang mit Einheiten

1.1.3.1 2. Newtonsche Gesetz (2)

Tags	Äquivalenzumformung, Umformung, Signifikante Stellen, SI-Einheiten
Screenshot	(Stand 29.07.2024)

Untersuchen Sie mithilfe des 2. Newtonschen Gesetzes

$$F = m\,a$$

den Zusammenhang zwischen der Schubkraft F, der Masse m und der Beschleunigung a der zweiten Stufe einer Falcon 9 Block 5.

Das Vakuumtriebwerk Merlin 1D VAC der zweiten Stufe einer Falcon 9 Block 5 erzeugt eine maximal Schubkraft F von $9.786 \cdot 10^5$ N. Die Gesamtmasse m der zweiten Stufe beträgt $9.2055 \cdot 10^4$ kg. Berechnen Sie die Beschleunigung a, die die zweite Stufe bei 80% ihrer maximalen Schubkraft erfährt, und geben Sie diese in $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ auf 4 signifikante Stellen genau an.

Es ist $a =$ ________.

Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll mithilfe des 2. Newtonsche Gesetzes (siehe Aufgabe 1.1.2.1) die Beschleunigung a einer Rakete bei gegebener Schubkraft F und Masse m berechnet werden. Das Ergebnis soll dabei mit Einheit bis auf eine vorgegebene Zahl signifikanter Stellen genau angegeben werden.
Vorkenntnisse	Rechenregeln für reelle Zahlen, Äquivalenzumformung, signifikante Stellen, SI-Einheiten
Randomisierung	Der Anteil der maximalen Schubkraft wird zwischen 5% und 95% in Schritten von 5% zufällig ausgewählt.
Anpassungen	keine
Verbotene Wörter	solve, find_root, algsys
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

1.1.3.2 Barometrische Höhenformel (2)

Tags	Äquivalenzumformung, Umformung, Signifikante Stellen, SI-Einheiten, Exponentialfunktion, Logarithmus
Screenshot	(Stand 29.07.2024)

Untersuchen Sie mithilfe der barometrischen Höhenformel

$$p = p_0\, e^{-\frac{g\, h\, \rho_0}{p_0}}$$

den Zusammenhang zwischen der Flughöhe h eines Airbus A321XLR, dem Luftdruck p auf Flughöhe, dem Luftdruck p_0 am Boden und der Dichte ρ_0 der Luft am Boden. Es bezeichne g die Erdbeschleunigung.

Das Pitot-Statik-System eines Airbus A321XLR zeigt einen Luftdruck p von $2.41 \cdot 10^4$ Pa an. Die Flugverkehrskontrolle meldet einen Luftdruck p_0 von $1.0095 \cdot 10^5$ Pa und Dichte ρ_0 der Luft von $1.2491 \cdot 10^0\ \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ auf Höhe des Meeresspiegels. Berechnen Sie die Flughöhe h des Airbus A321XLR über dem Meeresspiegel und geben Sie diese in m auf 3 signifikante Stellen genau an. Nehmen Sie für die Berechnung näherungsweise an, dass die Erdbeschleunigung g gleich $9.81 \cdot 10^0\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$ ist.

Es ist $h =$ ______ .

Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll mithilfe der barometrischen Höhenformel (siehe Aufgabe 1.1.2.3) die Flughöhe h eines Airbus A321XLR bei gegebenem Luftdruck p auf der Flughöhe und gegeben Luftdruck p_0 und -dichte ρ_0 auf Höhe des Meeresspiegels berechnet werden. Das Ergebnis soll dabei mit Einheit bis auf eine vorgegebene Zahl signifikanter Stellen genau angegeben werden.
Vorkenntnisse	Rechenregeln für reelle Zahlen, Äquivalenzumformung, signifikante Stellen, SI-Einheiten, Potenzgesetze, Logarithmusgesetze
Randomisierung	Es werden der Luftdruck p_0 zufällig zwischen $1003\,\mathrm{hPa}$ und $1028,5\,\mathrm{hPa}$ in Schritten von $0,5\,\mathrm{hPa}$, die Lufttemperatur auf Höhe des Meeresspiegels zufällig zwischen $273,5\,\mathrm{K}$ und $309,2\,\mathrm{K}$ in Schritten von $0,7\,\mathrm{K}$ und die Flughöhe h zufällig zwischen $9300\,\mathrm{m}$ und $12000\,\mathrm{m}$ in Schritten von $100\,\mathrm{m}$ ausgewählt und daraus mithilfe der barometrischen Höhenformel der Luftdruck p auf der Flughöhe bestimmt.
Anpassungen	keine
Verbotene Wörter	solve, find_root, algsys
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

1.1.3.3 Newtonsches Gravitationsgesetz (3)

Tags	Äquivalenzumformung, Umformung, Signifikante Stellen, SI-Einheiten
Screenshot	(Stand 29.07.2024)

Auf einen künstlichen Satelliten S der vernachlässigbar kleinen Masse m auf einem stationären Orbit mit Radius r um den Planeten Erde wirkt die Gravitationskraft

$$F_G = G\,\frac{M\,m}{r^2}$$

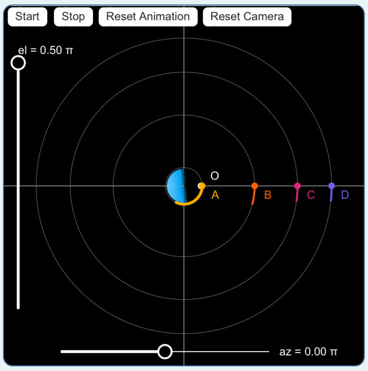
als Zentripetalkraft

$$F_p = m\,\frac{v^2}{r} = m\,\omega^2\,r.$$

Dabei bezeichnen G die Gravitationskonstante, M die Masse des Planeten Erde, v die Umlaufgeschwindigkeit von S auf dem Orbit und ω die zugehörige Winkelgeschwindigkeit. Untersuchen Sie im Folgenden den Orbit von S und entnehmen Sie die dazu erforderlichen Größen der folgenden Tabelle.

Name	Masse [kg]	siderischer Tag [h]	Äquatordurchmesser [km]
Merkur	$3.301 \cdot 10^{23}$	1407.5	4879.4
Venus	$4.8675 \cdot 10^{24}$	5832.5	12103.6
Erde	$5.9722 \cdot 10^{24}$	23.93	12756.3
Mars	$6.417 \cdot 10^{23}$	24.6	6792.4

Die folgende Abbildung zeigt modellhaft vier Satelliten A, B, C und D (Punkte •, •, • und •) auf ihren konzentrischen äquatorialen Orbits um den Planeten Erde im Bezugssystem eines Beobachters O (Punkt) auf der Erdoberfläche. Der Satellit C befindet sich auf einem (geo)stationären Orbit und erscheint so dem Beobachter O am Himmel still zu stehen. Bitte beachten Sie, dass das Verhältnis von Erdradius, Bahnradius und Bahngeschwindigkeiten der Satelliten maßstabsgetreu abgebildet wird, die Abbildung abseits davon jedoch stark idealisiert ist.



(a) Bestimmen Sie die Winkelgeschwindigkeit ω von S und geben Sie diese in $\frac{1}{\mathrm{s}}$ auf 4 signifikante Stellen genau an.

Es ist $\omega =$ ______.

(b) Bestimmen Sie den Radius r des stationären Orbits von S mithilfe des klassischen Newtonschen Gravitationsgesetzes und geben Sie diesen in m auf 5 signifikante Stellen genau an. Die Masse von S sei dabei vernachlässigbar klein. Nehmen Sie für die Gravitationskonstante G an, dass $G = 6.6743 \cdot 10^{-11}\,\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^2}$ ist.

Es ist $r =$ ______.

(c) Bestimmen Sie die Flughöhe h von S und geben Sie diese auf 5 signifikante Stellen genau an.

Es ist $h =$ ______.

Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll mithilfe des Kräftgleichgewichts $F_G = F_p$ (siehe Aufgabe 1.1.2.6) der Gravitationskraft F_G und der Zentripetalkraft F_p die Winkelgeschwindigkeit ω, der Bahnradius r und die Flughöhe h eines stationären Satelliten im Orbit eines Planeten bestimmt werden. Die Ergebnisse sollen dabei mit Einheiten bis auf eine vorgegebene Zahl signifikanter Stellen genau angegeben werden.
Vorkenntnisse	Rechenregeln für reelle Zahlen, Äquivalenzumformung, signifikante Stellen, SI-Einheiten

Randomisierung	Der Planet, seine Masse, sein Durchmesser und die Länge eines siderischen Tages werden zufällig aus einer Liste von vier Planeten (Merkur, Venus, Erde, Mars) ausgewählt.
Anpassungen	Die unter Randomisierung angegebene Liste kann um weitere Planten, ihre beschreibenden Größen samt signifikanter Stellen ergänzt werden.
Verbotene Wörter	solve, find_root, algsys
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

1.1.3.4 Stefan-Boltzmann Gesetz (2)

Tags	Äquivalenzumformung, Umformung, Signifikante Stellen, SI-Einheiten
Screenshot	(Stand 29.07.2024)

Untersuchen Sie mithilfe des Stefan-Boltzmann Gesetzes

$$P = \sigma\, A\, T^4$$

den Zusammenhang zwischen der Strahlungsleistung P, der Temperatur T und der Oberfläche A eines idealen schwarzen Körpers. Es bezeichne σ die Stefan-Boltzmann Konstante.

Berechnen Sie die Kantenlänge L eines idealen schwarzen Würfels, der bei einer absoluten Temperatur von $5.0 \cdot 10^1\ \mathrm{K}$ eine Strahlungsleistung von $3.402 \cdot 10^3\ \mathrm{W}$ aussendet, und geben Sie diese in m auf 2 signifikante Stellen genau an. Nehmen Sie für die Berechnung näherungsweise an, dass die Stefan-Boltzmann σ Konstante gleich $5.67 \cdot 10^{-8}\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{K}^4\,\mathrm{m}^2}$ ist.

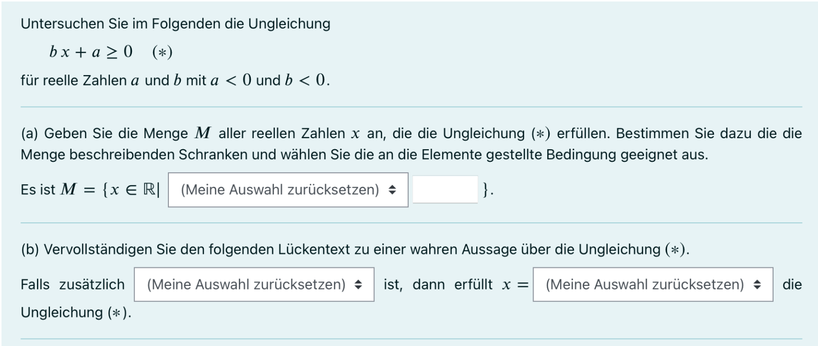
Es ist $L =$ ______ .

Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll mithilfe des Stefan-Boltzmann Gesetzes (siehe Aufgabe 1.1.2.7) die Kantenlänge L eines idealen schwarzen Würfels bei gegebener Strahlungsleistung P und Temperatur T berechnet werden. Das Ergebnis soll dabei mit Einheit bis auf eine vorgegebene Zahl signifikanter Stellen genau angegeben werden.
Vorkenntnisse	Rechenregeln für reelle Zahlen, Äquivalenzumformung, signifikante Stellen, SI-Einheiten
Randomisierung	Die Strahlungsleistung und die Temperatur werden zufällig so bestimmt, dass die Kantenlänge L gleich 10 m, 20 m oder 40 m ist.
Anpassungen	keine
Verbotene Wörter	solve, find_root, algsys
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

1.1.4 Unleichungen

1.1.4.1 Polynomiale Unleichungen (1) (linear)

Tags	Äquivalenzumformung, Umformung, Ungleichung
Screenshot	(Stand 29.07.2024)

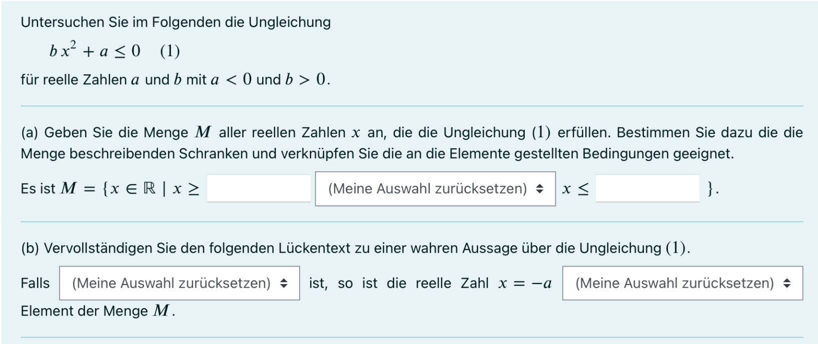


Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll die Ungleichung $$b\,x + a \leq 0 \quad (\text{oder } b\,x + a \geq 0\ )$$ für reelle Konstanten $a > 0$ (oder $a < 0$) und $b > 0$ (oder $b < 0$) untersucht werden. In Aufgabenteil (a) soll die Menge aller reellen Zahlen x angegeben werden, die die Ungleichung erfüllen. Dazu ist eine geeignete Schranke anzugeben. In Aufgabenteil (b) soll eine wahre Aussage zu obiger Ungleichung formuliert werden. Dazu ist zu entscheiden, ob eine reelle Zahl unter einer gegeben Bedingung die Ungleichung erfüllt.
Vorkenntnisse	Rechenregeln für reelle Zahlen, Äquivalenzumformung von Ungleichungen, Angabe von Lösungsmengen
Randomisierung	Die Richtung der obigen Ungleichung und die Vorzeichen der Konstanten a und b werden zufällig gewählt. In Abhängigkeit davon sind die in Aufgabenteil (b) gegebenen Antwortmöglichkeiten bestimmt. Die Randomisierung hat nur einen geringen Einfluss auf den Schwierigkeitsgrad der Aufgabe.
Anpassungen	keine
Verbotene Wörter	solveineq
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

1.1.4.2 Polynomiale Unleichungen (2) (quadratisch)

Tags — Äquivalenzumformung, Umformung, Ungleichung

Screenshot — (Stand 29.07.2024)



Autor — Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee — Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz — CC BY-SA 4.0

Thema — In dieser Aufgabe soll die Ungleichung

$$b\,x^2 + a \leq 0 \quad (\text{oder } b\,x^2 + a \geq 0\ )$$

für reelle Konstanten $a > 0$ (oder $a < 0$) und $b > 0$ mit $\operatorname{sign}(b) = -\operatorname{sign}(a)$ untersucht werden. In Aufgabenteil (a) soll die Menge aller reellen Zahlen x angegeben werden, die die Ungleichung erfüllen. Dazu sind geeignete Schranken anzugeben. In Aufgabenteil (b) soll eine wahre Aussage zu obiger Ungleichung formuliert werden. Dazu ist zu entscheiden, ob eine gegebene reelle Zahl unter einer gegeben Bedingung die Ungleichung erfüllt.

Vorkenntnisse — Rechenregeln für reelle Zahlen, Äquivalenzumformung von Ungleichungen, Angabe von Lösungsmengen

Randomisierung — Die Richtung der obigen Ungleichung und das Vorzeichen der Konstanten a werden zufällig gewählt. In Abhängigkeit davon sind die in Aufgabenteil (b) gegebenen Antwortmöglichkeiten bestimmt. Die Randomisierung hat nur einen geringen Einfluss auf den Schwierigkeitsgrad der Aufgabe.

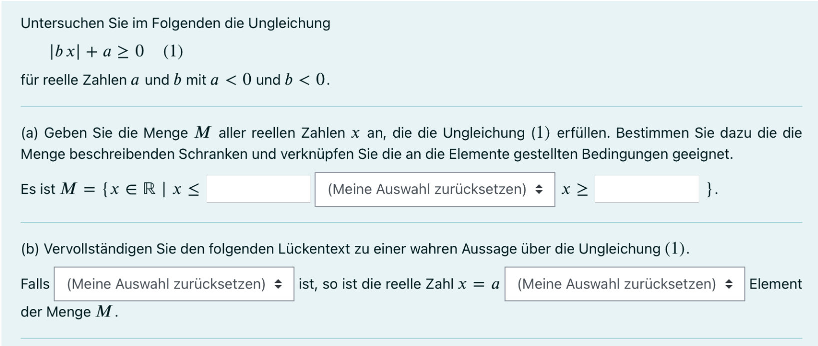
Anpassungen — keine

Verbotene Wörter — solveineq

Sonderoption — Feedback unterdrücken: ja

1.1.4.3 Betragsungleichungen (1)

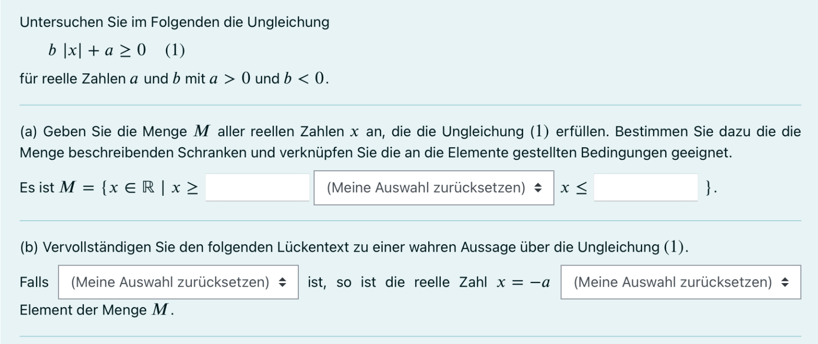
Tags	Äquivalenzumformung, Umformung, Ungleichung, Betrag
Screenshot	(Stand 29.07.2024)



Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll die Ungleichung $$\lvert b\,x \rvert + a \leq 0 \quad (\text{oder } \lvert b\,x \rvert + a \geq 0\ )$$ für reelle Konstanten $a < 0$ und $b > 0$ (oder $b < 0$) untersucht werden. In Aufgabenteil (a) soll die Menge aller reellen Zahlen x angegeben werden, die die Ungleichung erfüllen. Dazu sind geeignete Schranken anzugeben. In Aufgabenteil (b) soll eine wahre Aussage zu obiger Ungleichung formuliert werden. Dazu ist zu entscheiden, ob eine gegebene reelle Zahl unter einer gegeben Bedingung die Ungleichung erfüllt.
Vorkenntnisse	Rechenregeln für reelle Zahlen, Äquivalenzumformung von Ungleichungen, Angabe von Lösungsmengen, Betragsfunktion
Randomisierung	Die Richtung der obigen Ungleichung und das Vorzeichen der Konstanten b werden zufällig gewählt. In Abhängigkeit davon sind die in Aufgabenteil (b) gegebenen Antwortmöglichkeiten bestimmt. Die Randomisierung hat nur einen geringen Einfluss auf den Schwierigkeitsgrad der Aufgabe.
Anpassungen	keine
Verbotene Wörter	solveineq
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

1.1.4.4 Betragsungleichungen (2)

Tags	Äquivalenzumformung, Umformung, Ungleichung, Betrag
Screenshot	(Stand 29.07.2024)

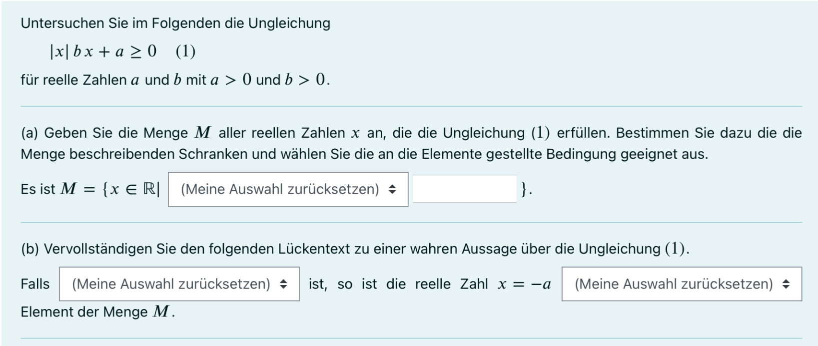


Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll die Ungleichung $$b\,|x| + a \leq 0 \quad (\text{oder } b\,|x| + a \geq 0\ )$$ für reelle Konstanten $a > 0$ (oder $a < 0$) und b mit $\operatorname{sign}(b) = -\operatorname{sign}(a)$ untersucht werden. In Aufgabenteil (a) soll die Menge aller reellen Zahlen x angegeben werden, die die Ungleichung erfüllen. Dazu sind geeignete Schranken anzugeben. In Aufgabenteil (b) soll eine wahre Aussage zu obiger Ungleichung formuliert werden. Dazu ist zu entscheiden, ob eine gegebene reelle Zahl unter einer gegeben Bedingung die Ungleichung erfüllt.
Vorkenntnisse	Rechenregeln für reelle Zahlen, Äquivalenzumformung von Ungleichungen, Angabe von Lösungsmengen, Betragsfunktion
Randomisierung	Die Richtung der obigen Ungleichung und das Vorzeichen der Konstanten a werden zufällig gewählt. In Abhängigkeit davon sind die in Aufgabenteil (b) gegebenen Antwortmöglichkeiten bestimmt. Die Randomisierung hat nur einen geringen Einfluss auf den Schwierigkeitsgrad der Aufgabe.
Anpassungen	keine
Verbotene Wörter	solveineq
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

1.1.4.5 Betragsungleichungen (3)

Tags Äquivalenzumformung, Umformung, Ungleichung, Betrag

Screenshot (Stand 29.07.2024)



Autor Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz CC BY-SA 4.0

Thema In dieser Aufgabe soll die Ungleichung

$$b\,|x|\,x + a \leq 0 \quad (\text{oder } b\,|x|\,x + a \geq 0\ )$$

für reelle Konstanten $a > 0$ (oder $a < 0$) und $b > 0$ (oder $b < 0$) untersucht werden. In Aufgabenteil (a) soll die Menge aller reellen Zahlen x angegeben werden, die die Ungleichung erfüllen. Dazu ist eine geeignete Schranke anzugeben. In Aufgabenteil (b) soll eine wahre Aussage zu obiger Ungleichung formuliert werden. Dazu ist zu entscheiden, ob eine gegebene reelle Zahl unter einer gegeben Bedingung die Ungleichung erfüllt.

Vorkenntnisse Rechenregeln für reelle Zahlen, Äquivalenzumformung von Ungleichungen, Angabe von Lösungsmengen, Betragsfunktion

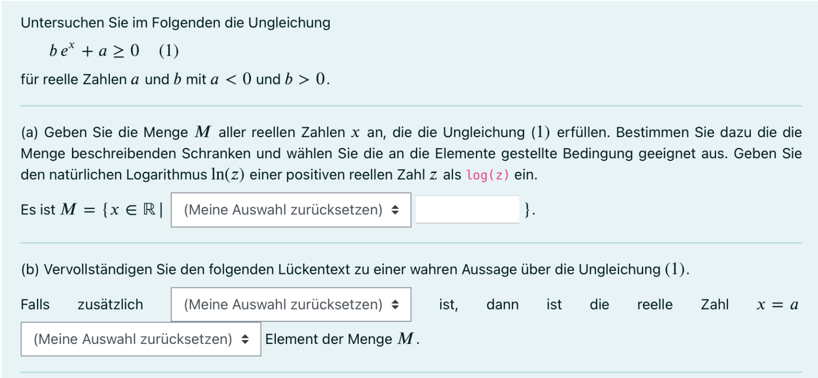
Randomisierung Die Richtung der obigen Ungleichung und die Vorzeichen der Konstanten a und b werden zufällig gewählt. In Abhängigkeit davon sind die in Aufgabenteil (b) gegebenen Antwortmöglichkeiten bestimmt. Die Randomisierung hat nur einen geringen Einfluss auf den Schwierigkeitsgrad der Aufgabe.

Anpassungen keine

Verbotene Wörter solveineq

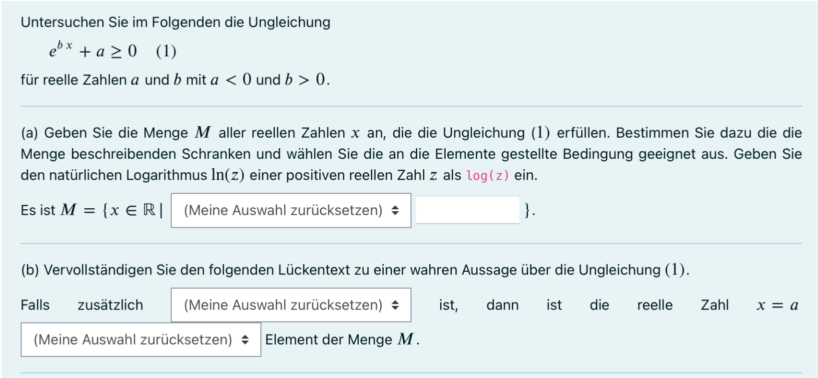
Sonderoption Feedback unterdrücken: ja

1.1.4.6 Exponentielle Ungleichungen (1)

Tags	Äquivalenzumformung, Umformung, Ungleichung, Exponentialfunktion
Screenshot	(Stand 29.07.2024) 
Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll die Ungleichung $$b\,e^x + a \leq 0 \quad (\text{oder } b\,e^x + a \geq 0\ )$$ für reelle Konstanten $a > 0$ (oder $a < 0$) und $b > 0$ mit $\operatorname{sign}(b) = -\operatorname{sign}(a)$ untersucht werden. In Aufgabenteil (a) soll die Menge aller reellen Zahlen x angegeben werden, die die Ungleichung erfüllen. Dazu ist eine geeignete Schranke anzugeben. In Aufgabenteil (b) soll eine wahre Aussage zu obiger Ungleichung formuliert werden. Dazu ist zu entscheiden, ob eine gegebene reelle Zahl unter einer gegeben Bedingung die Ungleichung erfüllt.
Vorkenntnisse	Rechenregeln für reelle Zahlen, Äquivalenzumformung von Ungleichungen, Angabe von Lösungsmengen, Exponentialfunktion
Randomisierung	Die Richtung der obigen Ungleichung und das Vorzeichen der Konstanten a werden zufällig gewählt. In Abhängigkeit davon sind die in Aufgabenteil (b) gegebenen Antwortmöglichkeiten bestimmt. Die Randomisierung hat nur einen geringen Einfluss auf den Schwierigkeitsgrad der Aufgabe.
Anpassungen	keine
Verbotene Wörter	solveineq
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

1.1.4.7 Exponentielle Ungleichungen (2)

Tags	Äquivalenzumformung, Umformung, Ungleichung, Exponentialfunktion
Screenshot	(Stand 29.07.2024)



Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll die Ungleichung $$e^{b\,x} + a \leq 0 \quad (\text{oder } e^{b\,x} + a \geq 0\ )$$ für reelle Konstanten $a < 0$ und $b > 0$ (oder $b < 0$) untersucht werden. In Aufgabenteil (a) soll die Menge aller reellen Zahlen x angegeben werden, die die Ungleichung erfüllen. Dazu ist eine geeignete Schranke anzugeben. In Aufgabenteil (b) soll eine wahre Aussage zu obiger Ungleichung formuliert werden. Dazu ist zu entscheiden, ob eine gegebene reelle Zahl unter einer gegeben Bedingung die Ungleichung erfüllt.
Vorkenntnisse	Rechenregeln für reelle Zahlen, Äquivalenzumformung von Ungleichungen, Angabe von Lösungsmengen, Exponentialfunktion
Randomisierung	Die Richtung der obigen Ungleichung und das Vorzeichen der Konstanten b werden zufällig gewählt. In Abhängigkeit davon sind die in Aufgabenteil (b) gegebenen Antwortmöglichkeiten bestimmt. Die Randomisierung hat nur einen geringen Einfluss auf den Schwierigkeitsgrad der Aufgabe.
Anpassungen	keine
Verbotene Wörter	solveineq
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

1.2 Rechenregeln

Dieser Themenbereich umfasst Aufgaben zu Rechenregeln für Potenzen und Logarithmen, die Partialbruchzerlegung und die Trigonometrie. Aufgaben zu den Potenz- und Logarithmusgesetzen behandeln die Vereinfachung komplexer Terme durch die Anwendung entsprechender Rechenregeln und die Angabe von Lösungsmengen. Aufgaben zur Trigonometrie umfassen die Lösung trigonometrischer Gleichungen sowie die Berechnung von Winkeln und Seiten in geometrischen Figuren und zeigen dabei praxisnahe Anwendungen der Trigonometrie auf. In weiteren Aufgaben wird die Partialbruchzerlegung eingeführt, die es ermöglicht, gebrochen-rationale Terme in einfache Bestandteile zu zerlegen.

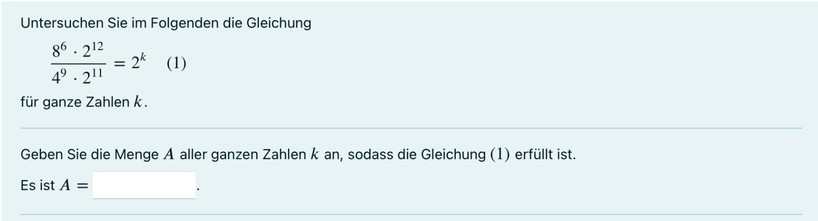
Inhaltsverzeichnis

◄ ▲ ►

1.2.1 Potenzgesetze

1.2.1.1 Potenzgesetze (1)

Tags	Potenzgesetze, Äquivalenzumformung, Umformung
Screenshot	(Stand 29.07.2024)



Autor: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: In dieser Aufgabe soll mithilfe der Potenzgesetze die Menge aller ganzen Zahlen k angegeben werden, die eine Gleichung der Form

$$\frac{(x^{m_1})^{k_1} \cdot (x^{m_2})^{k_2}}{(x^{m_3})^{k_3} \cdot (x^{m_4})^{k_4}} = x^k \tag{1.2.1}$$

erfüllen.

Vorkenntnisse: Rechenregeln für reelle Zahlen, Potenzgesetze, Äquivalenzumformung, Angabe von Lösungsmengen

Randomisierung: Um Aufgabenvarianten mit ähnlichem Schwierigkeitsgrad zu erhalten, werden die Basis x, die Exponenten $m_1, ..., m_4$ und die Exponenten $k_1, ..., k_4$ so ausgewählt, dass

- es genau eine ganze Zahl k gibt, die die Gleichung (1.2.1) erfüllt,
- die Basis x gleich 2, 3 oder 5 ist,
- genau zwei der Exponenten $m_1, ..., m_4$ gleich 1, ein Exponent gleich 2 und ein Exponent 2 oder 3 ist,
- die Exponenten $k_1, ..., k_4$ ganze Zahlen zwischen 2 und 15 sind.

Die Randomisierung erfolgt dabei so, dass sich keine Faktoren ohne Anwendung mindestens eines Potenzgesetzes zu eins aufheben.

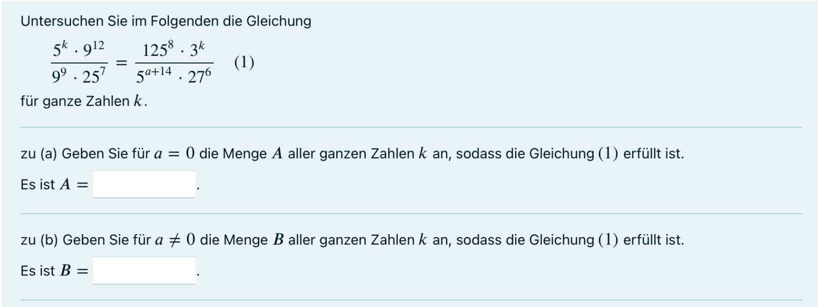
Anpassungen: keine

Verbotene Wörter: solve, find_root, algsys

Sonderoption: Feedback unterdrücken: ja
Multiplikationszeichen : Punkt

1.2.1.2 Potenzgesetze (2)

Tags	Potenzgesetze, Äquivalenzumformung, Umformung
Screenshot	(Stand 29.07.2024)


Untersuchen Sie im Folgenden die Gleichung

$$\frac{5^k \cdot 9^{12}}{9^9 \cdot 25^7} = \frac{125^8 \cdot 3^k}{5^{a+14} \cdot 27^6} \quad (1)$$

für ganze Zahlen k.

zu (a) Geben Sie für $a = 0$ die Menge A aller ganzen Zahlen k an, sodass die Gleichung (1) erfüllt ist.

Es ist $A =$.

zu (b) Geben Sie für $a \neq 0$ die Menge B aller ganzen Zahlen k an, sodass die Gleichung (1) erfüllt ist.

Es ist $B =$.

Autor Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz CC BY-SA 4.0

Thema In dieser Aufgabe soll mithilfe der Potenzgesetze die Menge aller ganzen Zahlen k angegeben werden, die eine Gleichung der Form

$$\frac{(x^{m_1})^{k_1} \cdot y^k}{(x^{m_2})^{k_2} \cdot (x^{m_3})^{k_3}} = \frac{x^k \cdot (y^{m_5})^{k_5}}{(x^{m_4})^{k_4} \cdot (y^{m_6})^{k_6+a}} \tag{1.2.2}$$

unter den Bedingungen $a = 0$ in Aufgabenteil (a) und $a \neq 0$ in Aufgabenteil (b) erfüllen.

Vorkenntnisse Rechenregeln für reelle Zahlen, Potenzgesetze, Äquivalenzumformung, Angabe von Lösungsmengen

Randomisierung Um Aufgabenvarianten mit ähnlichem Schwierigkeitsgrad zu erhalten, werden die Basen x und y, die Exponenten $m_1, ..., m_6$ und die Exponenten $k_1, ..., k_6$ so ausgewählt, dass

- es für $a = 0$ genau eine ganze Zahl k gibt und es für $a \neq 0$ keine ganze Zahl k gibt, die die Gleichung (1.2.2) erfüllt,
- die Basen x und y gleich 2, 3 oder 5 und verschieden voneinander sind,
- genau zwei der Exponenten $m_1, ..., m_4$ gleich 1, ein Exponent gleich 2 und ein Exponent 2 oder 3 ist,
- einer der Exponenten m_5, m_6 gleich 2 und der andere Exponent gleich 2 oder 3 ist,
- die Exponenten $k_1, ..., k_6$ ganze Zahlen zwischen 2 und 15 sind.

Die Randomisierung erfolgt dabei so, dass sich keine Faktoren ohne Anwendung mindestens eines Potenzgesetzes zu eins aufheben.

Anpassungen keine

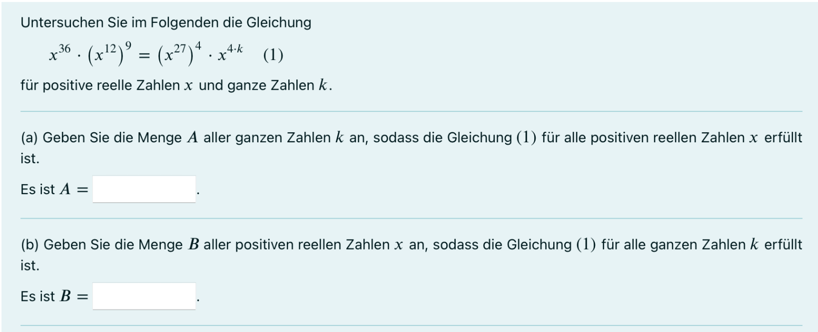
Verbotene Wörter solve, find_root, algsys

Sonderoption Feedback unterdrücken: ja
Multiplikationszeichen : Punkt

1.2.1.3 Potenzgesetze (3)

Tags Potenzgesetze, Äquivalenzumformung, Umformung

Screenshot (Stand 29.07.2024)



Untersuchen Sie im Folgenden die Gleichung

$$x^{36} \cdot \left(x^{12}\right)^9 = \left(x^{27}\right)^4 \cdot x^{4\cdot k} \quad (1)$$

für positive reelle Zahlen x und ganze Zahlen k.

(a) Geben Sie die Menge A aller ganzen Zahlen k an, sodass die Gleichung (1) für alle positiven reellen Zahlen x erfüllt ist.

Es ist $A =$.

(b) Geben Sie die Menge B aller positiven reellen Zahlen x an, sodass die Gleichung (1) für alle ganzen Zahlen k erfüllt ist.

Es ist $B =$.

Autor Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz CC BY-SA 4.0

Thema In dieser Aufgabe soll mithilfe der Potenzgesetze eine Gleichung der Form

$$x^{ck}\,x^{-ca}\,x^{-abc}\,x^{abc} = 1 \tag{1.2.3}$$

für positive reelle Zahlen x und ganze Zahlen k untersucht werden. Der Exponent lässt sich zu $c\,(k-a)$ vereinfachen. In Aufgabenteil (a) soll die Menge aller ganzen Zahlen k angegeben werden, die die Gleichung (1.2.3) für alle positiven reelle Zahlen x erfüllen. In Aufgabenteil (b) soll die Menge aller positiven reellen Zahlen x angegeben werden, die die Gleichung (1.2.3) für alle ganzen Zahlen k erfüllen.

Vorkenntnisse Rechenregeln für reelle Zahlen, Potenzgesetze, Äquivalenzumformung, Angabe von Lösungsmengen

Randomisierung Die Zahlen a, b und c werden zufällig als ganze Zahlen zwischen 2 und 7 gewählt. Die Exponenten und deren Darstellung sind dabei so randomisiert, dass sich keine Faktoren ohne Hilfe der Potenzgesetze zu eins aufheben. Die Position der Faktoren linksseitig oder rechtsseitig in Gleichung (1.2.3) ist randomisiert.

Anpassungen keine

Verbotene Wörter solve, find_root, algsys

Sonderoption Feedback unterdrücken: ja
Multiplikationszeichen : Punkt

1.2.1.4 Potenzgesetze (4)

Tags Potenzgesetze, Äquivalenzumformung, Umformung

Screenshot (Stand 29.07.2024)

> Untersuchen Sie im Folgenden die Gleichung
>
> $$\frac{x^{3\cdot k^2}}{x^{-24}} = x^{12\cdot k} \cdot x^{6\cdot k} \qquad (1)$$
>
> für positive reelle Zahlen x und ganze Zahlen k.
>
> (a) Geben Sie die Menge A aller ganzen Zahlen k an, sodass die Gleichung (1) für alle positiven reellen Zahlen x erfüllt ist.
>
> Es ist $A =$ ______.
>
> (b) Geben Sie die Menge B aller positiven reellen Zahlen x an, sodass die Gleichung (1) für alle ganzen Zahlen k erfüllt ist.
>
> Es ist $B =$ ______.

Autor Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz CC BY-SA 4.0

Thema In dieser Aufgabe soll mithilfe der Potenzgesetze eine Gleichung der Form

$$x^{ck^2}\, x^{-cak}\, x^{-cbk}\, x^{abc} = 1 \qquad (1.2.4)$$

für positive reelle Zahlen x und ganze Zahlen k untersucht werden. Der Exponent lässt sich zu $c\,(k-a)\,(k-b)$ vereinfachen. In Aufgabenteil (a) soll die Menge aller ganzen Zahlen k angegeben werden, die die Gleichung (1.2.4) für alle positiven reelle Zahlen x erfüllen. In Aufgabenteil (b) soll die Menge aller positiven reellen Zahlen x angegeben werden, die die Gleichung (1.2.4) für alle ganzen Zahlen k erfüllen.

Vorkenntnisse Rechenregeln für reelle Zahlen, Potenzgesetze, Äquivalenzumformung, Angabe von Lösungsmengen

Randomisierung Die Zahlen a, b und c werden zufällig als ganze Zahlen zwischen 2 und 7 gewählt. Die Exponenten und deren Darstellung sind dabei so randomisiert, dass sich keine Faktoren ohne Hilfe der Potenzgesetze zu eins aufheben. Die Position der Faktoren in Gleichung (1.2.4) und deren Darstellung im Zähler oder Nenner ist randomisiert.

Anpassungen keine

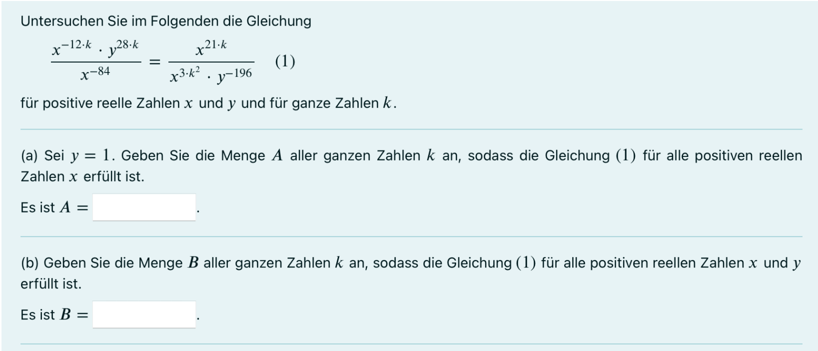
Verbotene Wörter solve, find_root, algsys

Sonderoption Feedback unterdrücken: ja
Multiplikationszeichen : Punkt

1.2.1.5 Potenzgesetze (5)

Tags — Potenzgesetze, Äquivalenzumformung, Umformung

Screenshot — (Stand 29.07.2024)



Untersuchen Sie im Folgenden die Gleichung

$$\frac{x^{-12\cdot k}\cdot y^{28\cdot k}}{x^{-84}} = \frac{x^{21\cdot k}}{x^{3\cdot k^2}\cdot y^{-196}} \quad (1)$$

für positive reelle Zahlen x und y und für ganze Zahlen k.

(a) Sei $y = 1$. Geben Sie die Menge A aller ganzen Zahlen k an, sodass die Gleichung (1) für alle positiven reellen Zahlen x erfüllt ist.

Es ist $A =$.

(b) Geben Sie die Menge B aller ganzen Zahlen k an, sodass die Gleichung (1) für alle positiven reellen Zahlen x und y erfüllt ist.

Es ist $B =$.

Autor — Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee — Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz — CC BY-SA 4.0

Thema — In dieser Aufgabe soll mithilfe der Potenzgesetze eine Gleichung der Form

$$x^{ck^2}\, x^{-cak}\, x^{-cbk}\, x^{abc}\, y^{abk}\, y^{-a^2b} = 1 \tag{1.2.5}$$

für positive reelle Zahlen x und y und ganze Zahlen k untersucht werden. Die Exponenten lassen sich zu $c\,(k-a)\,(k-b)$ und $a\,b\,(k-a)$ vereinfachen. In Aufgabenteil (a) soll die Menge aller ganzen Zahlen k angegeben werden, die die Gleichung (1.2.5) für alle positiven reelle Zahlen x und für $y = 1$ erfüllen. In Aufgabenteil (b) soll die Menge aller ganzen Zahlen k angegeben werden, die die Gleichung (1.2.5) für alle positiven reellen Zahlen x und y erfüllen.

Vorkenntnisse — Rechenregeln für reelle Zahlen, Potenzgesetze, Äquivalenzumformung, Angabe von Lösungsmengen

Randomisierung — Die Zahlen a, b und c werden zufällig als ganze Zahlen zwischen 2 und 7 gewählt. Die Exponenten und deren Darstellung sind dabei so randomisiert, dass sich keine Faktoren ohne Hilfe der Potenzgesetze zu eins aufheben. Die Position der Faktoren in Gleichung (1.2.5) und deren Darstellung im Zähler oder Nenner ist randomisiert.

Anpassungen — keine

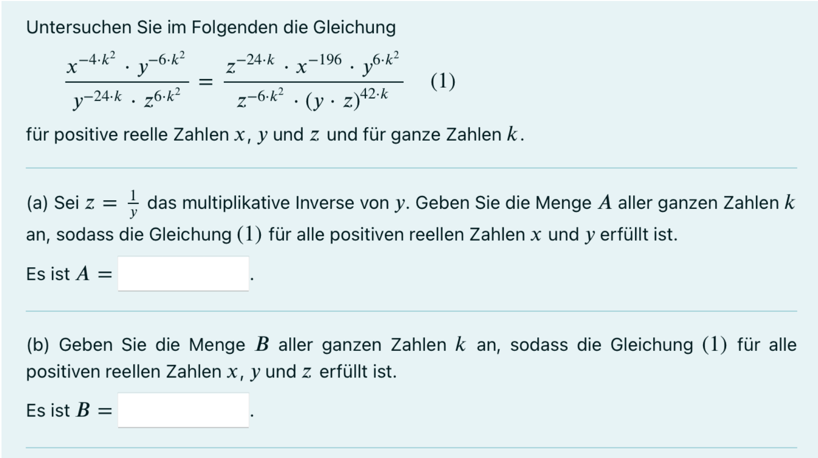
Verbotene Wörter — solve, find_root, algsys

Sonderoption — Feedback unterdrücken: ja
Multiplikationszeichen : Punkt

1.2.1.6 Potenzgesetze (6)

Tags: Potenzgesetze, Äquivalenzumformung, Umformung

Screenshot: (Stand 29.07.2024)



Autor: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: In dieser Aufgabe soll mithilfe der Potenzgesetze eine Gleichung der Form

$$x^{ak^2}\, x^{-ac^2}\, (yz)^{bk^2}\, (yz)^{-abk}\, (yz)^{-bck}\, (yz)^{abc} = 1 \qquad (1.2.6)$$

für positive reelle Zahlen x, y und z und ganze Zahlen k untersucht werden. Die Exponenten zu den Basen x und yz lassen sich zu $a\,(k-c)\,(k+c)$ bzw. $b\,(k-c)\,(k-a)$ vereinfachen. In Aufgabenteil (a) soll die Menge aller ganzen Zahlen k angegeben werden, die die Gleichung (1.2.6) für alle positiven reelle Zahlen x, y und für $z = \frac{1}{y}$ erfüllen. In Aufgabenteil (b) soll die Menge aller ganzen Zahlen k angegeben werden, die die Gleichung (1.2.6) für alle positiven reellen Zahlen x, y und z erfüllen.

Vorkenntnisse: Rechenregeln für reelle Zahlen, Potenzgesetze, Äquivalenzumformung, Angabe von Lösungsmengen

Randomisierung: Die Zahlen a, b und c werden zufällig als ganze Zahlen zwischen 2 und 7 gewählt. Die Exponenten und deren Darstellung sind dabei so randomisiert, dass sich keine Faktoren ohne Hilfe der Potenzgesetze zu eins aufheben. Die Position der Faktoren in Gleichung (1.2.6) und deren Darstellung im Zähler oder Nenner ist randomisiert.

Anpassungen: keine

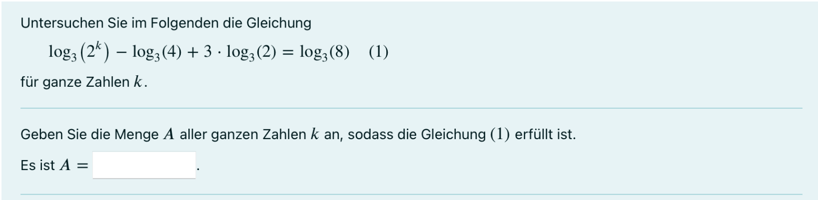
Verbotene Wörter: solve, find_root, algsys

Sonderoption: Feedback unterdrücken: ja
Multiplikationszeichen : Punkt

1.2.2 Logarithmusgesetze

1.2.2.1 Logarithmusgesetze (1)

Tags	Logarithmus, Logarithmusgesetze, Äquivalenzumformung, Umformung
Screenshot	(Stand 29.07.2024)



Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll mithilfe der Logarithmusgesetze die Menge aller ganzen Zahlen k bestimmt werden, die die Gleichung der Form $$\log_x(y^k) + b\,\log_x(y) = \log_x(y^a) + \log_x(y^b) \qquad (1.2.7)$$ erfüllen. Der Vorfaktor von $\log_x(y)$ lässt sich zu $k - a$ vereinfachen.
Vorkenntnisse	Rechenregeln für reelle Zahlen, Potenzgesetze, Logarithmusgesetze, Äquivalenzumformung, Angabe von Lösungsmengen
Randomisierung	Die Zahlen a und b werden zufällig als ganze Zahlen zwischen 2 und 4 gewählt, sodass a und b verschieden sind . Die Basis x und Argument y werden zufällig als ganze Zahlen aus 2 und 3 gewählt, sodass x und y verschieden sind. Die Darstellung der Gleichung (1.2.7) ist so randomisiert, dass sich keine Summanden ohne Hilfe mindestens eines Logarithmusgesetzes zu null aufheben. Die Position der Summanden in Gleichung (1.2.7) ist randomisiert.
Anpassungen	keine
Verbotene Wörter	solve, find_root, algsys
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja Multiplikationszeichen : Punkt

1.2.2.2 Logarithmusgesetze (2)

Tags: Logarithmus, Logarithmusgesetze, Äquivalenzumformung, Umformung

Screenshot: (Stand 29.07.2024)

> Untersuchen Sie im Folgenden die Gleichung
>
> $$\log_2\left(3^k \cdot 5^k\right) = \log_2\left(5^{a+3}\right) + 3 \cdot \log_2(3) \quad (1)$$
>
> für ganze Zahlen k.
>
> zu (a) Geben Sie für $a = 0$ die Menge A aller ganzen Zahlen k an, sodass die Gleichung (1) erfüllt ist.
>
> Es ist $A =$ ______ .
>
> zu (b) Geben Sie für $a \neq 0$ die Menge B aller ganzen Zahlen k an, sodass die Gleichung (1) erfüllt ist.
>
> Es ist $B =$ ______ .

Autor: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: In dieser Aufgabe soll mithilfe der Logarithmusgesetze die Menge aller ganzen Zahlen angegeben werden, die eine Gleichung der Form

$$\log_z((x\,y)^k) = b\,\log_z(x) + \log_z(y^{a+b}) \tag{1.2.8}$$

unter den Bedingungen $a = 0$ in Aufgabenteil (a) und $a \neq 0$ in Aufgabenteil (b) erfüllen. Die Vorfaktoren von $\log_z(x)$ und $\log_z(y)$ lassen sich zu $k - b$ bzw. $k - b + a$ vereinfachen.

Vorkenntnisse: Rechenregeln für reelle Zahlen, Potenzgesetze, Logarithmusgesetze, Äquivalenzumformung, Angabe von Lösungsmengen

Randomisierung: Die Argumente x, y, die Basis z und der Exponent bzw. Vorfaktor b werden zufällig so ausgewählt, dass

- es für $a = 0$ genau eine ganze Zahl k gibt und es für $a \neq 0$ keine ganze Zahl k gibt, die die Gleichung (1.2.8) erfüllt,
- die Argumente x, y und die Basis z gleich 2, 3 oder 5 und verschieden voneinander sind,
- der Exponent bzw. Vorfaktoren b gleich 2, 3 oder 4 ist.

Die Randomisierung erfolgt dabei so, dass sich keine Summanden ohne Anwendung mindestens eines Logarithmusgesetzes zu null aufheben. Die Position der Summanden in Gleichung (1.2.8) ist randomisiert.

Anpassungen: keine

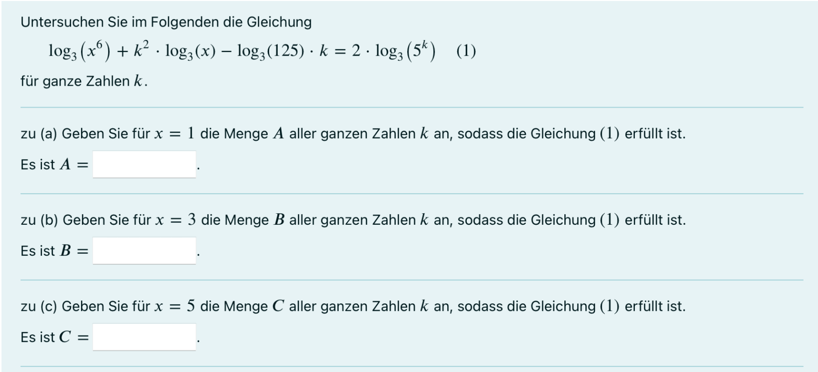
Verbotene Wörter: solve, find_root, algsys

Sonderoption: Feedback unterdrücken: ja
Multiplikationszeichen : Punkt

1.2.2.3 Logarithmusgesetze (3)

Tags: Logarithmus, Logarithmusgesetze, Äquivalenzumformung, Umformung

Screenshot: (Stand 29.07.2024)



Autor: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: In dieser Aufgabe soll mithilfe der Logarithmusgesetze die Menge aller ganzen Zahlen angegeben werden, die eine Gleichung der Form

$$k^2 \log_z(x) + \log_z(x^{a\,b}) = k \log_z(y^a) + b \log_z(y^k) \tag{1.2.9}$$

unter den Bedingungen $x = 1$ in Aufgabenteil (a) $x = z$ in Aufgabenteil (b) und $x = y$ in Aufgabenteil (c) erfüllen. Die Vorfaktoren von $\log_z(x)$ und $\log_z(y)$ lassen sich zu $k^2 - ab$ bzw. $-k\,(a + b)$ vereinfachen.

Vorkenntnisse: Rechenregeln für reelle Zahlen, Potenzgesetze, Logarithmusgesetze, Äquivalenzumformung, Angabe von Lösungsmengen

Randomisierung: Das Argumente y, die Basis z und die Exponenten bzw. Vorfaktoren a und b werden zufällig so ausgewählt, dass

- es für $x = 0$ genau eine ganze Zahl k, es für $x = z$ keine ganze Zahl k gibt und es für $x = y$ genau zwei ganze Zahlen k, die die Gleichung (1.2.8) erfüllen,
- das Argument y und die Basis z gleich 2, 3 oder 5 und verschieden voneinander sind,
- die Exponenten bzw. Vorfaktoren a und b gleich 2, 3 oder 4 und verschieden voneinander sind.

Die Randomisierung erfolgt dabei so, dass sich keine Summanden ohne Anwendung mindestens eines Logarithmusgesetzes zu null aufheben. Die Position der Summanden in Gleichung (1.2.9) ist randomisiert.

Anpassungen: keine

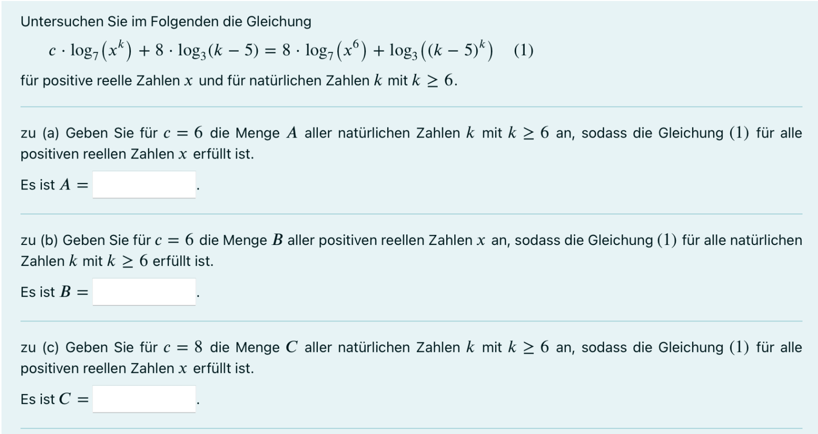
Verbotene Wörter: solve, find_root, algsys

Sonderoption: Feedback unterdrücken: ja
Multiplikationszeichen : Punkt

1.2.2.4 Logarithmusgesetze (4)

Tags: Logarithmus, Logarithmusgesetze, Äquivalenzumformung, Umformung

Screenshot: (Stand 29.07.2024)



Untersuchen Sie im Folgenden die Gleichung

$$c \cdot \log_7\left(x^k\right) + 8 \cdot \log_3(k-5) = 8 \cdot \log_7\left(x^6\right) + \log_3\left((k-5)^k\right) \quad (1)$$

für positive reelle Zahlen x und für natürlichen Zahlen k mit $k \geq 6$.

zu (a) Geben Sie für $c = 6$ die Menge A aller natürlichen Zahlen k mit $k \geq 6$ an, sodass die Gleichung (1) für alle positiven reellen Zahlen x erfüllt ist.

Es ist $A =$.

zu (b) Geben Sie für $c = 6$ die Menge B aller positiven reellen Zahlen x an, sodass die Gleichung (1) für alle natürlichen Zahlen k mit $k \geq 6$ erfüllt ist.

Es ist $B =$.

zu (c) Geben Sie für $c = 8$ die Menge C aller natürlichen Zahlen k mit $k \geq 6$ an, sodass die Gleichung (1) für alle positiven reellen Zahlen x erfüllt ist.

Es ist $C =$.

Autor: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: In dieser Aufgabe soll mithilfe der Logarithmusgesetze eine Gleichung der Form

$$c\,\log_z(x^k) + a\,\log_y(l) = a\,\log_z(x^b) + \log_y(l^k) \tag{1.2.10}$$

mit $l = k - b + 1$ für positive reelle Zahlen x und für ganze Zahlen k untersucht werden. Es soll die Menge aller ganzen Zahlen k mit $k \geq b$ angegeben werden, die für alle positiven reellen Zahlen x die Gleichung (1.2.10) unter den Bedingungen $c = b$ in Aufgabenteil (a) und $c = a$ in Aufgabenteil (c) erfüllen. In Aufgabenteil (b) soll die Menge aller positiven reellen Zahlen angegeben werden, die für alle ganzen Zahlen k mit $k \geq b$ die Gleichung (1.2.10) unter der Bedingungen $c = b$ erfüllen. Die Vorfaktoren von $\log_z(x)$ und $\log_y(l)$ lassen sich zu $ck - ab$ bzw. $-(k-a)$ vereinfachen.

Randomisierung: Die Basen y und z werden zufällig und paarweise verschieden voneinander aus 2, 3, 5 und 7 und die Exponenten a und b aus 4, 6, 8 und 10 mit $a > b$ ausgewählt. Die Randomisierung erfolgt dabei so, dass sich keine Summanden ohne Anwendung mindestens eines Logarithmusgesetzes zu null aufheben. Die Position der Summanden in Gleichung (1.2.10) ist randomisiert.

Anpassungen: Die Randomisierung der Basen y und z, der Exponenten a und b und der Position der Summanden in Gleichung (1.2.10) kann individuell gewählt werden.

Verbotene Wörter: solve, find_root, algsys

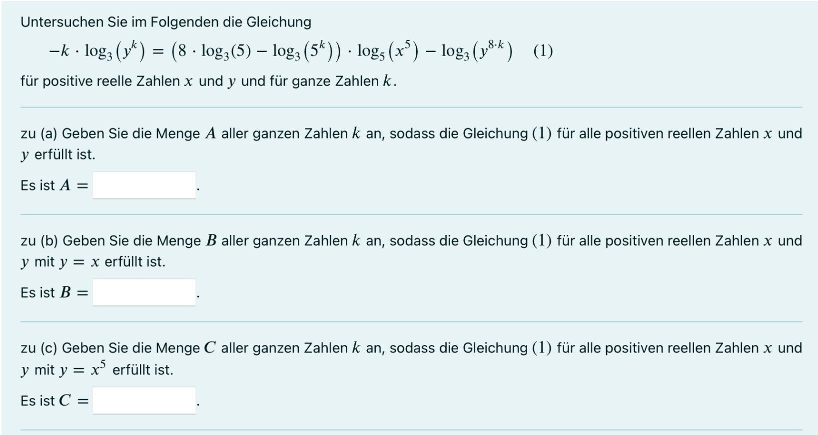
Sonderoption: Feedback unterdrücken: ja

Multiplikationszeichen : Punkt

1.2.2.5 Logarithmusgesetze (5)

Tags Logarithmus, Logarithmusgesetze, Äquivalenzumformung, Umformung

Screenshot (Stand 29.07.2024)


Untersuchen Sie im Folgenden die Gleichung

$$-k \cdot \log_3\left(y^k\right) = \left(8 \cdot \log_3(5) - \log_3\left(5^k\right)\right) \cdot \log_5\left(x^5\right) - \log_3\left(y^{8 \cdot k}\right) \quad (1)$$

für positive reelle Zahlen x und y und für ganze Zahlen k.

zu (a) Geben Sie die Menge A aller ganzen Zahlen k an, sodass die Gleichung (1) für alle positiven reellen Zahlen x und y erfüllt ist.

Es ist $A =$.

zu (b) Geben Sie die Menge B aller ganzen Zahlen k an, sodass die Gleichung (1) für alle positiven reellen Zahlen x und y mit $y = x$ erfüllt ist.

Es ist $B =$.

zu (c) Geben Sie die Menge C aller ganzen Zahlen k an, sodass die Gleichung (1) für alle positiven reellen Zahlen x und y mit $y = x^5$ erfüllt ist.

Es ist $C =$.

Autor Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz CC BY-SA 4.0

Thema In dieser Aufgabe soll mithilfe der Logarithmusgesetze die Menge aller ganzen Zahlen k bestimmt werden, die für alle positiven reellen Zahlen x und y eine Gleichung der Form

$$\begin{aligned} &\log_z(x^z)\,\log_w(z^k) + \log_w(y^{c\,k}) \\ &= c\,z\,\log_z(x)\,\log_w(z) + k\,\log_w(y^k) \end{aligned} \tag{1.2.11}$$

ohne weitere Bedingung in Aufgabenteil (a), unter der Bedingung $y = x$ in Aufgabenteil (b) und unter der Bedingung $y = x^z$ in Aufgabenteil (c) erfüllen. Die Vorfaktoren von $\log_z(x)$ und $\log_z(y)$ lassen sich zu $z\,(k-c)$ bzw. $k\,(k-c)$ vereinfachen.

Randomisierung Die Basen w und z werden zufällig und paarweise verschieden voneinander aus 2, 3, 5 und 7 und der Exponent c aus 4, 6 und 8 ausgewählt. Die Randomisierung erfolgt dabei so, dass sich keine Summanden ohne Anwendung mindestens eines Logarithmusgesetzes zu null aufheben. Die Position der Summanden in Gleichung (1.2.11) ist randomisiert.

Anpassungen Die Randomisierung der Basen w und z, des Exponenten c und der Position der Summand in Gleichung (1.2.11) kann individuell gewählt werden.

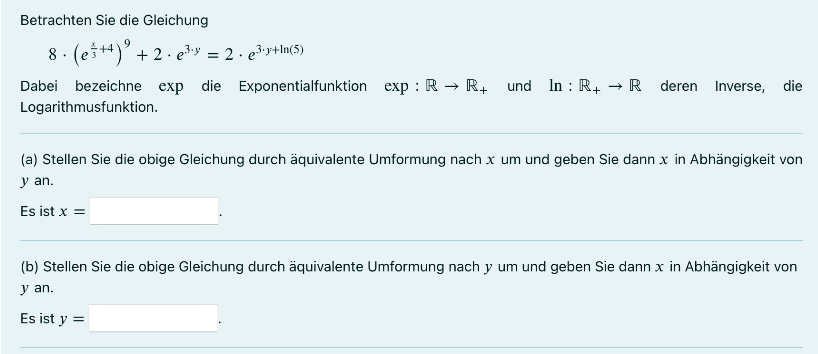
Verbotene Wörter solve, find_root, algsys

Sonderoption Feedback unterdrücken: ja

Multiplikationszeichen : Punkt

1.2.2.6 Potenz- und Logarithmusgesetze

Tags	Logarithmus, Exponentialfunktion, Logarithmusgesetze, Potenzgesetze, Äquivalenzumformung, Umformung
Screenshot	(Stand 29.07.2024)



Betrachten Sie die Gleichung

$$8 \cdot \left(e^{\frac{x}{3}+4}\right)^9 + 2 \cdot e^{3 \cdot y} = 2 \cdot e^{3 \cdot y + \ln(5)}$$

Dabei bezeichne exp die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ und $\ln : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ deren Inverse, die Logarithmusfunktion.

(a) Stellen Sie die obige Gleichung durch äquivalente Umformung nach x um und geben Sie dann x in Abhängigkeit von y an.

Es ist $x =$.

(b) Stellen Sie die obige Gleichung durch äquivalente Umformung nach y um und geben Sie dann x in Abhängigkeit von y an.

Es ist $y =$.

Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll mithilfe der Potenzgesetze und der Logarithmusgesetze die Gleichung

$$A \cdot e(N\,y) + B\,(e^{\frac{x}{C}+D})^E = A\,e^{N\,y+\ln(F)} \tag{1.2.12}$$

so äquivalent umgeformt werden, dass in Aufgabenteil (a) die Variable x in Abhängigkeit von y und in Aufgabenteil (b) die Variable y in Abhängigkeit von x angegeben werden können.

Randomisierung: Die Parameter A, C, D, F und N werden als zufällig ganze Zahlen mit

$$A,\ N \in \{2,3\},\ C \in \{2,3,4,5,6\},\ D \in \{1,2,3,4\},\ F \in \{5,7,9\}$$

gewählt. Die Parameter M, B, E und G sind definiert durch

$$M = F - 1, \quad B = M\,A, \quad E = M\,C, \quad G = C\,D.$$

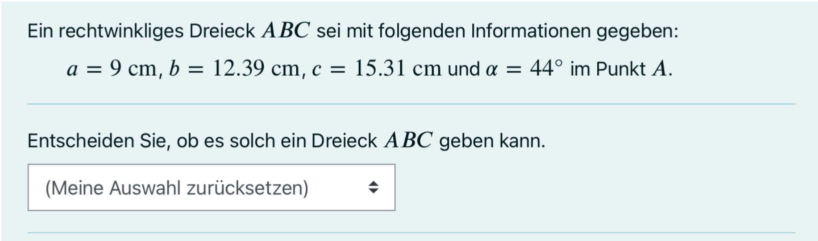
Die Randomisierung erfolgt so, dass sich keine Summanden ohne Anwendung mindestens eines Potenz- und Logarithmusgesetzes zu null aufheben. Die Darstellung der Terme auf der linken oder der rechten Seite von Gleichung 1.2.12 und die jeweilige Reihenfolge der Summanden ist randomisiert.

Anpassungen	keine
Verbotene Wörter	solve, find_root, algsys
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja Multiplikationszeichen : Punkt

1.2.3 Trigonometrie

1.2.3.1 Trigonometrie und Dreiecke (1)

Tags	Dreieck, Sinus, Anwendung, Geometrie, Trigonometrie
Screenshot	(Stand 27.08.2024)



Autor	Tim Inoue (Uni-DUE)
Idee	Tim Inoue
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe ist ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit den Seitenlängen a, b, c und dem Winkel α im Punkt A gegeben. Es soll entschieden werden, ob solch ein Dreieck dann existieren kann.
Vorkenntnisse	Geometrie, Trigonometrie, rechtwinkliges Dreieck
Randomisierung	Die Seitenlängen a, b, c und der Winkel α sind randomisiert.
Anpassungen	Das Dreieck ABC kann angepasst werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

1.2.3.2 Trigonometrie und Dreiecke (2)

Tags: Dreieck, Sinus, Anwendung, Geometrie, Trigonometrie

Screenshot: (Stand 27.08.2024)

> Gegeben sei ein Dreieck ABC mit den Seitenlängen
>
> $b = 1$ cm, $c = 2$ cm
>
> und dem Winkel
>
> $\gamma = 90°$
>
> im Punkt C.
>
> ---
>
> Berechnen Sie den zugehörigen Winkel α im Punkt A. Geben Sie das Ergebnis als Gradmaß an und runden Sie auf zwei Nachkommastellen.
>
> Es ist $\alpha \approx$ ____ °.

Autor	Tim Inoue (Uni-DUE)
Idee	Tim Inoue
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe ist ein Dreieck ABC mit den Seitenlängen b, c und dem rechten Winkel γ im Punkt C gegeben. Es soll der zugehörige Winkel α im Punkt A berechnet und auf 2 Nachkommastellen gerundet werden.
Vorkenntnisse	Geometrie, Trigonometrie, rechtwinkliges Dreieck
Randomisierung	Die Seitenlängen b und c sind randomisiert.
Anpassungen	Das Dreieck ABC kann angepasst werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

1.2.3.3 Sinusgleichung

Tags Gleichung, Additionstheoreme, Sinus, Trigonometrie

Screenshot (Stand 27.08.2024)

Gegeben ist die Gleichung

$$\sin(x+\pi) - \sin(x) = 2.$$

Bestimmen Sie die eindeutige Lösung $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Geben Sie π gegebenenfalls als `%pi` ein.

Es ist $x =$

Autor Tim Inoue (Uni-DUE)

Idee Tim Inoue

Lizenz CC BY-SA 4.0

Thema In dieser Aufgabe soll die Sinusgleichung

$$\sin(x+\pi) - \sin(x) = a$$

mit $a \in [-2, 2]$ eindeutig für $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ gelöst werden.

Vorkenntnisse Trigonometrie, Gleichungen lösen

Randomisierung Der Parameter a ist als ganzzahliger Anteil von π randomisiert.

Anpassungen Die Gleichung kann durch weitere trigonometrische Funktionen ergänzt werden.

Sonderoption Feedback unterdrücken: ja

1.2.3.4 Satellitenempfang

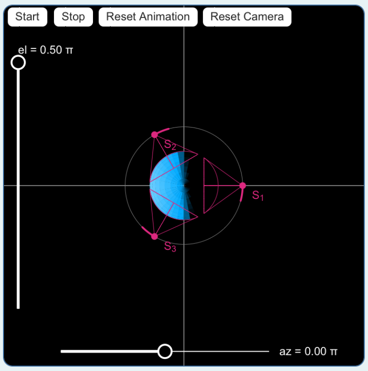
Tags: Geometrie, Trigonometrie

Screenshot: (Stand 29.07.2024)

Seien $S_1, \ldots, S_n$ künstliche Satelliten, die sich auf einem gemeinsamen konzentrischen äquatorialen Orbit mit Bahnradius $r = 6752.6\,\mathrm{km}$ um den Planeten Venus befinden. Entnehmen Sie die zur weiteren Untersuchung erforderlichen Größen der folgenden Tabelle.

Name	Masse [kg]	siderischer Tag [h]	Äquatordurchmesser [km]
Merkur	$3.301 \cdot 10^{23}$	1407.5	4879.4
Venus	$4.8675 \cdot 10^{24}$	5832.5	12103.6
Erde	$5.9722 \cdot 10^{24}$	23.93	12756.3
Mars	$6.417 \cdot 10^{23}$	24.6	6792.4

Die folgende Abbildung zeigt modellhaft $n = 3$ Satelliten S_1, S_2 und S_3 (Punkte •) auf ihrem gemeinsamen konzentrischen äquatorialen Orbit um den Planeten Erde (blaue Kugel) im Bezugssystem eines Beobachters auf der Erdoberfläche.



Bestimmen Sie mithilfe von Methoden der ebenen Geometrie die minimale Anzahl n an Satelliten, sodass an jedem Punkt des Äquators mindestens ein Satellit am Himmel steht.

Es ist $n =$ ______ .

Autor: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: In dieser Aufgabe soll mithilfe von Methoden der ebenen Geometrie die minimale Anzahl an Satelliten auf einem gemeinsamen konzentrischen, äquatorialen Orbit um einen Planten bestimmt werden, sodass an jedem Punkt des Äquators des Planeten mindestens ein Satellit am Himmel steht.

Vorkenntnisse: Geometrie, Trigonometrie, rechtwinkliges Dreieck, obere Gaußklammer

Randomisierung: Der Planet und sein Durchmesser werden zufällig aus einer Liste von vier Planeten (Merkur, Venus, Erde, Mars) ausgewählt. Der Bahnradius wird zufällig ausgewählt, sodass die minimal Anzahl der Satelliten eine Zahl zwischen 3 und 10 ist.

Anpassungen: Die unter Randomisierung angegebene Liste kann um weitere Planeten und ihre beschreibenden Größen ergänzt werden.

Verbotene Wörter: solve, find_root, algsys

Sonderoption: Feedback unterdrücken: ja

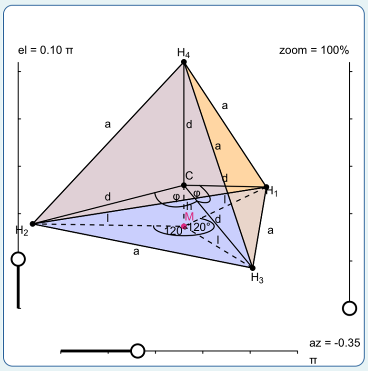
1.2.3.5 Tetraeder

Tags — Geometrie, Trigonometrie, Tetraeder

Screenshot — (Stand 29.07.2024)

Durch die Punkte H_1, H_2, H_3 und H_4 sei ein regelmäßiges Tetraeder mit Kantenlänge a und Mittelpunkt C gegeben. Bestimmen Sie mithilfe der (ebenen) Geometrie den Tetraederwinkel φ, der gegeben ist als der Innenwinkel am Punkt C in dem durch H_1, H_2 und C bestimmten Dreieck. Gehen Sie dazu wie folgt vor.

Die folgende Abbildung zeigt das oben beschriebene Tetraeder mit den in den weiteren Aufgabenteilen definierten Hilfslinien und -punkten.



(a) Der Schnittpunkt der Geraden durch H_4 und C mit der durch die Punkte H_1, H_2 und H_3 verlaufenden Ebene werde mit M bezeichnet. Sei l die Länge des von H_1 nach M verlaufenden Geradensegments. Bestimmen Sie l^2 in Abhängigkeit von a.

Es ist $l^2 =$ ____.

(b) Sei d die Länge des von C nach H_4 verlaufenden Geradensegments und sei h die Länge des von M nach C verlaufenden Geradensegments. Das von M nach H_4 verlaufende Geradensegment hat die Länge $H := d + h$. Bestimmen Sie H^2 in Abhängigkeit von a.

Es ist $H^2 =$ ____.

(c) Bestimmen Sie d in Abhängigkeit von a.

Es ist $d^2 =$ ____.

(d) Bestimmen Sie $\cos(\varphi)$ in Abhängigkeit von a.

Es ist $\cos(\varphi) =$ ____.

(e) Berechnen Sie φ Sie und geben Sie φ in Gradmaß bis auf 6 Nachkommastellen genau an.

Es ist $\varphi =$ ____°.

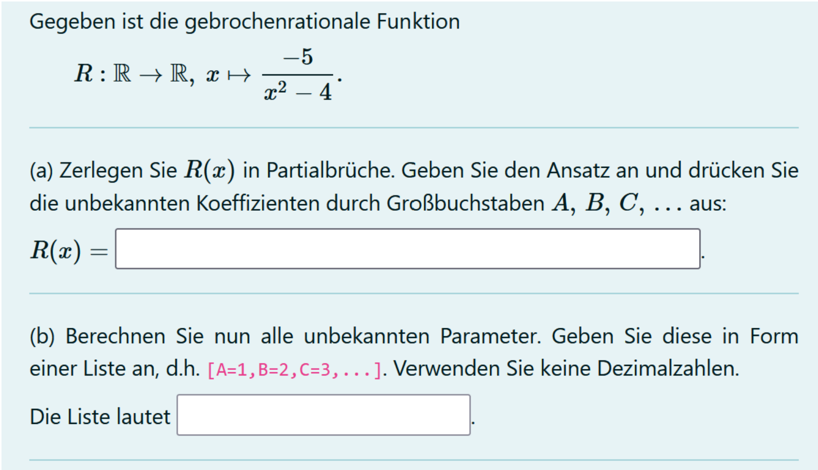
Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Eva Glasmachers
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll mithilfe von Methoden der ebenen Geometrie in mehreren Schritten der Winkel zwischen den Verbindungslinien der Ecken zum Mittelpunkt eines Tetraeders (verzerrter Winkel) bestimmt und in Gradmaß angegeben werden.
Vorkenntnisse	Geometrie, Trigonometrie, rechtwinkliges Dreieck
Randomisierung	Die Anzahl der Nachkommastellen bei der Angabe des verzerrten Winkels im Tetraeder wird zufällig zwischen 4, 5 und 6 ausgewählt.
Anpassungen	keine
Verbotene Wörter	solve, find_root, algsys
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

1.2.4 Partialbruchzerlegung

1.2.4.1 Partialbruchzerlegung (1)

Tags: Partialbruchzerlegung, PBZ.

Screenshot: (Stand 31.08.2024)



Autor: Michael Kubocz (RWTH)

Idee: Michael Kubocz

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: Eine echt gebrochenrationale Funktion $R(x)$ ist gegeben. Der Grad des Nennerpolynoms ist 2. In Aufgabenteil (a) wird der Ansatz mit unbekannten Koeffizienten (beliebige Buchstaben) für die Partialbruchzerlegung angegeben. In Aufgabenteil (b) werden die unbekannten Koeffizienten berechnet und in Form einer Liste angegeben.

Verbotene Wörter: partfrac.

Vorkenntnisse: Polynome und deren Nullstellen.

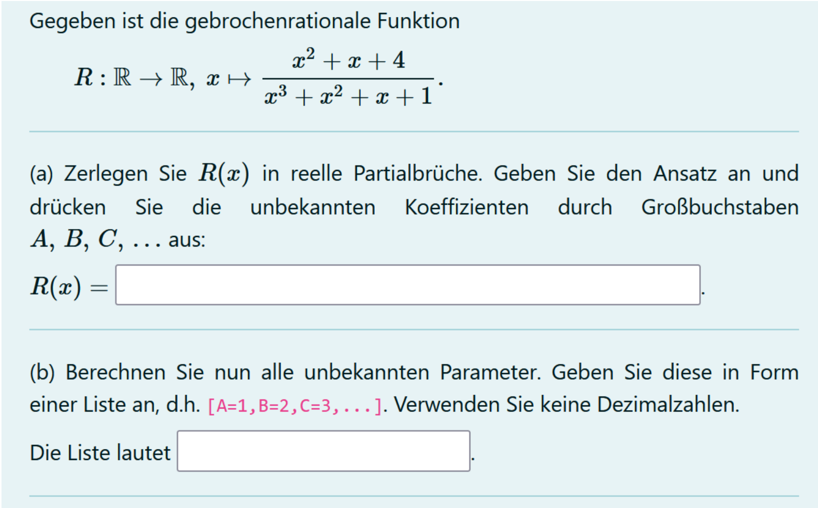
Randomisierung: Der Zähler und beide Nullstellen (voneinander abhängig) werden zufällig und als ganzzahlig gewählt.

Anpassung: Beide Nullstellen können unabhängig voneinander festgelegt werden.

Sonderoption: Feedback unterdrücken: ja.

1.2.4.2 Partialbruchzerlegung (2)

Tags	Partialbruchzerlegung, PBZ.
Screenshot	(Stand 31.08.2024)



Autor	Michael Kubocz (RWTH)
Idee	Michael Kubocz
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	Eine echt gebrochenrationale Funktion $R(x)$ ist gegeben. Der Grad des Zählerpolynoms ist 2 und der des Nennerpolynoms 3. In Aufgabenteil (a) wird der Ansatz mit unbekannten Koeffizienten (beliebige Buchstaben) für die Partialbruchzerlegung (Linearfaktor, im Reellen nichtzerlegbarer quadr. Term) angegeben. In Aufgabenteil (b) werden die unbekannten Koeffizienten berechnet und in Form einer Liste angegeben.
Verbotene Wörter	partfrac.
Vorkenntnisse	Polynome und deren Nullstellen, lineare Gleichungssysteme lösen.
Randomisierung	Monom von Grad 0 des Zählerpolynoms wird zufällig und als ganzzahlig gewählt.
Anpassung	Die Nullstelle des Linearfaktors und der quadr. Term können angepasst werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja.

1.2.4.3 Partialbruchzerlegung (3)

Tags	Partialbruchzerlegung, PBZ.
Screenshot	(Stand 31.08.2024)

Gegeben ist die gebrochenrationale Funktion

$$R:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto \frac{2}{x^4+4\,x^3+8\,x^2+16\,x+16}.$$

(a) Zerlegen Sie $R(x)$ in reelle Partialbrüche. Geben Sie den Ansatz an und drücken Sie die unbekannten Koeffizienten durch Großbuchstaben $A,\ B,\ C,\ \ldots$ aus:

$R(x) =$ ______.

(b) Berechnen Sie nun alle unbekannten Parameter. Geben Sie diese in Form einer Liste an, d.h. `[A=1,B=2,C=3,...]`. Verwenden Sie keine Dezimalzahlen.

Die Liste lautet ______.

Autor	Michael Kubocz (RWTH)
Idee	Michael Kubocz
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	Eine echt gebrochenrationale Funktion $R(x)$ ist gegeben. Der Grad des Nennerpolynoms ist 4. In Aufgabenteil (a) wird der Ansatz mit unbekannten Koeffizienten (beliebige Buchstaben) für die Partialbruchzerlegung (quadr. Linearfaktor, im Reellen nichtzerlegbarer quadr. Term) angegeben. In Aufgabenteil (b) werden die unbekannten Koeffizienten berechnet und in Form einer Liste angegeben.
Verbotene Wörter	partfrac.
Vorkenntnisse	Polynome und deren Nullstellen, lineare Gleichungssysteme lösen.
Randomisierung	Der Zähler, die Nullstelle des Linearfaktors und das Monom von Grad 0 des quadr. Terms werden zufällig und als ganzzahlig gewählt.
Anpassung	Keine.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja.

1.3 Zahlenräume

Dieser Themenbereich umfasst Aufgaben zu Zahlenräumen und Darstellungsformen. Aufgaben zu komplexen Zahlen umfassen die Darstellung komplexer Zahlen und die Lösung von komplexen Gleichungen. Zusätzlich wird die Bedeutung der Zahlendarstellung in der Informatik thematisiert, einschließlich der Operationen auf Binärzahlen und der Umrechnung zwischen verschiedenen Zahlensystemen.

Inhaltsverzeichnis

◀ ▲ ▶

1.3.1 Komplexe Zahlen

1.3.1.1 Real- und Imaginärteil (1)

Tags Komplexe Zahlen, Real- und Imaginärteil.

Screenshot (Stand 05.09.2024)

Berechnen Sie zu den Zahlen

$$z_1 = 3\,\mathrm{i} + 5, \qquad z_2 = \frac{-6\,\mathrm{i} - 4}{2}, \qquad z_3 = 9\,\mathrm{i} + 2,$$

den Real- und Imaginärteil folgender Ausdrücke. Dabei bezeichne z^* die zu z komplex konjugierte Zahl. Verwenden Sie keine Dezimalzahldarstellung für Brüche.

(a) $z_A = {z_1}^3 - 3\,{z_1}^2 + 2\,z_1$,

(i) $\mathrm{Re}\left(z_A\right) =$ ______,

(ii) $\mathrm{Im}\left(z_A\right) =$ ______.

(b) $z_B = \dfrac{z_1\,z_3}{4\,z_2 - z_3}$,

(i) $\mathrm{Re}\left(z_B\right) =$ ______,

(ii) $\mathrm{Im}\left(z_B\right) =$ ______.

(c) $z_C = \dfrac{(z_3^*)^2}{2\,z_2 + 2\,z_1 + \mathrm{i}}$,

(i) $\mathrm{Re}\left(z_C\right) =$ ______,

(ii) $\mathrm{Im}\left(z_C\right) =$ ______.

Autor Michael Kubocz (RWTH)

Idee Michael Kubocz

Lizenz CC BY-SA 4.0

Thema Drei komplexe Zahlen z_1, z_2 und z_3 sind in kartesischer Darstellung gegeben. In Aufgabenteilen (a), (b) und (c) werden die Real- und Imaginärteile von Kombinationen dieser Zahlen berechnet und angegeben.

Verbotene Wörter realpart, imagpart, conjugate.

Vorkenntnisse Real- und Imaginärteil.

Randomisierung Die kartesischen Koordinaten (x, y) werden zufällig und als ganzzahlig gewählt.

Anpassung Die kartesischen Koordinaten (x, y) können als reelle Zahlen beliebig gewählt werden.

Sonderoption Feedback unterdrücken: ja.

1.3.1.2 Real- und Imaginärteil (2)

Tags	Komplexe Zahlen, Real- und Imaginärteil, Eulerdarstellung, hyperbolische Funktionen, Trigonometrie, Additionstheoreme.
Screenshot	(Stand 05.09.2024)

Bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen:

$$z_1 = \frac{\exp\left(\frac{-3\,\pi\,\mathrm{i}}{4}\right)}{\exp\left(\frac{3\,\pi\,\mathrm{i}}{2}\right)}, \quad z_2 = \cos(\exp(-2\,\mathrm{i})), \quad z_3 = \tan(3\,\mathrm{i}).$$

Drücken Sie in Aufgabe (b) und (c) die Lösung mit Hilfe trigonometrischer und hyperbolischer Funktionen aus:

$$\sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}), \quad \cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}),$$

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}.$$

Verwenden Sie `sqrt(x)` für $\sqrt{x}$, `cos(x)` für den Cosinus, `sin(x)` für den Sinus, `cosh(x)` für den Cosinus hyperbolicus, `sinh(x)` für den Sinus hyperbolicus und `tanh(x)` für den Tangens hyperbolicus im Ergebnisfeld. Des Weiteren, geben Sie Brüche nicht in Dezimalform an.

(a) Es ist

(i) $\mathrm{Re}(z_1) =$ ______,

(ii) $\mathrm{Im}(z_1) =$ ______.

(b) Es ist

(i) $\mathrm{Re}(z_2) =$ ______,

(ii) $\mathrm{Im}(z_2) =$ ______.

(c) Es ist

(i) $\mathrm{Re}(z_3) =$ ______,

(ii) $\mathrm{Im}(z_3) =$ ______.

Autor	Michael Kubocz (RWTH)
Idee	Michael Kubocz
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	Drei komplexe Zahlen z_1, z_2 und z_3 sind gegeben. In Aufgabenteilen (a), (b) und (c) werden die Real- und Imaginärteile dieser Zahlen berechnet und angegeben. In Aufgabenteilen (b) und (c) sollen die Ergebnisse mit Hilfe trigonometrischer und hyperbolischer Funktionen ausgedrückt werden.
Verbotene Wörter	realpart, imagpart.
Vorkenntnisse	Real- und Imaginärteil, Eulerdarstellung, Additionstheoreme, hyperbolische Funktionen.
Randomisierung	Parameter in den Argumenten der verwendeten Funktionen werden zufällig und als ganzzahlig gewählt.
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja.

1.3.1.3 Real- und Imaginärteil (2) (ohne Hilfe)

Tags Komplexe Zahlen, Real- und Imaginärteil, Eulerdarstellung, hyperbolische Funktionen, Trigonometrie, Additionstheoreme.

Screenshot (Stand 05.09.2024)

Bestimmen Sie den Real- und Imaginärteil der folgenden komplexen Zahlen:

$$z_1 = \frac{\exp\left(\frac{3\,\pi\,\mathrm{i}}{4}\right)}{\exp\left(\frac{\pi\,\mathrm{i}}{2}\right)}, \quad z_2 = \cos(\exp(2\,\mathrm{i})), \quad z_3 = \tan(-4\,\mathrm{i}).$$

Drücken Sie in Aufgabe (b) und (c) die Lösung mit Hilfe trigonometrischer Funktionen und hyperbolischer Funktionen aus.

Verwenden Sie `sqrt(x)` für $\sqrt{x}$, `cos(x)` für den Cosinus, `sin(x)` für den Sinus, `cosh(x)` für den Cosinus hyperbolicus, `sinh(x)` für den Sinus hyperbolicus und `tanh(x)` für den Tangens hyperbolicus im Ergebnisfeld. Des Weiteren, geben Sie Brüche nicht in Dezimalform an.

(a) Es ist

(i) $\mathrm{Re}(z_1) =$ ______,

(ii) $\mathrm{Im}(z_1) =$ ______.

(b) Es ist

(i) $\mathrm{Re}(z_2) =$ ______,

(ii) $\mathrm{Im}(z_2) =$ ______.

(c) Es ist

(i) $\mathrm{Re}(z_3) =$ ______,

(ii) $\mathrm{Im}(z_3) =$ ______.

Autor Michael Kubocz (RWTH)

Idee Michael Kubocz

Lizenz CC BY-SA 4.0

Thema Drei komplexe Zahlen z_1, z_2 und z_3 sind gegeben. In Aufgabenteilen (a), (b) und (c) werden die Real- und Imaginärteile dieser Zahlen berechnet und angegeben. In Aufgabenteilen (b) und (c) sollen die Ergebnisse mit Hilfe trigonometrischer und hyperbolischer Funktionen ausgedrückt werden.

Verbotene Wörter realpart, imagpart.

Vorkenntnisse Real- und Imaginärteil, Eulerdarstellung, Additionstheoreme, hyperbolische Funktionen.

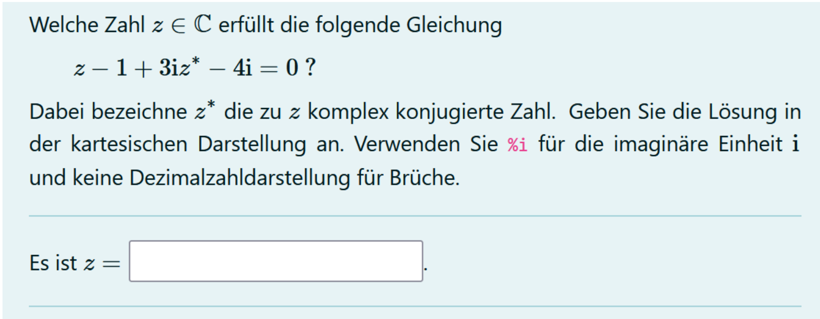
Randomisierung Parameter in den Argumenten der verwendeten Funktionen werden zufällig und als ganzzahlig gewählt.

Anpassung keine

Sonderoption Feedback unterdrücken: ja.

1.3.1.4 Komplexe Gleichung lösen

Tags	Komplexe Zahlen, Gleichung lösen.
Screenshot	(Stand 05.09.2024)



Autor	Michael Kubocz (RWTH)
Idee	Michael Kubocz
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	Ziel ist es eine komplexe Zahl in kartesischer Darstellung zu finden, welche die gegebene Gleichung löst.
Verbotene Wörter	solve, expand, rectform.
Vorkenntnisse	Real- und Imaginärteil, lineare Gleichungssysteme.
Randomisierung	Drei Gleichungsparameter werden zufällig und als ganzzahlig gewählt.
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja.

1.3.1.5 Eulerdarstellung

Tags	Komplexe Zahlen, Eulerdarstellung.
Screenshot	(Stand 05.09.2024)

Transformieren Sie die Zahlen $z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$ in die Euler-Darstelllung. Geben Sie hierbei die komplexe Phase ϕ im Intervall $[0,\ 2\pi[$ an.

Verwenden Sie `sqrt(x)` für $\sqrt{x}$, `atan(x)` für den Arkustangens und `%pi` für die Kreiszahl π im Ergebnisfeld. Des Weiteren, geben Sie Brüche nicht in Dezimalform an.

(a) $z_1 = \dfrac{1}{2-5\,\mathrm{i}} = \boxed{}\ \exp\left\{i\left[\boxed{}\right]\right\}$.

(b) $z_2 = \dfrac{1}{5-\sqrt{3}\,\mathrm{i}} = \boxed{}\ \exp\left\{i\left[\boxed{}\right]\right\}$.

Autor	Michael Kubocz (RWTH)
Idee	Michael Kubocz
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	Zwei komplexe Zahlen z_1 und z_2 sind in kartesischer Darstellung gegeben. In Aufgabenteilen (a) und (b) werden die Beträge und die Phasen beider Zahlen berechnet und angegeben.
Verbotene Wörter	simplify, factor, expand, solve, polarform, rectform.
Vorkenntnisse	Polarkoordinaten.
Randomisierung	Die kartesischen Koordinaten (x, y) werden zufällig und als ganzzahlig gewählt.
Anpassung	Die kartesischen Koordinaten (x, y) können als reelle Zahlen beliebig gewählt werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja.

1.3.1.6 Eulerdarstellung (reduziert)

Tags	Komplexe Zahlen, Eulerdarstellung.
Screenshot	(Stand 05.09.2024)

Transformieren Sie die Zahlen $z_1,\ z_2 \in \mathbb{C}$ in die Euler-Darstelllung. Geben Sie hierbei die komplexe Phase ϕ im Intervall $[0,\ 2\pi[$ an.

Verwenden Sie `sqrt(x)` für $\sqrt{x}$, `%e` für die Eulerzahl e, `%i` für die imganinäre Einheit i, `atan(x)` für den Arkustangens und `%pi` für die Kreiszahl π im Ergebnisfeld. Des Weiteren, geben Sie Brüche nicht in Dezimalform an.

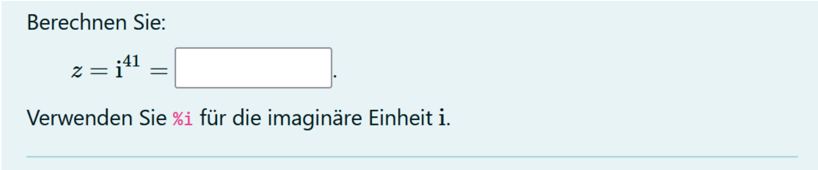
(a) $z_1 = \dfrac{1}{5\,\mathrm{i}+2} =$ ______.

(b) $z_2 = \dfrac{1}{-\sqrt{3}\,\mathrm{i}-2} =$ ______.

Autor	Michael Kubocz (RWTH)
Idee	Michael Kubocz
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	Zwei komplexe Zahlen z_1 und z_2 sind in kartesischer Darstellung gegeben. In Aufgabenteilen (a) und (b) wird die Eulerdarstellung beider Zahlen berechnet und angegeben.
Verbotene Wörter	simplify, factor, expand, solve, polarform, rectform.
Vorkenntnisse	Polarkoordinaten.
Randomisierung	Die kartesischen Koordinaten (x, y) werden zufällig und als ganzzahlig gewählt.
Anpassung	Die kartesischen Koordinaten (x, y) können als reelle Zahlen beliebig gewählt werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja.

1.3.1.7 Potenzen der Imaginären Einheit

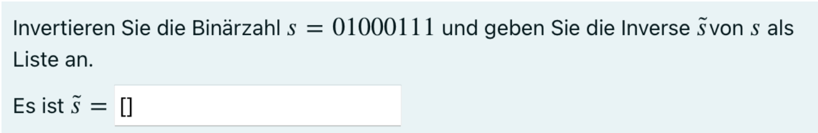
Tags	Komplexe Zahlen, Potenz.
Screenshot	(Stand 05.09.2024)



Autor	Michael Kubocz (RWTH)
Idee	Michael Kubocz
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	Ziel ist es eine hohe Potenz der imaginären Einheit i zu vereinfachen.
Verbotene Wörter	ˆ.
Vorkenntnisse	Real- und Imaginärteil.
Randomisierung	Exponent wird zufällig und als ganzzahlig gewählt.
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja.

1.3.2 Zahlendarstellung in der Informatik

1.3.2.1 Invertieren von Binärzahlen

Tags	zahlendarstellung, binaerzahlen
Screenshot	(Stand 27.08.2024) 
Autor	Hakim Günther (WH)
Idee	Hakim Günther
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll eine gegebene 8-Bit Binärzahl invertiert werden.
Vorkenntnisse	Grundlagen der Binärzahlen, Konzept der Invertierung in der Binärdarstellung
Randomisierung	Die zu invertierende 8-Bit Binärzahl wird zufällig generiert.
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: nein

1.3.2.2 Konvertieren von Binärzahlen zu Dezimalzahlen

Tags	zahlendarstellung, binaerzahlen
Screenshot	(Stand 27.08.2024) Konvertieren Sie die Binärzahl $s = 10001011$ in eine Dezimalzahl $\tilde{s}$. Gehen Sie davon aus, dass es sich um eine vorzeichenlose ganze Zahl handelt. Es ist $\tilde{s} =$.
Autor	Hakim Günther (WH)
Idee	Hakim Günther
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll eine gegebene 8-Bit Binärzahl in eine Dezimalzahl konvertiert werden.
Vorkenntnisse	Grundlagen der Binärzahlen, Konvertierung von Binär zu Dezimal
Randomisierung	Die zu konvertierende 8-Bit Binärzahl wird zufällig generiert.
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: nein

1.3.2.3 Addieren von zwei Binärzahlen

Tags	zahlendarstellung, binaerzahlen
Screenshot	(Stand 27.08.2024) Addieren Sie die Binärzahl $b_1 = 0100$ und $b_2 = 0100$. Gehen Sie davon aus, dass es sich um eine vorzeichenlose ganze Zahl handelt. Geben Sie das Ergebnis als Dezimalzahl an. $b_1 + b_2 =$
Autor	Hakim Günther (WH)
Idee	Hakim Günther
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe sollen zwei gegebene 4-Bit Binärzahlen addiert und das Ergebnis als Dezimalzahl angegeben werden.
Vorkenntnisse	Grundlagen der Binärzahlen, Addition von Binärzahlen, Konvertierung von Binär zu Dezimal
Randomisierung	Die beiden zu addierenden 4-Bit Binärzahlen werden zufällig generiert.
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: nein

2 Grundlagen der Linearen Algebra

2.1 Rechnen mit Vektoren

Dieser Themenbereich umfasst Aufgaben zu grundlegenden Eigenschaften und Darstellungsformen von Vektoren und zu elementaren Vektoroperationen. Weiterhin behandeln die Aufgaben Anwendungen aus der Physik, wie die Darstellung von Bewegungsrichtungen bei Stoßprozessen und die Darstellung von Kräften in Halteseilen.

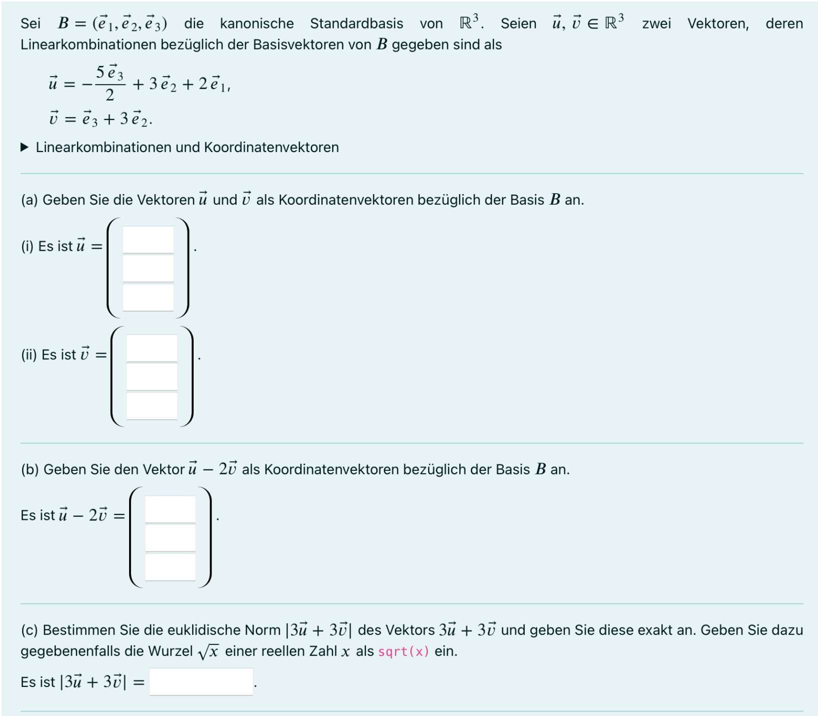
Inhaltsverzeichnis

◀ ▲ ▶

2.1.1 Linearkombination und Basisdarstellung

2.1.1.1 Elementare Vektoroperationen (1)

Tags	Koordinatenvektor, Vektorrechnung, Norm, Betrag
Screenshot	(Stand 29.07.2024)


Sei $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ die kanonische Standardbasis von $\mathbb{R}^3$. Seien $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$ zwei Vektoren, deren Linearkombinationen bezüglich der Basisvektoren von B gegeben sind als

$$\vec{u} = -\frac{5\,\vec{e}_3}{2} + 3\,\vec{e}_2 + 2\,\vec{e}_1,$$
$$\vec{v} = \vec{e}_3 + 3\,\vec{e}_2.$$

▶ Linearkombinationen und Koordinatenvektoren

(a) Geben Sie die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ als Koordinatenvektoren bezüglich der Basis B an.

(i) Es ist $\vec{u} =$.

(ii) Es ist $\vec{v} =$.

(b) Geben Sie den Vektor $\vec{u} - 2\vec{v}$ als Koordinatenvektoren bezüglich der Basis B an.

Es ist $\vec{u} - 2\vec{v} =$.

(c) Bestimmen Sie die euklidische Norm $|3\vec{u} + 3\vec{v}|$ des Vektors $3\vec{u} + 3\vec{v}$ und geben Sie diese exakt an. Geben Sie dazu gegebenenfalls die Wurzel $\sqrt{x}$ einer reellen Zahl x als `sqrt(x)` ein.

Es ist $|3\vec{u} + 3\vec{v}| =$.

Autor	Emma van der Smagt (RUB)
Idee	Emma van der Smagt
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	Zwei Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind als Linearkombination der kanonischen Standardbasis B von $\mathbb{R}^3$ gegeben. In Aufgabenteil (a) sollen die Koordinatenvektoren von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ bezüglich B berechnet werden. In Aufgabenteil (b) soll der Koordinatenvektor einer Linearkombination von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ berechnet werden. In Aufgabenteil (c) soll der Betrag einer Linearkombination von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ berechnet werden.
Vorkenntnisse	Koordinatenvektoren, Addition / Subtraktion von Vektoren, Betrag von Vektoren
Randomisierung	Die Komponenten der Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ werden zufällig als ganze Zahlen gewählt, sodass die Komponenten des Koordinatenvektors in Aufgabenteil (c) und dessen Betrag ein Pythagoreisches Quadrupel bilden.
Anpassung	Die Komponenten der Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ können als reelle Zahlen beliebig gewählt werden.
Sonderoption	Abzüge: 0 Feedback unterdrücken: ja

2.1.1.2 Vektoren als Verschiebung

Tags	Vektoren, Translation, Verschiebung
Screenshot	(Stand 29.07.2024)

Jeder Vektor $\vec{v}$ in $\mathbb{R}^2$ definiert eine Verschiebung (Translation)

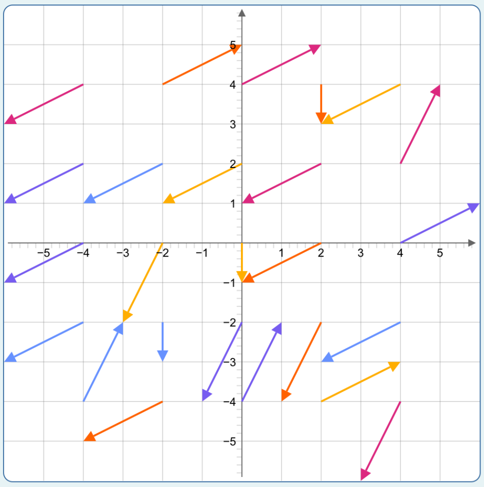
$$T_{\vec{v}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \; P \mapsto Q,$$

die jeden Punkt P auf den eindeutigen Punkt Q mit

$$\vec{v} = \overrightarrow{PQ}$$

abbildet. Der Vektor $\vec{v}$ lässt sich als Pfeil darstellen, der in einem beliebigen Punkt P beginnt und mit der Pfeilspitze im zugehörigen Punkt $Q = T_{\vec{v}}(P)$ endet.

Die folgende Abbildung stellt voneinander verschiedene Vektoren jeweils durch mehrere Pfeile im oben beschriebenen Sinne dar. Sie können die Pfeile zur bessern Übersicht durch Klicken und Halten verschieben.



(a) Geben Sie die Anzahl a der Pfeile an, die den Vektor $(-2, -1)$ darstellen.

Es ist $a =$ ____ .

(b) Geben Sie die Anzahl b der Pfeile an, die die Verschiebung darstellen, die $(-1, 1)$ auf $(1, 2)$ abbildet.

Es ist $b =$ ____ .

(c) Geben Sie die Anzahl c der Vektoren an, die die Verschiebung definieren, die $(0, 0)$ auf $(1, 2)$ abbildet.

Es ist $c =$ ____ .

(d) Geben Sie die Anzahl d der in der Abbildung dargestellten und voneinander verschiedenen Vektoren an.

Es ist $d =$ ____ .

Autoren	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
	Emma van der Smagt (RUB)
Idee	Emma van der Smagt
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe werden Vektoren in $\mathbb{R}^2$ mit der durch sie eindeutig bestimmten Translation $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ identifiziert und durch Vektorpfeile mit beliebigen Fußpunkten dargestellt. Eine Abbildung zeigt verschiedene Pfeile. In Aufgabenteil (a) soll die Anzahl aller Pfeile angegeben werden, die einen gegebenen Vektor repräsentieren. In Aufgabenteil (b) soll die Anzahl aller Pfeile angegeben werden, die eine gegebene Translation repräsentieren. In Aufgabenteil (c) soll die Anzahl aller Vektoren angegeben werden, die eine gegebene Translation definieren. In Aufgabenteil (d) soll die Anzahl aller durch Pfeile in der Abbildung repräsentierter und voneinander unterschiedlicher Vektoren angegeben werden.

Vorkenntnisse	Unterscheidung und Umgang verschiedener Darstellungsformen von Vektoren, Kenntnis von Verschiebungen oder Translationen
Randomisierung	Die Pfeile in der Abbildung und die in den Aufgabenteilen angegebenen Vektoren und Translationen werden zufällig gewählt.
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: nein

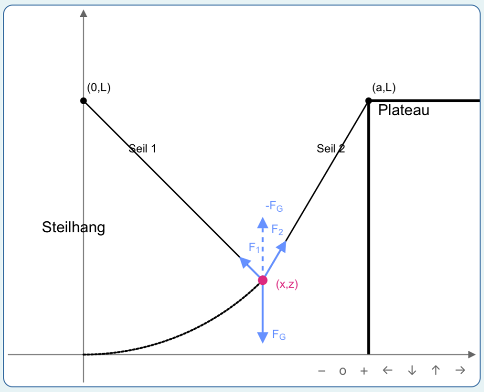
2.1.1.3 Bergsteigerin (1/2)

Tags	Vektorrechnung, Kräftegleichgewicht, Pythagoras, Trigonometrie
Screenshot	(Stand 29.07.2024)

An einem Steilhang hängt eine Bergsteigerin der Masse m im Seil der Länge L (Seil 1). Die Bergsteigerin wird mit einem weiteren Seil (Seil 2) von einem dem Steilhang im Abstand a gegenüber liegenden Plateau gehalten. Seil 1 ist am Steilhang genau in Höhe des Plateaus befestigt.

Berechnen Sie die Kraft $F_2(x)$, mit welcher eine Person auf dem Plateau die Bergsteigerin im Punkt (x, z) halten muss, wobei die Körpergröße der Person auf dem Plateau vernachlässigt wird. Gehen Sie dazu wie folgt vor.

Die folgende Abbildung stellt die in den Seilen 1 und 2 hängende Bergsteigerin dar. Für diese Aufgabe soll angenommen werden, dass sich der Fuß des Steilhangs am Punkt $(0, 0)$ und der Befestigungspunkt von Seil 1 am Punkt $(0, L)$ in der (x, z)-Ebene eines zweidimensionalen Koordinatensystems befindet. Der Befestigungspunkt von Seil 2 am Plateau befindet sich dann am Punkt (a, L).



(a) Leiten Sie eine Beziehung zwischen der Länge L von Seil 1 und der Position der Bergsteigerin her. Geben Sie dazu L^2 in Abhängigkeit der Komponenten x und z an.

Es ist $L^2 =$ ______.

(b) Leiten Sie eine Beziehung zwischen der Länge L von Seil 1 und der Position der Bergsteigerin her. Geben Sie dazu L^2 in Abhängigkeit der Komponenten x und z an.

Es ist $L^2 =$ ______.

(b) Die Bergsteigerin befindet sich im Kräftegleichgewicht. Die Gleichung, die das Kräftegleichgewicht beschreibt ist

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + |\vec{F}_G| = 0.$$

Vervollständigen Sie die folgenden Gleichungen so, dass diese das Kräftegleichgewicht in der x- und der z-Richtung beschreiben. Wählen Sie dazu die geeigneten Vorzeichen aus. Leere Eingaben werden als falsch bewertet.

Es gilt

in x-Richtung (I) ☐ $F_{1,x}$ ☐ $F_{2,x}$ ☐ $|F_G| = 0,$

in z-Richtung (II) ☐ $F_{1,z}$ ☐ $F_{2,z}$ ☐ $|F_G| = 0.$

(c) Berechnen Sie die x- und z-Komponenten der Kräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ in Abhängigkeit der x-Komponente der Position (x, z), der Seillänge L, dem Abstand a von Hang und Plateau, sowie den Beträgen $|\vec{F}_1|$ und $|\vec{F}_2|$. Setzen Sie zur Vereinfachung für die Beträge $|\vec{F}_1| = F_1$ und $|\vec{F}_2| = F_2$ und geben Sie diese als F_1 und F_2 ein.

(i) Die x-Komponente von $\vec{F}_1$ ist $F_{1,x}(x) =$ ______.

(ii) Die x-Komponente von $\vec{F}_2$ ist $F_{2,x}(x) =$ ______.

(iii) Die z-Komponente von $\vec{F}_1$ ist $F_{1,z}(x) =$ ______.

(iv) Die z-Komponente von $\vec{F}_2$ ist $F_{2,z}(x) =$ ______.

(d) Bestimmen Sie aus den Gleichungen (I) und (II) aus Aufgabenteil (a) die Kraft $F_2(x)$, mit der die Bergsteigerin vom Plateau aus im Punkt (x, z) gehalten werden muss. Die Kraft $F_2(x)$ hängt von der x-Komponente der Position (x, z), der Seillänge L, dem Abstand a von Hang und Plateau und der Gewichtskraft F_G ab.

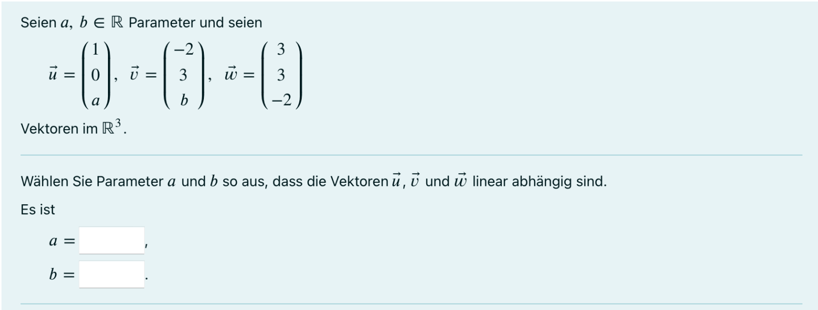
Es ist $F_2(x) =$ ______.

Autor	Emma van der Smagt (RUB)
Idee	Emma van der Smagt
Lizenz	CC BY-SA 4.0

Thema	An einem Steilhang hängt eine Bergsteigerin der Masse m im Seil der Länge L (Seil 1). Die Bergsteigerin wird mit einem weiteren Seil (Seil 2) von einem dem Steilhang im Abstand a gegenüber liegenden Plateau gehalten. Seil 1 ist am Steilhang genau in Höhe des Plateaus befestigt. In dieser Aufgabe sollen die Kräfte $\vec{F}_1(x)$ und $\vec{F}_2(x)$ berechnet werden, die entlang von Seil 1 beziehungsweise Seil 2 auf die Bergsteigerin an Punkt (x, z) wirken. In Aufgabenteil (a) soll dazu L^2 in Abhängigkeit von (x, z) bestimmt werden. In Aufgabenteil (b) soll das Gleichgewicht der Kräfte $\vec{F}_1(x)$, $\vec{F}_2(x)$ und der auf die Bergsteigerin wirkenden Gewichtskraft $\vec{F}_G$ in x- und z-Richtung durch Angabe der Vorzeichen der einzelnen Summanden angegeben werden. In Aufgabenteil (c) sollen die x- und y-Komponenten der Kräfte $\vec{F}_1$ und $\vec{F}_2$ in Abhängigkeit von (x, z) und den Beträgen $\|\vec{F}_1\|$ und $\|\vec{F}_2\|$ bestimmt werden. In Aufgabenteil (d) soll mithilfe der Aufgabenteil (b) und (c) schließlich die Kraft $\vec{F}_2$ in Abhängigkeit von (x, y), L, a und $\|\vec{F}_G\|$ bestimmt werden.
Vorkenntnisse	Kräftegleichgewicht mit Vektorrechnung, Satz von Pythagoras, Betrag eines Vektors
Randomisierung	keine
Anpassung	keine
Sonderoption	Abzüge : 0 Feedback unterdrücken : ja

2.1.2 Lineare (Un-)Abhängigkeit

2.1.2.1 Lineare Abhängigkeit (1)

Tags	Lineare Abhängigkeit, Vektorrechnung, Gleichungssystem, Determinante
Screenshot	(Stand 29.07.2024) 
Autor	Emma van der Smagt (RUB)
Idee	Emma van der Smagt
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe sind drei Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ in $\mathbb{R}^3$ gegeben. Die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind von unbestimmten Parametern a und b abhängig. Es sollen exemplarisch Werte für a und b angegeben werden, sodass die Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ linear abhängig sind.
Vorkenntnisse	Lineare Abhängigkeit von Vektoren, Lineare Gleichungssysteme, Determinante
Randomisierung	Die bestimmten Komponenten der Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ werden als ganze Zahlen zwischen -5 und 5 gewählt.
Anpassung	Die Komponenten der Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ können als ganze Zahlen beliebig gewählt werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

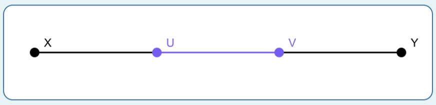
2.1.2.2 Lineare Abhängigkeit (2)

Tags	Lineare Abhängigkeit, Linearkombination
Screenshot	(Stand 29.07.2024)

Seien X, U, V, Y vier paarweise verschiedene Punkte in $\mathbb{R}^3$, die entlang einer Geraden in gegebener Reihenfolge angeordnet sind. Die Punkt U und V unterteilen die Strecke zwischen den Punkten X und Y in drei Teilstrecken gleicher Länge. Seien $\vec{x}$ und $\vec{y}$ die Ortsvektoren der Punkt X und Y und seien $\vec{u}$ und $\vec{v}$ die Ortsvektoren der Punkte U und V mit

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Die folgende Abbildung zeigt die beschriebene Situation exemplarisch in der Abbildungsebene.



(a) Bestimmen Sie die Ortsvektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ als Linearkombinationen der Ortsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$. Geben Sie dazu die Koeffizienten an.

(i) Es ist $\vec{x} =$ ___ $\cdot\vec{u} +$ ___ $\cdot\vec{v}$.

(ii) Es ist $\vec{y} =$ ___ $\cdot\vec{u} +$ ___ $\cdot\vec{v}$.

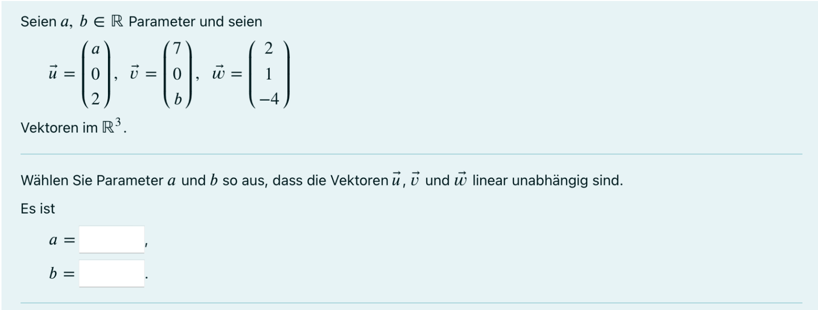
(b) Bestimmen Sie die Ortsvektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ der Punkte X und Y.

(i) Es ist $\vec{x} = \begin{pmatrix} \_ \\ \_ \\ \_ \end{pmatrix}$.

(ii) Es ist $\vec{y} = \begin{pmatrix} \_ \\ \_ \\ \_ \end{pmatrix}$.

Autor	Emma van der Smagt (RUB)
Idee	Emma van der Smagt
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	Entlang einer Geraden sind die vier paarweise verschiedenen Punkt X, U, V und Y in dieser Reihenfolge äquidistant angeordnet. Die Ortsvektoren der Punkt U und V sind explizit angegeben. In Aufgabenteil (a) sollen Koeffizienten angegeben werden, sodass sich die Ortsvektoren von X und Y als Linearkominationen der Ortsvektoren von U und V darstellen lassen. In Aufgabenteil (b) sollen die Koordinaten der Ortsvektoren von X und Y berechnet werden.
Randomisierung	Die Komponenten der Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ werden als ganze Zahlen zwischen -5 und 5.
Anpassung	Die Komponenten der Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ können als ganze Zahlen beliebig gewählt werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

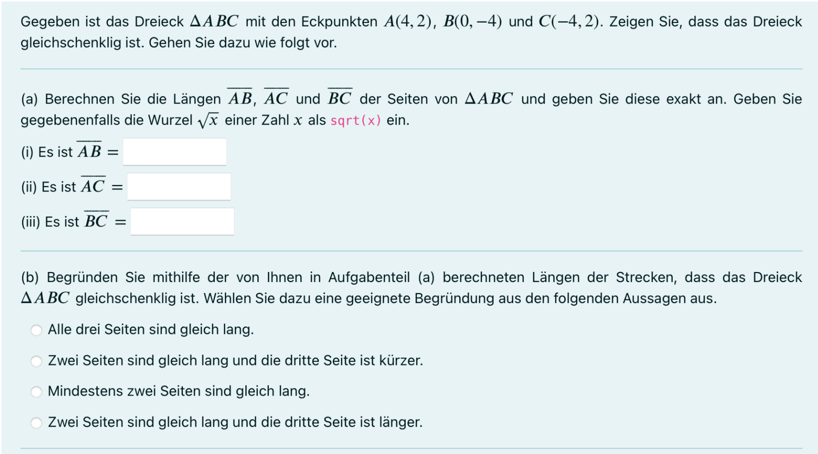
2.1.2.3 Lineare Unbhängigkeit

Tags	Lineare Abhängigkeit, Vektorrechnung, Gleichungssystem, Determinante
Screenshot	(Stand 29.07.2024) 
Autor	Emma van der Smagt (RUB)
Idee	Emma van der Smagt
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe sind drei Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ in $\mathbb{R}^3$ gegeben. Die Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind von unbestimmten Parametern a und b abhängig. Es sollen exemplarisch Werte für a und b angegeben werden, sodass die Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ linear unabhängig sind.
Vorkenntnisse	Lineare Unabhängigkeit von Vektoren, Lineare Gleichungssysteme, Determinante
Randomisierung	Die bestimmten Komponenten der Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ werden als ganze Zahlen zwischen -5 und 5 gewählt, sodass mindestens ein Paar von Parametern a und b existieren, sodass $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ linear unabhängig sind.
Anpassung	Die Komponenten der Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ können unter der Bedingung, dass $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ linear unabhängig sind, beliebig gewählt werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

2.1.3 Länge und Abstand

2.1.3.1 Gleichschenkliges Dreieck

Tags	gleichschenkliges Dreieck, Vektorrechnung, Vektorbetrag
Screenshot	(Stand 29.07.2024)



Autor	Emma van der Smagt (RUB)
Idee	Jörg Härterich Emma van der Smagt
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	Es sind drei Punkte A, B und C in $\mathbb{R}^2$ gegeben. In dieser Aufgabe wird gezeigt oder widerlegt, dass das durch die Punkt A, B und C definierte Dreieck gleichschenkelig ist. In Aufgabenteil (a) werden dazu die Längen der Seiten des Dreiecks berechnet und angegeben. In Aufgabenteil (b) wird eine vorformulierte Begründung als Antwort ausgewählt.
Vorkenntnisse	Richtungsvektor, Betrag eines Vektors
Randomisierung	Die Komponenten der Ortsvektoren der Punkte A, B und C werden zufällig als ganze Zahlen zwischen -5 und 5 ausgewählt, sodass die Punkte A, B und C ein Dreieck definieren.
Anpassung	Die Komponenten der Ortvektoren der Punkte A, B und C können als ganze Zahlen beliebig gewählt werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

2.1.3.2 Skiabfahrt

Tags: Betrag, Vektorrechnung

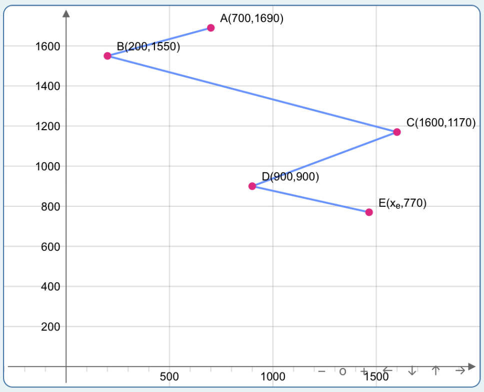
Screenshot: (Stand 29.07.2024)

Die Kandahar-Abfahrt in Garmisch gilt als eine der anspruchsvollsten Rennstrecken im alpinen Ski-Weltcup. Die Abfahrt eine Gesamtlänge von $3300\,\mathrm{m}$, startet bei einer Höhe von $1690\,\mathrm{m}$ und geht bei einer Höhe von $770\,\mathrm{m}$ ins Ziel. Die Abfahrt wird im Folgenden durch die Strecken $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ und $\overline{DE}$ zwischen den Punkten A, B, C, D und E mit

$$A = (700, 1690),$$
$$B = (200, 1550),$$
$$C = (1600, 1170),$$
$$D = (900, 900)$$
$$E = (x_e, 770)$$

im Profil modelliert.

Die folgende Abbildung zeigt das gewählte Modell der Abfahrt.



(a) Bestimmen Sie die Länge L der Abfahrt von A über B und C nach D und geben Sie L bis auf eine Dezimalstelle genau an.

Es ist $L =$.

(b) Bestimmen Sie die x-Koordinate x_e vom Zielpunkt E, wobei x_e als größer als die x-Koordinate D_x von Punkt D angenommen wird. Geben Sie x_e bis auf eine Dezimalstelle genau an.

Es ist $x_e =$.

Autor: Emma van der Smagt (RUB)

Idee: Emma van der Smagt

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: In dieser Aufgabe ist eine Skiabfahrt im Profil durch die aufeinander folgenden Wegstrecken zwischen Punkten A, B, C, D und E näherungsweise modelliert. Gegeben sind die x- und y-Koordinaten der Wegpunkte A, B, C und D, die Gesamtlänge der Strecke, sowie die y-Koordinate von Punktes E. In Aufgabenteil (a) soll die Länge des Teilstrecke der Abfahrt zwischen den Punkten A, B, C, D berechnet und bis auf eine Dezimalstelle genau angegeben werden. In Aufgabenteil (b) soll die fehlende x-Koordinaten x_e des Zielpunktes E berechnet und bis auf genau eine Dezimalstelle genau angegeben werden.

Vorkenntnisse:

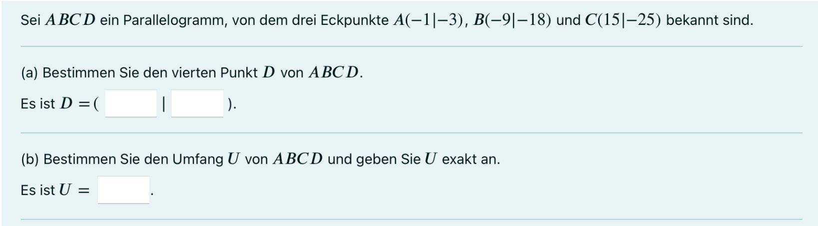
Randomisierung: Die x- und y-Koordinaten der Punkte A, B, C und D sowie die y-Koordinate des Punktes E werden zufällig gewählt.

Anpassung: keine

Sonderoption: Feedback unterdrücken: ja

2.1.3.3 Umfang von Parallelogrammen

Tags	Vektorrechnung, Umfang, Parallelogramm
Screenshot	(Stand 29.07.2024)



Autor	Emma van der Smagt (RUB)
Idee	Emma van der Smagt
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	Durch vier Punkte A, B, C und D in $\mathbb{R}^2$ ist ein Parallelogramm definiert. Die Koordinaten der Punkte A, B und C sind explizit angegeben. In Aufgabenteil (a) sollen die Koordinaten des Eckpunktes D berechnet werden. In Aufgabenteil (b) soll der Umfang des Parallelogramms bestimmt werden.
Vorkenntnisse	Länge von Vektoren, Vektoraddition und -subtraktion.
Randomisierung	Die Koordinaten der Punkte A, B und C sind zufällig als ganze Zahlen gewählt, sodass der Umfang in Aufgabenteil (b) eine positive ganze Zahl ist.
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

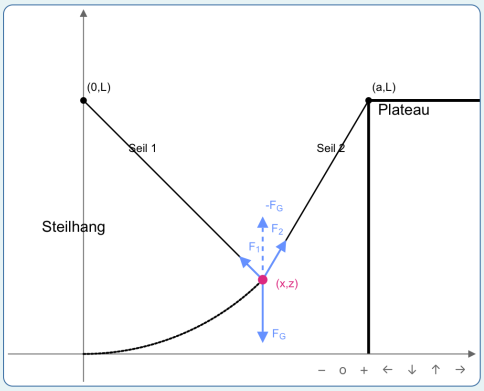
2.1.3.4 Bergsteigerin (2/2)

Tags	Vektorrechnung, Kräftegleichgewicht, Pythagoras, Trigonometrie
Screenshot	(Stand 29.07.2024)

An einem Steilhang hängt eine Bergsteigerin der Masse m im Seil der Länge L (Seil 1). Die Bergsteigerin wird mit einem weiteren Seil (Seil 2) von einem dem Steilhang im Abstand a gegenüber liegenden Plateau gehalten. Seil 1 ist am Steilhang genau in Höhe des Plateaus befestigt.

Die Zugkraft $\vec{F}_1$ des Seils 1 hält die Bergsteigerin in Richtung des Steilhangs. Die Kraft $\vec{F}_2$ ist die Kraft, mit welcher eine Person auf dem Plateau die Bergsteigerin im Punkt (x, z) halten muss. Zudem wirkt die Gewichtskraft $F_G = -mg$ auf die Bergsteigerin.

Die folgende Abbildung stellt die in den Seilen 1 und 2 hängende Bergsteigerin dar. Für diese Aufgabe soll angenommen werden, dass sich der Fuß des Steilhangs am Punkt $(0, 0)$ und der Befestigungspunkt von Seil 1 am Punkt $(0, L)$ in der (x, z)-Ebene eines zweidimensionalen Koordinatensystems befindet. Der Befestigungspunkt von Seil 2 am Plateau befindet sich dann am Punkt (a, L).



Die Kräfte $\vec{F}_1(x)$ und $\vec{F}_2(x)$, mit denen die Bergsteigerin im Punkt (x, z) von Seil 1 und Seil 2 gehalten wird, lassen sich in Abhängigkeit der x-Komponente der Position (x, z) der Bergsteigerin, der Seillänge L, dem Abstand a von Hang und Plateau, der Masse m der Bergsteigerin und der Schwerebeschleunigung g zu

$$\vec{F}_1(x) = \begin{pmatrix} -\frac{g\,m\,(a-x)\,x}{a\sqrt{L^2-x^2}} \\ \frac{g\,m\,(a-x)}{a} \end{pmatrix},$$

$$\vec{F}_2(x) = \begin{pmatrix} \frac{g\,m\,(a-x)\,x}{a\sqrt{L^2-x^2}} \\ \frac{g\,m\,x}{a} \end{pmatrix}$$

angeben. Zur Betrachtung von Grenzfällen der Kräfte müssen die Beträge dieser bestimmt werden.

(a) Bestimmen Sie die Beträge der Kräfte $\vec{F}_1(x)$ und $\vec{F}_2(x)$.

(i) Der Betrag von $\vec{F}_1(x)$ ist $|\vec{F}_1(x)| =$ ______.

(ii) Der Betrag von $\vec{F}_2(x)$ ist $|\vec{F}_2(x)| =$ ______.

(b) Untersuchen Sie die folgenden Grenzfälle der Beträge der Kräfte $\vec{F}_1(x)$ und $\vec{F}_2(x)$. Die Beträge der Kräfte werden durch $F_1(x) = |\vec{F}_1(x)|$ und $F_2(x) = |\vec{F}_2(x)|$ ausgedrückt.

(i) Für $x = a$ und $L \geq a$ ist

$F_1(x) =$ ______,

$F_2(x) =$ ______.

(ii) Für a gegen ∞ ist

$F_1(x) =$ ______,

$F_2(x) =$ ______.

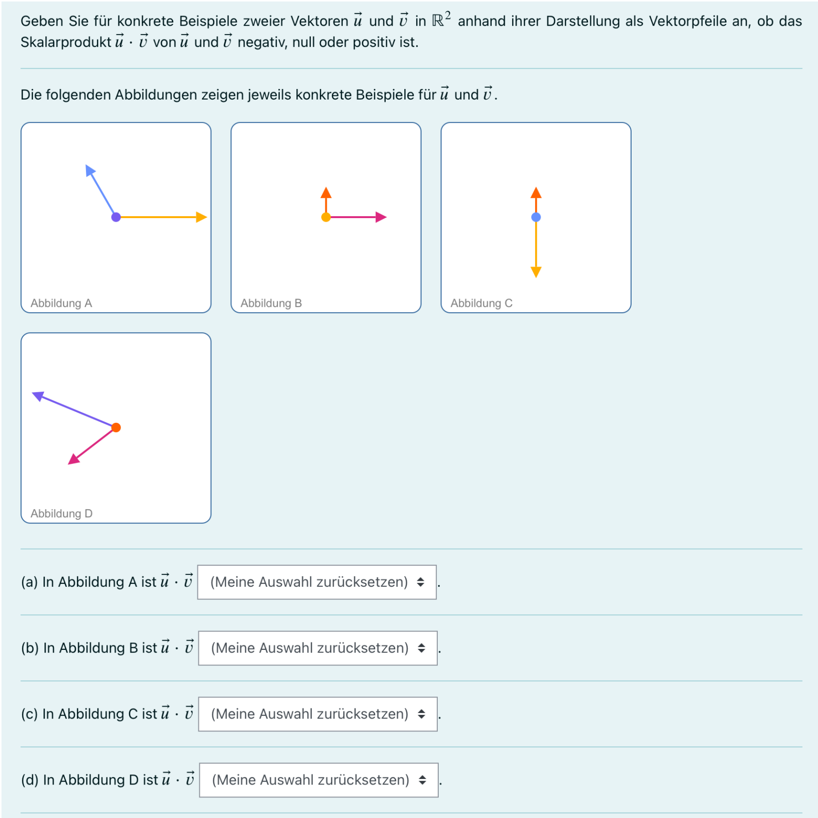
Autor	Emma van der Smagt (RUB)
Idee	Emma van der Smagt
Lizenz	CC BY-SA 4.0

Thema	An einem Steilhang hängt eine Bergsteigerin der Masse m im Seil der Länge L (Seil 1). Die Bergsteigerin wird mit einem weiteren Seil (Seil 2) von einem dem Steilhang im Abstand a gegenüber liegenden Plateau gehalten. Seil 1 ist am Steilhang genau in Höhe des Plateaus befestigt. Die Kräfte $\vec{F}_1(x)$ und $\vec{F}_2(x)$, die entlang von Seil 1 beziehungsweise Seil 2 auf die Bergsteigerin an Punkt (x, z) wirken, wurde in Aufgabe 2.1.1.3 bestimmt und sind hier angegeben. In Aufgabenteil (a) sollen die Beträge $\|\vec{F}_1\|$ und $\|\vec{F}_2\|$ bestimmt werden. In Aufgabenteil (b) sollen die Beträge $\|\vec{F}_1\|$ und $\|\vec{F}_2\|$ für die Grenzfälle (i) $x = a$ und $L \geq a$ und (ii) $a \to \infty$ untersucht werden.
Vorkenntnisse	Satz von Pythagoras, Betrag eines Vektors, Betrachtung von Grenzfällen
Randomisierung	keine
Anpassung	keine
Sonderoption	Abzüge : 0 Feedback unterdrücken : ja

2.1.4 Winkel und Skalarprodukt

2.1.4.1 Skalarprodukt (1)

Tags	Skalarprodukt
Screenshot	(Stand 29.07.2024)



Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB) Emma van der Smagt (RUB)
Idee	Emma van der Smagt
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe zeigen vier Abbildungen A bis D je zwei Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$, die an dem selben Punkt angeheftet sind. In den Aufgabenteilen (a) bis (d) soll jeweils eine wahre Aussage über das Signum des Skalarproduktes der in der zugehörigen Abbildung dargestellten Vektoren formuliert werden.
Vorkenntnisse	Skalarprodukt
Randomisierung	Der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$, sowie die Länge von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ werden zufällig gewählt.
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: nein

2.1.4.2 Skalarprodukt (2) (nichtorthogonale Basis)

Tags	Vektorrechnung, Skalarprodukt, nichtorthogonale Basis.
Screenshot	(Stand 22.08.2024)

Betrachten Sie eine normalisierte aber nicht orthogonale Basis $\{\vec{g}_1,\, \vec{g}_2,\, \vec{g}_3\} \in \mathbb{R}^3$ mit

$$\vec{g}_i \cdot \vec{g}_i = 1 \;\text{ mit }\; i = 1, 2, 3, \qquad \vec{g}_1 \cdot \vec{g}_2 = \frac{1}{2}, \qquad \vec{g}_3 \cdot \vec{g}_1 = \vec{g}_3 \cdot \vec{g}_2 = 0.$$

Weiter seien die folgenden Vektoren gegeben:

$$\vec{v}_1 = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 + \sqrt{3}\,\vec{g}_3, \qquad \vec{v}_2 = \vec{g}_1 + \vec{g}_2 - \sqrt{3}\,\vec{g}_3.$$

Berechnen Sie den Betrag des Vektors $|\vec{v}_i| = \sqrt{\vec{v}_i \cdot \vec{v}_i}$ für $i = 1, 2$ und das Skalarprodukt $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2$. Die Quadratwurzel $\sqrt{x}$ kann mit Hilfe von `sqrt(x)` eingegeben werden.

(a) Es ist $|\vec{v}_1| =$ ____.

(b) Es ist $|\vec{v}_2| =$ ____.

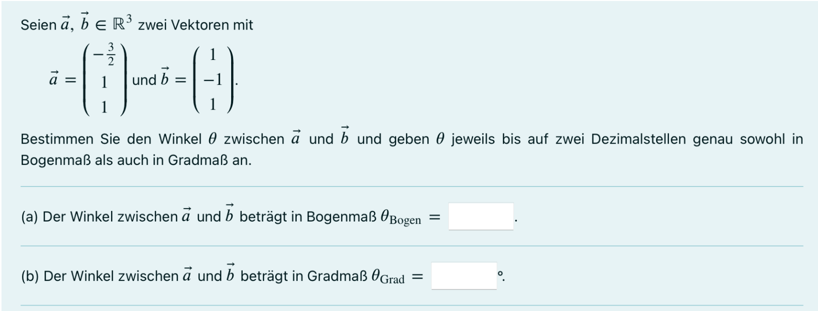
(c) Es ist $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 =$ ____.

Autor	Michael Kubocz (RWTH)
Idee	Michael Kubocz
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	Zwei Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ in $\mathbb{R}^3$ sind als Linearkombinationen der nichtorthogonalen Basisvektoren $\vec{g}_1$, $\vec{g}_2$ und $\vec{g}_3$ gegeben. In Aufgabenteil (a) wird der Betrag von $\vec{v}_1$ berechnet und angegeben. In Aufgabenteil (b) wird der Betrag von $\vec{v}_2$ berechnet und angegeben. In Aufgabenteil (c) wird das Standardskalarprodukt von $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ berechnet und angegeben.
Verbotene Wörter	.
Vorkenntnisse	Standardskalarprodukt, Betrag eines Vektors.
Randomisierung	Der Vorfaktor des Basisvektors $\vec{g}_3$ wird in den o.g. Linearkombinationen zufällig gewählt.
Anpassung	Keine.
Sonderoption	Abzüge: 0
	Feedback unterdrücken: ja

2.1.4.3 Winkel zwischen zwei Vektoren

Tags Bogenmaß, Gradmaß, Vektorrechnung, Winkel

Screenshot (Stand 29.07.2024)


Seien $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ zwei Vektoren mit

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie den Winkel θ zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ und geben θ jeweils bis auf zwei Dezimalstellen genau sowohl in Bogenmaß als auch in Gradmaß an.

(a) Der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ beträgt in Bogenmaß $\theta_{\text{Bogen}} =$.

(b) Der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ beträgt in Gradmaß $\theta_{\text{Grad}} =$ °.

Autor Emma van der Smagt (RUB)

Idee Emma van der Smagt

Lizenz CC BY-SA 4.0

Thema Gegeben sind die zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. In Aufgabenteil (a) soll der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in Bogenmaß berechnet und bis auf zwei Dezimalstellen genau angegeben werden. In Aufgabenteil (b) soll der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in Gradmaß berechnet und bis auf zwei Dezimalstellen genau angegeben werden.

Vorkenntnisse Winkel zwischen zwei Vektoren, Darstellungsformen von Winkeln

Randomisierung Die Komponenten der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ werden zufällig als rationale Zahlen gewählt.

Anpassung Die Komponenten der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ können beliebig als rationale Zahlen gewählt werden.

Sonderoption Feedback unterdrücken: nein

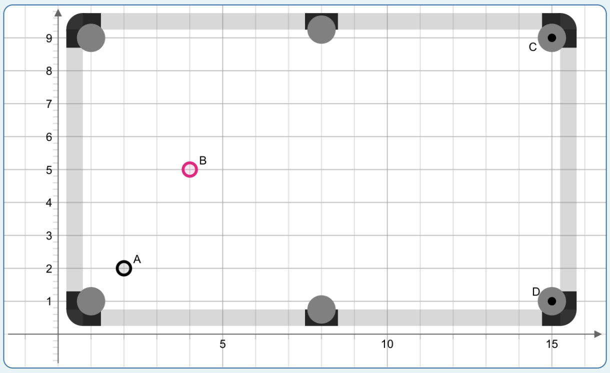
2.1.4.4 Kollision von Billardkugeln

Tags Vektorrechnung, Vektorbetrag, Winkel

Screenshot (Stand 29.07.2024)

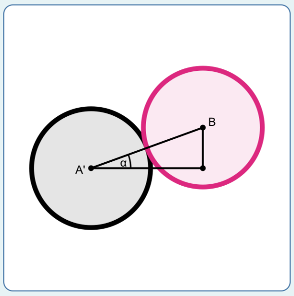
Die Spielfläche eines Billardtisches wird in Draufsicht als Teilmenge eines zweidimensionalen Koordinatensystem modelliert, wobei die Skalierung so gewählt ist, dass eine Längeneinheit im Koordinatensystem genau $1\,\mathrm{dm}$ entspricht. Zwei der vier Kanten der Spielfläche liegen auf den positiven Teilen der x- und der y-Achse liegen. Die Mittelpunkte zweier benachbarte Ecktaschen liegen an den Punkten $C(15|9)$ und $D(15|1)$. Die Mittelpunkte zweier Kugeln liegen an den Punkten $A(2|2)$ und $B(4|5)$, wobei beide Kugelneinem Durchmesser von jeweils $d = 57{,}2\,\mathrm{mm}$ haben.

Die folgende Abbildung zeigt die beschriebene Situation. Die Kugel an Punkt A ist durch ○ gekennzeichnet und die Kugel an Punkt B ist durch ○ gekennzeichnet. Die Ecktaschen an den Punkten C und D sind jeweils durch ● gekennzeichnet.



Die Kugel an Punkt A wird so gespielt, dass sie an Punkt A' mit der Kugel an Punkt B kollidiert und dass die Kugel an Punkt B direkt nach der Kollision zu Punkt C rollt. Der Kollisionswinkel, den die Gerade durch A' und B mit der Horizontalen einschließt, werde mit α bezeichnet. Beachten Sie, dass der Impuls hierbei nur entlang der Geraden durch A' und B übertragen wird.

Die folgende Abbildung zeigt die beiden Kugeln schematisch in der Draufsicht zum Zeitpunkt des Zusammenstoßes an den Punkten A' und B.



(a) Berechnen Sie den Kollisionswinkel α und geben Sie α in Gradmaß bis auf zwei Dezimalstellen genau an.

Es ist $\alpha =$ °.

(b) Berechnen Sie den Verbindungsvektor $\overrightarrow{A'B}$ und geben Sie $\overrightarrow{A'B}$ in dm bis auf zwei Dezimalstellen genau an.

Es ist $\overrightarrow{A'B} = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$ dm.

(c) Berechnen Sie den Verbindungsvektor $\overrightarrow{AA'}$ und geben Sie $\overrightarrow{AA'}$ in dm bis auf zwei Dezimalstellen genau an.

Es ist $\overrightarrow{AA'} = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix}$ dm.

(d) Berechnen Sie den analog zum Kollisionswinkel α den Winkel β, den die Gerade durch A und A' mit der Horizontalen einschließt, und geben Sie β in Gradmaß bis auf zwei Dezimalstellen genau an.

Es ist $\beta =$.

Autor Emma van der Smagt (RUB)

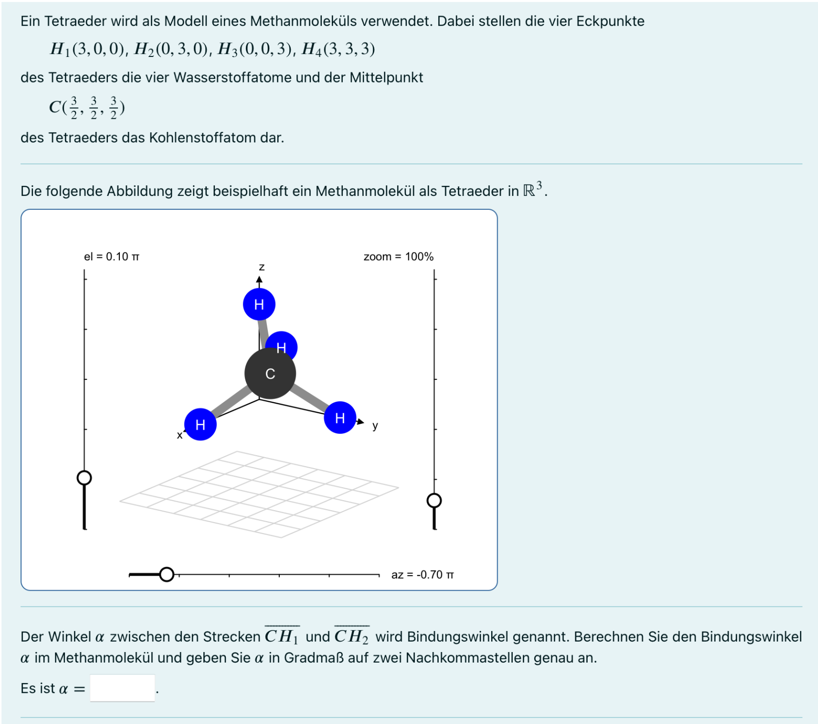
Idee Emma van der Smagt

Lizenz CC BY-SA 4.0

Thema	Eine Billardkugel wird angespielt und kollidiert mit einer weiteren Billardkugel, sodass letztere in eine der Ecktaschen des Billardtisches fällt. Mit Hilfe ebener Geometrie sollen in dieser Aufgabe Richtungsvektoren und Winkel bei der Kollision der beiden Kugeln untersucht werden. In Aufgabenteil (a) soll mithilfe der Positionen der Kugeln zum Zeitpunkt der Kollision und der Position der Ecktaschen der Kollisionswinkel α berechnet und bis auf zwei Dezimalstellen genau angegeben werden. In Aufgabenteil (b) soll der Verbindungsvektor zwischen den Positionen der Kugeln zum Zeitpunkt der Kollision der Kugeln berechnet und bis auf zwei Dezimalstellen genau angegeben werden. In Aufgabenteil (c) soll der Verbindungsvektor zwischen der initialen Position und der Position bei Kollision der angespielten Kugel berechnet und bis auf zwei Dezimalstellen genau angegeben werden. In Aufgabenteil (d) soll der Winkel zwischen der geradlinigen Bahn der angespielten Kugel und der langen Seite des Billardtisches berechnet und bis auf zwei Dezimalstellen genau angegeben werden.
Randomisierung	Die Postionen der Billiardkugeln werden zufällig gewählt.
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

2.1.4.5 Methanmolekül

Tags	Winkel, Skalarprodukt
Screenshot	(Stand 29.07.2024)



Ein Tetraeder wird als Modell eines Methanmoleküls verwendet. Dabei stellen die vier Eckpunkte

$H_1(3,0,0)$, $H_2(0,3,0)$, $H_3(0,0,3)$, $H_4(3,3,3)$

des Tetraeders die vier Wasserstoffatome und der Mittelpunkt

$C(\frac{3}{2},\frac{3}{2},\frac{3}{2})$

des Tetraeders das Kohlenstoffatom dar.

Die folgende Abbildung zeigt beispielhaft ein Methanmolekül als Tetraeder in $\mathbb{R}^3$.

Der Winkel α zwischen den Strecken $\overline{CH_1}$ und $\overline{CH_2}$ wird Bindungswinkel genannt. Berechnen Sie den Bindungswinkel α im Methanmolekül und geben Sie α in Gradmaß auf zwei Nachkommastellen genau an.

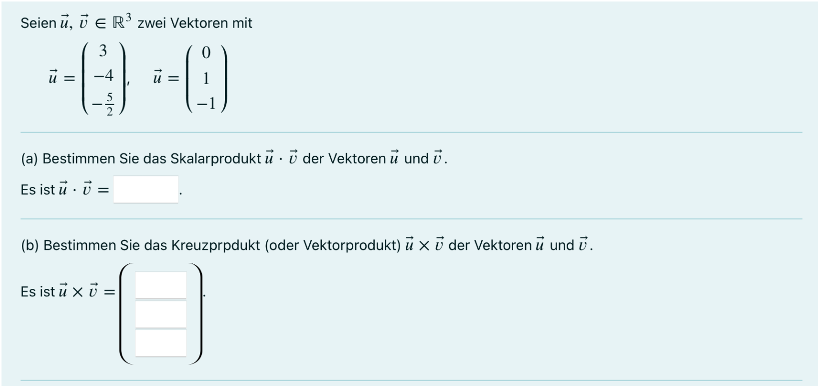
Es ist $\alpha =$.

Autor	Emma van der Smagt (RUB)
Idee	Emma van der Smagt
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll der Bindungswinkel α im Methanmolekül berechnet und bis auf die angegebene Genauigkeit angegeben werden. Dazu wird ein Tetraeder als Modell des Methanmoleküls verwendet: Die Wasserstoffatome werden als die Eckpunkte $H_1 = (h,0,0)$, $H_2 = (0,h,0)$, $H_2 = (0,0,h)$, $H_4 = (h,h,h)$ und das Kohlenstoffatom $C = (\frac{h}{2},\frac{h}{2},\frac{h}{2})$ als der Mittelpunkt des Tetraeders modelliert.
Vorkenntnisse	Betrag von Vektoren, Länge von Vektoren, Addition und Subtraktion
Randomisierung	Der Parameter h in der Definition der Punkte H_1, ... , H_4 und C wird zufällig als ganze Zahl zwischen 2 und 5 gewählt.
Anpassung	Der Eintrag h kann als beliebige positive ganze Zahl gewählt werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

2.1.5 Vektorprodukt

2.1.5.1 Elementare Vektoroperationen (2))

Tags	Vektorrechnung, Skalarprodukt, Vektorprodukt
Screenshot	(Stand 29.07.2024)



Autor	Emma van der Smagt (RUB)
Idee	Emma van der Smagt
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	Zwei Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ in $\mathbb{R}^3$ sind gegeben. In Aufgabenteil (a) wird das Standardskalarprodukt von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ berechnet und angegeben. In Aufgabenteil (b) wird das Vektor- oder Kreuzprodukt berechnet und angegeben.
Vorkenntnisse	Standardskalarprodukt, Kreuzprodukt
Randomisierung	Die Komponenten der Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ werden zufällig als ganzzahlige Vielfach von $\frac{1}{3}$ gewählt, sodass das Standardskalarprodukt und das Kreuzprodukt von $\vec{u}$ und $\vec{v}$ jeweils ungleich null ist.
Anpassung	Die Komponenten der Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ können als ganze Zahlen beliebig gewählt werden.
Sonderoption	Abzüge: 0 Feedback unterdrücken: ja

2.1.5.2 Skalar- und Vektorprodukt

Tags	Vektorrechnung, Skalarprodukt, Vektorprodukt
Screenshot	(Stand 22.08.2024)

Bezüglich einer positiv orientierten Orthonormalbasis $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\} \in \mathbb{R}^3$ seien die folgenden Vektoren gegeben:

$$\vec{v}_1 = 3\,\vec{e}_3 - \vec{e}_2 + \vec{e}_1,$$

$$\vec{v}_2 = 4\,\vec{e}_3 + 4\,\vec{e}_2 - 3\,\vec{e}_1,$$

$$\vec{v}_3 = 2\,\vec{e}_3 - 2\,\vec{e}_2 + 3\,\vec{e}_1.$$

Berechnen Sie die folgenden Skalar- und Vektorprodukte. Dabei bezeichne $\vec{a} \cdot \vec{b}$ das Skalarprodukt und $\vec{a} \times \vec{b}$ das Vektorprodukt zweier Vektoren $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$. Geben Sie einen Vektor $\vec{a}$ als Linearkombination der Basisvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ an. Die Basisvektoren können als `e1`, `e2`, `e3` in den Antwortfeldern eingegeben werden, z.B. 2*e1 + 3*e2 -3*e3.

(a) Es ist $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 =$ _____.

(b) Es ist $\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 =$ _____.

(c) Es ist $\left(\vec{v}_1 \times \vec{v}_2\right) \cdot \vec{v}_3 =$ _____.

(d) Es ist $\left(\vec{v}_2 \times \vec{v}_1\right) \times \vec{v}_3 =$ _____.

Autor	Michael Kubocz (RWTH)
Idee	Michael Kubocz
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	Drei Vektoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ in $\mathbb{R}^3$ sind gegeben. In Aufgabenteil (a) wird das Standardskalarprodukt von $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_1$ berechnet und angegeben. In Aufgabenteil (b) wird das Standardskalarprodukt von $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ berechnet und angegeben. In Aufgabenteil (c) wird das Spatprodukt von $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ berechnet und angegeben. In Aufgabenteil (d) wird das doppelte Kreuzprodukt von $\vec{v}_2$, $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_3$ berechnet und angegeben.
Verbotene Wörter	.
Vorkenntnisse	Standardskalarprodukt, Kreuzprodukt.
Randomisierung	Die Komponenten der Vektoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ werden zufällig und als ganzzahlig gewählt.
Anpassung	Die Komponenten der Vektoren $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ und $\vec{v}_3$ können als reelle Zahlen beliebig gewählt werden.
Sonderoption	Abzüge: 0 Feedback unterdrücken: ja

2.1.5.3 Drehmoment

Tags — Vektorrechnung, Betrag, Kreuzprodukt, Drehmoment

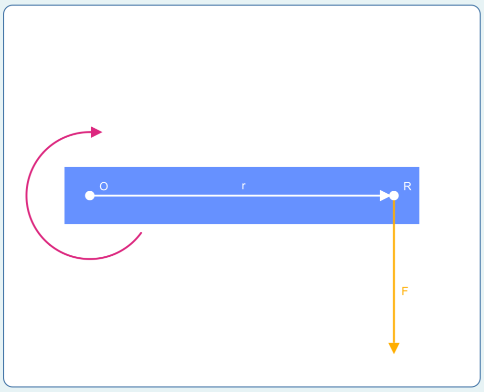
Screenshot — (Stand 29.07.2024)

Auf einen Körper K, der im Punkt O drehbar gelagert ist, wirkt eine am Punkt R angreifende Kraft $\vec{F}$. Die Kraft $\vec{F}$ bewirkt das auf K wirkende Drehmoment

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F},$$

wobei $\vec{r}$ den Ortsvektor von Punkt O zu Punkt R bezeichnet.

Die folgende Abbildung zeigt die beschriebene Situation für den Fall, dass $\vec{r}$ und $\vec{F}$ senkrecht sind. Das auf K wirkende Drehmoment $\vec{M}$ ist diesem Fall senkrecht zur Ebene der Abbildung. Die sich ergebende Rotationsrichtung wird durch den Pfeil angezeigt.



(a) Berechnen Sie für $\vec{r}$ und $\vec{R}$ mit

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

das auf K wirkende Drehmoment $\vec{M}$.

Es ist $\vec{M} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{pmatrix}$.

(b) Berechnen Sie den Betrag des Drehmoments $\vec{M}$ für $\vec{r}$ und $\vec{R}$ wie in Aufgabenteil (a) und geben Sie Ihr Ergebnis exakt an. Geben Sie gegebenenfalls die Wurzel $\sqrt{x}$ einer reellen Zahl x als `sqrt(x)` ein.

Es ist $|\vec{M}| =$ ____ .

Autor — Emma van der Smagt (RUB)

Idee — Emma van der Smagt

Lizenz — CC BY-SA 4.0

Thema — Auf einen Körper, der in einem Punkt drehbar gelagert ist, wirkt eine am Punkt R angreifende Kraft $\vec{F}$, die ein Drehmoment $\vec{M}$ auf den Körper bewirkt. In Aufgabenteil (a) soll das Drehmoment $\vec{M}$ für eine Kraft $\vec{F}$ und einen Ortsvektor $\vec{r}$ des Punktes R berechnet werden. In Aufgabenteil (b) soll der Betrag von $\vec{M}$ aus Aufgabenteil (a) berechnet werden.

Vorkenntnisse — Betrag von Vektoren, Länge von Vektoren, Addition / Subtraktion

Randomisierung — Die Komponenten der Vektoren $\vec{F}$ und $\vec{r}$ werden zufällig als ganze Zahlen zwischen -8 und 8 gewählt, sodass $\vec{M}$ ungleich null ist.

Anpassung — Die Komponenten der Vektoren $\vec{F}$ und $\vec{r}$ können als reelle Zahlen beliebig gewählt werden.

Sonderoption — Feedback unterdrücken: ja

2.1.5.4 Flächeninhalt Dreieck

Tags: Flächeninhalt, Dreieck, Kreuzprodukt, Betrag, Vektorbetrag, Vektorrechnung

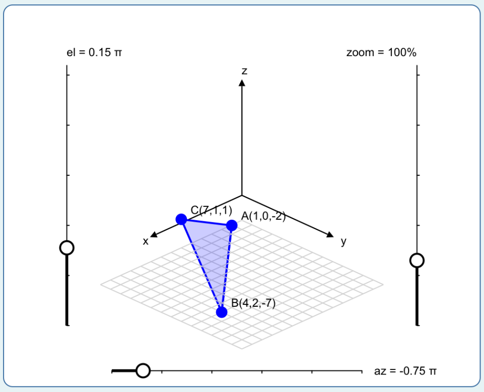
Screenshot: (Stand 29.07.2024)

Im euklidischen Raum $\mathbb{R}^3$ wird durch die Punkte

$A(1,0,-2)$,
$B(4,2,-7)$,
$C(7,1,1)$

ein Dreieck ΔABC definiert.

Die folgende Abbildung zeigt ΔABC.



Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks ΔABC und geben Sie diesen exakt an. Geben Sie gegebenenfalls die Wurzel $\sqrt{x}$ einer reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ als `sqrt(x)` ein.

Es ist $F =$ ______.

Autor: Emma van der Smagt (RUB)

Idee: Emma van der Smagt

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: Es sind drei Punkte A, B und C in $\mathbb{R}^3$ gegeben. In dieser Aufgabe wird der Flächeninhalt des durch die Punkte A, B und C definierten Dreiecks berechnet und angegeben werden.

Vorkenntnisse: Standardskalarprodukt und Kreuzprodukt, Betrag von Vektoren, Bestimmung von Richtungsvektoren

Randomisierung: Die Komponenten der Ortvektoren der Punkte A, B und C werden zufällig als ganze Zahlen zwischen -7 und 7 gewählt, sodass die Punkte A, B und C ein Dreieck definieren.

Anpassung: Die Komponenten der Ortvektoren der Punkte A, B und C können als ganze Zahlen beliebig gewählt werden.

Sonderoption: Feedback unterdrücken: ja

2.2 Matrizen und Lineare Abbildungen

Die Aufgaben in diesem Themenbereich umfassen elementare Matrixoperationen und deren Anwendung bei der Untersuchung von linearen Abbildungen. Dazu zählen die Addition, Subtraktion und Multiplikation von Matrizen sowie die Berechnung von Determinanten und Inversen. Ein weiterer Schwerpunkt liegt auf der Untersuchung von Eigenwerten und Eigenvektoren, die zur Analyse von linearen Transformationen genutzt werden. Weiterhin umfassen die Aufgaben praxisnahe Anwendungen, wie Modellierung geometrischer Transformationen.

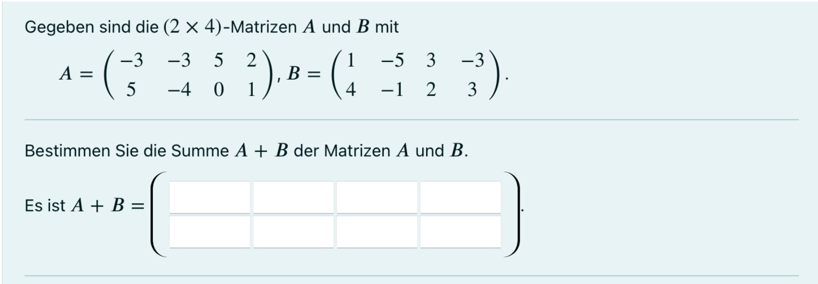
Inhaltsverzeichnis

◀ ▲ ▶

2.2.1 Rechnen mit Matrizen

2.2.1.1 Addition von Matrizen

Tags	Matrizen
Screenshot	(Stand 30.09.2024)



Autor	Hakim Günther (WH)
Idee	Hakim Günther
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	Gegeben sind zwei $n \times m$-Matrix, welche addiert werden sollen.
Vorkenntnisse	Matrizen, Matrizenaddition
Randomisierung	Der Wertebereich der, einzelnen Elemente der Matrix, werden randomisiert, sowie die Größe n und m.
Anpassung	Der Wertebereich der Randomisierung kann variiert werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: nein

2.2.1.2 Subtraktion von Matrizen

Tags	Matrizen
Screenshot	(Stand 30.09.2024)

Geben sind die Matrizen A und B mit

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -2 & 2 & 2 \\ -5 & 3 & -4 \\ -3 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

und

$$B = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 3 \\ -3 & -3 & -5 \\ -4 & -1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

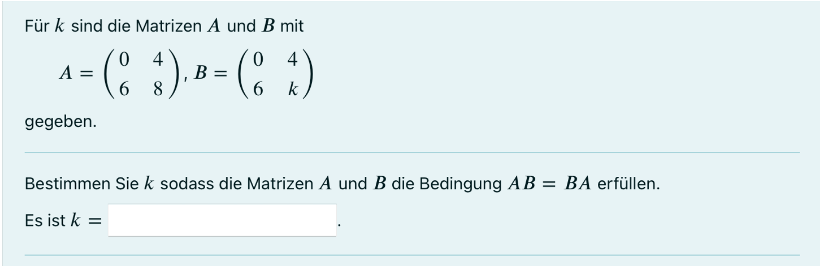
Bestimmen Sie die Differenz $A - B$ der Matrizen A und B.

Es ist $A - B = \begin{pmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{pmatrix}.$

Autor	Hakim Günther (WH)
Idee	Hakim Günther
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	Gegeben sind zwei $n \times m$-Matrix, welche subtrahiert werden sollen.
Vorkenntnisse	Matrizen, Matrizensubtraktion
Randomisierung	Der Wertebereich der, einzelnen Elemente der Matrix, werden randomisiert, sowie die Größe n und m.
Anpassung	Der Wertebereich der Randomisierung kann variiert werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: nein

2.2.1.3 Matrix Koeffizient

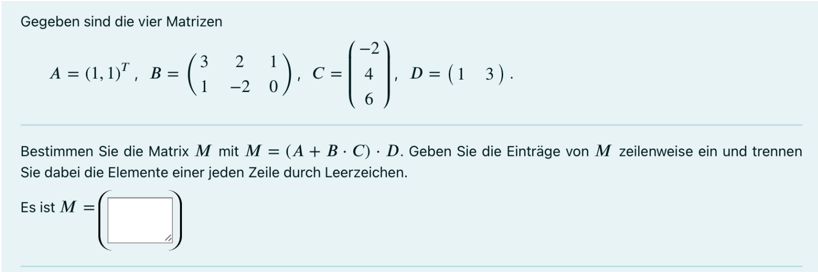
Tags	Matrizen
Screenshot	(Stand 30.09.2024)



Autor	Hakim Günther (WH)
Idee	Hakim Günther
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	Gegeben sind zwei 2×2 Matrizen, A und B. Hierbei soll $b_{2,2} = k$ bestimmt werden, sodass gilt $AB = BA$.
Vorkenntnisse	Matrizen, Matrizenmultiplikation
Randomisierung	Werte der Matrizen
Anpassung	Wertebereich der Randomisierung kann variiert werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: nein

2.2.1.4 Matrizen Rechenübung

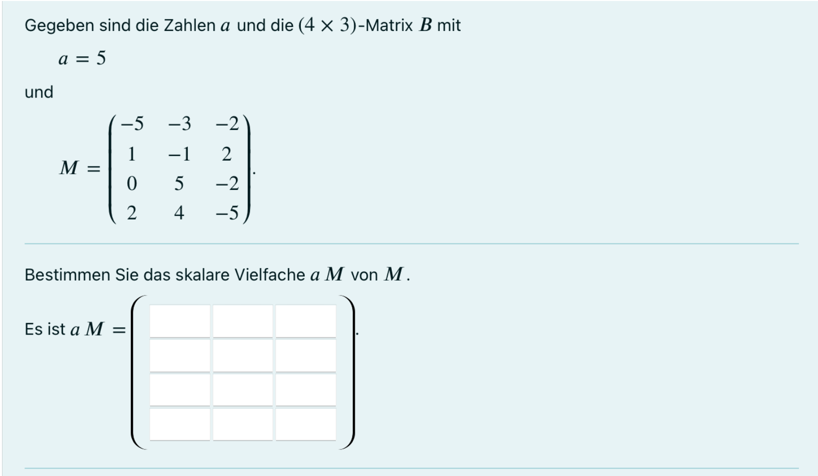
Tags	Vektorrechnung, Betrag
Screenshot	(Stand 30.09.2024)



Autor	Emma van der Smagt (RUB)
Idee	Emma van der Smagt
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe sind vier Matrizen A, B, C und D unterschiedlicher Dimensionen explizit gegeben. Es sollen die Einträge der Matrix M mit $$M = (A + B \cdot C) \cdot D$$ berechnet werden.
Vorkenntnisse	Matrizen, Matrixaddition, Matrixmultiplikation
Randomisierung	Die Einträge der Matrizen A, B, C und D werden zufällig als ganze Zahlen zwischen -9 und 9 gewählt.
Anpassung	Die Einträge der Matrizen A, B, C und D können beliebig als ganze Zahlen gewählt werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

2.2.1.5 Skalarmultiplikation einer Matrix

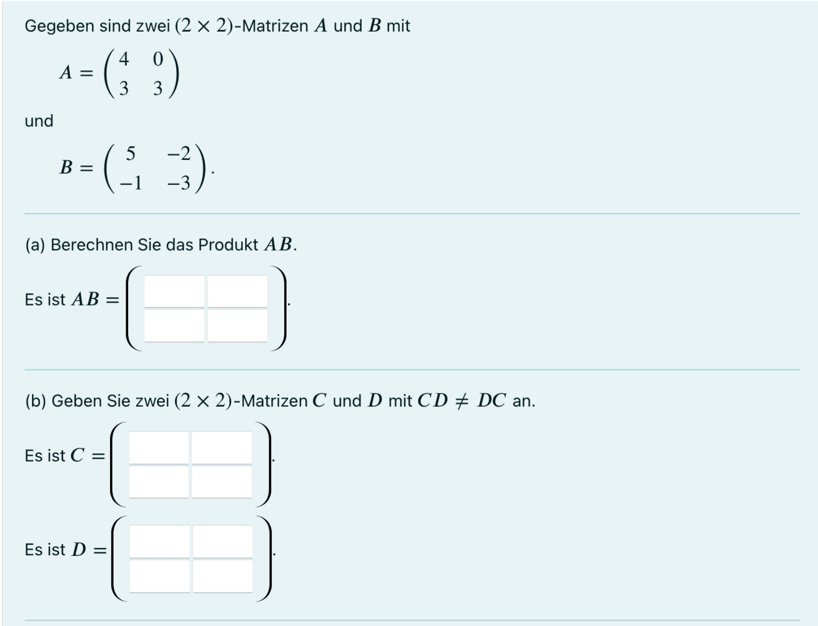
Tags	Matrizen
Screenshot	(Stand 30.09.2024)



Autor	Hakim Günther (WH)
Idee	Hakim Günther
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	Gegeben ist zwei $n \times m$-Matrix, welche mit einem Skalar multipliziert werden soll.
Vorkenntnisse	Matrizen, Matrixmultiplikation
Randomisierung	Der Wertebereich der, einzelnen Elemente der Matrix, die Größe n und m und das Skalar a werden randomisiert.
Anpassung	Der Wertebereich der Randomisierung kann variiert werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: nein

2.2.1.6 Multiplikation von Matrizen (1)

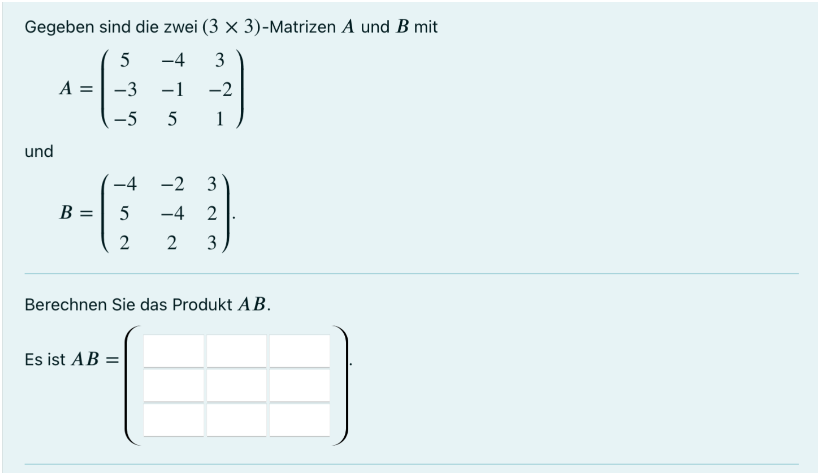
Tags	Matrix, Matrixmultiplikation
Screenshot	(Stand 30.09.2024)



Autor	Tim Inoue (Uni-DUE)
Idee	Tim Inoue
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe sind zwei (2×2)-Matrizen A und B gegeben. In Aufgabenteil (a) soll das Produkt $$AB$$ der Matrizen A und B berechnet und angegeben werden. In Aufgabenteil (b) sollen zwei Matrizen $C, D \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gefunden werden, sodass $$CD \neq DC$$ gilt.
Vorkenntnisse	Multiplikation von Matrizen
Randomisierung	Die Matrizen A und B sind randomisiert.
Anpassung	Die Matrizen A und B können beliebig angepasst werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

2.2.1.7 Multiplikation von Matrizen (2)

Tags	Matrix, Matrixmultiplikation
Screenshot	(Stand 30.09.2024)



Autor	Tim Inoue (Uni-DUE)
Idee	Tim Inoue
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe sind zwei (3×3)-Matrizen A und B gegeben. Es soll das Produkt $$AB$$ korrekt berechnet und angegeben werden.
Vorkenntnisse	Multiplikation von Matrizen
Randomisierung	Die Matrizen A und B sind randomisiert.
Anpassung	Die Matrizen A und B können beliebig angepasst werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

2.2.1.8 Multiplikation von Matrizen (3)

Tags: Matrix, Matrixmultiplikation

Screenshot: (Stand 30.09.2024)

Eine $n \times n$-Matrix A heißt nilpotent, falls eine natürliche Zahl $k \leq n$ existiert, sodass

$$A^k = 0$$

ist. Die Nullmatrix 0 (triviale Matrix) ist nilpotent mit $0^1 = 0$. Untersuchen Sie im Folgenden den Begriff 'nilpotent' am Beispiel nicht-trivialer Matrizen.

(a) Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

ist nilpotent. Bestimmen Sie die kleinste natürliche Zahl k, sodass $A^k = 0$ ist

Es ist $k =$ ___.

(b) Geben Sie eine nicht-triviale 3×3-Matrix B an, die nilpotent ist.

$$\text{Es ist } B = \begin{pmatrix} \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \\ \square & \square & \square \end{pmatrix}.$$

Autor: Tim Inoue (Uni-DUE)

Idee: Tim Inoue

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: In Aufgabenteil (a) soll der Nilpotenzgrad einer reellen 4×4-Matrix A bestimmt werden. In Aufgabenteil (b) soll eine nicht-triviale Matrix $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ angegeben werden, die nilpotent ist. Der Begriff nicht-trivial bedeutet ungleich der Nullmatrix und wird im Spoiler der Aufgabe erklärt.

Vorkenntnisse: Multiplikation von Matrizen, nilpotente Matrizen

Randomisierung: Die Matrix A in Aufgabenteil (a) ist randomisiert.

Anpassung: Die Matrix A kann in der Dimension angepasst werden.

Sonderoption: Feedback unterdrücken: ja

2.2.2 Inverse und Transponierte

2.2.2.1 Transposition von Matrizen

Tags: Matrix, Transposition, symmetrisch, orthogonal

Screenshot: (Stand 30.09.2024)

Für eine $(n \times m)$-Matrix A mit ij-tem Eintrag a_{ij} ist die ist die Transponierte A^T von A (oder die transponierte Matrix A^T von A) die $m \times n$-Matrix mit ij-tem Eintrag a_{ji}. So ist beispielsweise für die Matrix M mit

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

die zugehörige Transponierte

$$M^T = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Gegeben sei die (2×4)-Matrix A mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 & -5 \\ -5 & -5 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Transponierte A^T von A. Schreiben Sie jede Zeile der Matrix in eine eigene Zeile und trennen Sie die Einträge durch ein Leerzeichen.

Es ist $A^T =$

(b) Geben Sie eine (3×3)-Matrix B mit $B^T = B$ an.

Es ist $B =$

(c) Bestimmen Sie eine invertierbare (3×3)-Matrix C mit $C^T = C^{-1}$ an, die nicht die Einheitsmatrix ist.

Es ist $C =$

Autor: Tim Inoue (Uni-DUE)

Idee: Tim Inoue

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: In dieser Aufgabe geht es um die Transposition von reellwertigen Matrizen. In Aufgabenteil (a) ist eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $m \in \{1, 2, 3\}$ und $n \in \{1, \ldots, 5\}$ gegeben, die transponiert werden soll. In Aufgabenteil (b) Soll eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ angegeben werden, für die

$$B = B^T$$

gilt. In Aufgabenteil (c) soll eine invertierbare Matrix $C \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ gefunden und angegeben werden, die

$$C^T = C^{-1}$$

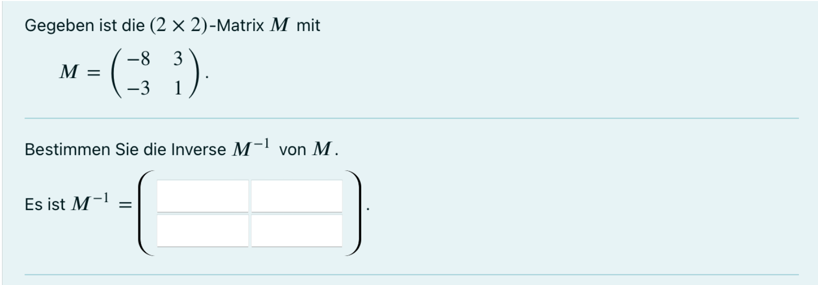
erfüllt.

Vorkenntnisse: Symmetrische Matrizen, Orthogonale Matrizen, Invertierbarkeit von Matrizen

Randomisierung	Die Matrix A in Aufgabenteil (a) ist randomisiert.
Anpassung	Die Matrizen in allen Aufgabenteilen können angepasst werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

2.2.2.2 Matrix Inverse 2x2

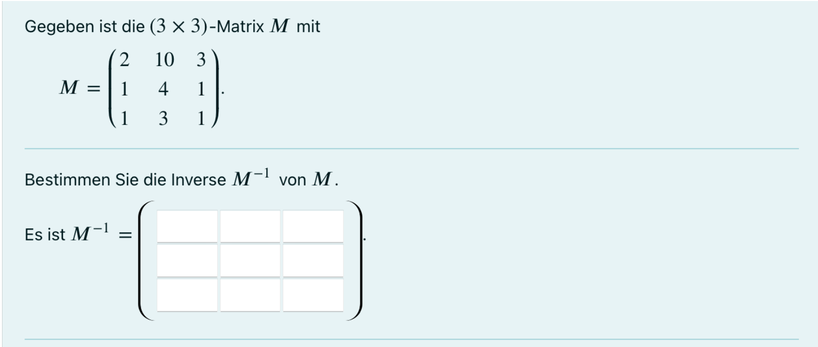
Tags	Determinante, Matrix, Inverse
Screenshot	(Stand 30.09.2024)



Idee	Hakim Günther
Autor	Hakim Günther (WH)
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	Gegeben ist eine 2×2-Matrix. Für diese Matrix soll die Inverse bestimmt werden.
Vorkenntnisse	Berechnung der Determinante, Formel für die Inverse einer 2×2-Matrix.
Randomisierung	Eine 2×2-Matrix wird durch Multiplikation von Dreiecksmatrizen und einer Diagonalmatrix mit zufälligen Einträgen erzeugt.
Anpassung	Wertebereich der zufälligen Einträge kann angepasst werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: nein

2.2.2.3 Matrix Inverse 3x3

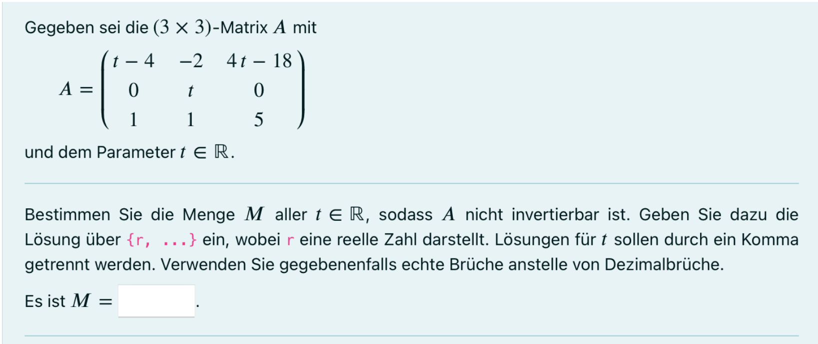
Tags	Determinante, Matrix, Inverse
Screenshot	(Stand 30.09.2024)



Idee	Hakim Günther
Autor	Hakim Günther (WH)
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	Gegeben ist eine 3×3-Matrix. Für diese Matrix soll die Inverse bestimmt werden.
Vorkenntnisse	Berechnung der Determinante, Berechnung der Adjunkten, Formel für die Inverse einer 3×3-Matrix.
Randomisierung	Eine 3×3-Matrix wird durch Multiplikation von zwei Dreiecksmatrizen und einer Diagonalmatrix mit zufälligen Einträgen erzeugt.
Anpassung	Wertebereich der zufälligen Einträge kann angepasst werden. Aktuell sind die Werte zwischen -3 und 3 für die Dreiecksmatrizen und zwischen -1 und 1 (ohne 0) für die Diagonalmatrix.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: nein

2.2.2.4 Inverse einer Matrix mit reellem Parameter

Tags	Matrix, Inverse, Parameter
Screenshot	(Stand 30.09.2024)

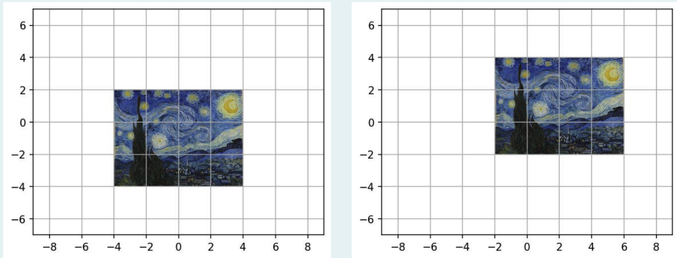


Autor	Tim Inoue (Uni-DUE)
Idee	Tim Inoue
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	Eine (3×3)-Matrix A wird mit einem Parameter $t \in \mathbb{R}$ versehen. In dieser Aufgabe soll die Menge aller $t \in \mathbb{R}$ berechnet, für die die Matrix A invertierbar wird.
Vorkenntnisse	Determinante einer Matrix, Gauß-Algorithmus, Invertierbarkeit von Matrizen
Randomisierung	Matrix ist in Teilen randomisiert.
Anpassung	Die Parameter können angepasst und an anderen Stellen in der Matrix gesetzt werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

2.2.2.5 Bildtransformation

Tags	Matrizen
Screenshot	(Stand 23.03.2024)

Die folgenden Abbildungen zeigen das Bild "Sternennacht" von Vincent van Gogh jeweils als Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ (oder eines zweidimensionalen Koordinatensystems). Die linke Abbildung zeigt das Bild und die rechte Abbildung zeigt das Bild unter einer linearen Transformation mit Tranformationsmatrix A / nach Anwendung einer Transformationsmatrix A.



Bestimmen Sie A.

Es ist A:

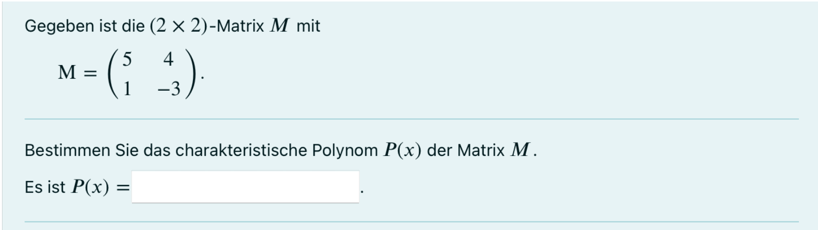
$$\begin{pmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{pmatrix}.$$

Autor	Hakim Günther (WH)
Idee	Hakim Günther
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	Gegeben sind zwei Bilder in einem Koordinatensystem. Links ist das Bild in Ausgangslage und rechts eine Translation des Bildes. Hierzu soll die Translationsmatrix angegeben werden.
Vorkenntnisse	Matrizen, Translation
Randomisierung	kein
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: nein

2.2.3 Eigenwerte und Eigenvektoren

2.2.3.1 Charakteristisches Polynom 2x2

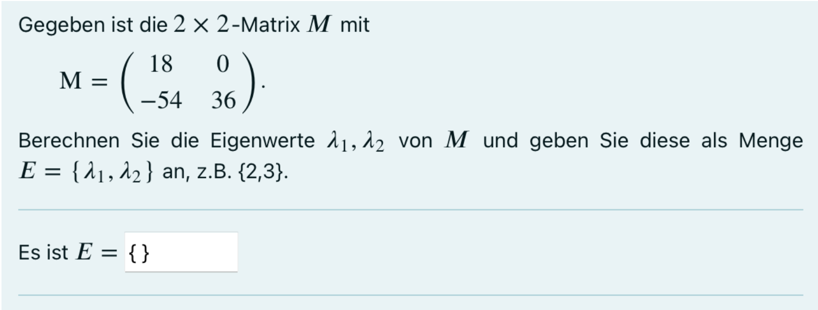
Tags	Eigenwerte, Eigenvektoren, Determinante
Screenshot	(Stand 30.09.2024)



Autor	Hakim Günther (WH)
Idee	Hakim Günther
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	Gegeben ist eine $2x2$-Matrix. Für diese Matrix soll das charakteristische Polynom bestimmt werden.
Vorkenntnisse	Bestimmung der Determinante.
Randomisierung	Der Wertebereich der, einzelnen Elemente der Matrix, werden randomisiert.
Anpassung	Der Wertebereich der Randomisierung kann variiert werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: nein

2.2.3.2 Eigenwerte 2x2

Tags	Eigenwerte, Eigenvektoren, Determinante, Nullstellen
Screenshot	(Stand 30.09.2024)



Autor	Hakim Günther (WH)
Idee	Hakim Günther
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	Gegeben ist eine $2x2$-Matrix. Für diese Matrix sollen die Eigenwerte bestimmt werden.
Vorkenntnisse	Bestimmung der Determinante.
Randomisierung	Eine $2x2$-Matrix wird initialisiert und mit einem zufälligen Faktor skaliert.
Anpassung	Möglicher Wertebereich des Skalierungsfaktor kann variiert werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: nein

2.2.3.3 Eigenvektoren 2x2

Tags	Eigenwerte, Eigenvektoren, Determinante, Nullstellen
Screenshot	(Stand 30.09.2024)

Gegeben ist die (2×2)-Matrix $\boldsymbol{M}$ mit

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie zwei linear unabhängige Eigenvektoren v_1 und v_2 von $\boldsymbol{M}$ und geben Sie diese als Menge $N = \{v_1, v_2\}$ an, z.B. {[2,3],[1,1]}.

Es ist $N = \{\}$.

Autor	Hakim Günther (WH)
Idee	Hakim Günther
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	Gegeben ist eine $2x2$-Matrix. Für diese Matrix sollen die Eigenvektoren bestimmt werden.
Vorkenntnisse	Bestimmung der Determinante.
Randomisierung	Eine $2x2$-Matrix wird initialisiert und mit einem zufälligen Faktor skaliert.
Anpassung	Möglicher Wertebereich des Skalierungsfaktor kann variiert werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: nein

2.2.3.4 Charakteristisches Polynom / Eigenwerte / Eigenvektoren 2x2

Tags	Eigenwerte, Eigenvektoren, Determinante, Nullstellen
Screenshot	(Stand 30.09.2024)

Gegeben ist die (2×2)-Matrix M mit

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

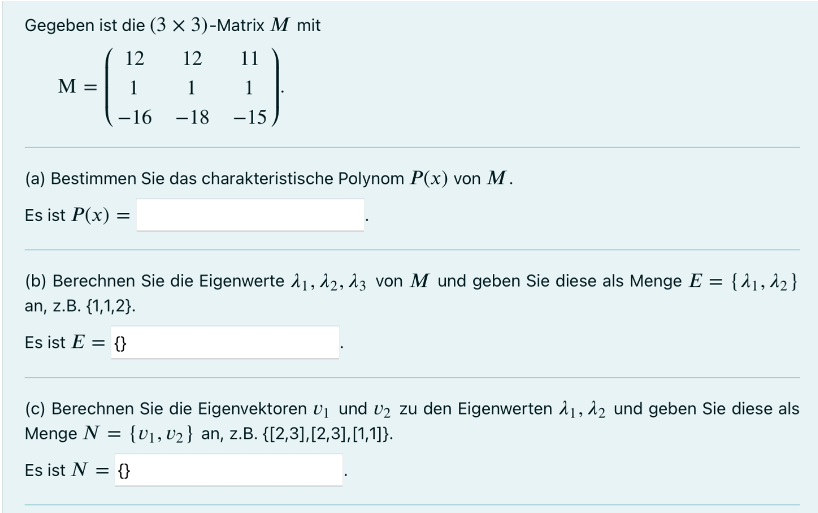
Berechnen Sie die Eigenwerte λ_1, λ_2 von M und geben Sie diese als Menge $E = \{\lambda_1, \lambda_2\}$ an, z.B. {2,3}.

Es ist $E =$ { } .

Autor	Hakim Günther (WH)
Idee	Hakim Günther
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	Gegeben ist eine $2x2$-Matrix. Für diese Matrix soll das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und die Eigenvektoren bestimmt werden.
Vorkenntnisse	Bestimmung der Determinante.
Randomisierung	Der Wertebereich der, einzelnen Elemente der Matrix, werden randomisiert.
Anpassung	Der Wertebereich der Randomisierung kann variiert werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: nein

2.2.3.5 charakteristisches Polynom / Eigenwerte / Eigenvektoren 3x3

Tags	Eigenwerte, Eigenvektoren, Determinante, Nullstellen
Screenshot	(Stand 30.09.2024)



Autor	Hakim Günther (WH)
Idee	Hakim Günther
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	Gegeben ist eine $3x3$-Matrix. Für diese Matrix soll das charakteristische Polynom, die Eigenwerte und die Eigenvektoren bestimmt werden.
Vorkenntnisse	Bestimmung der Determinante.
Randomisierung	Aus einer Liste von vorinitialisierten Matrizen wird eine ausgewählt. Diese wird dann mit einem Skalierungsfaktor multipliziert
Anpassung	Möglicher Wertebereich des Skalierungsfaktor kann variiert werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: nein

2.3 Lagebeziehungen

Dieser Themenbereich umfasst Aufgaben zur Lagebeziehung von Geraden und Ebenen. Zu Beginn werden die Parameter- und Normalendarstellung von Geraden und Ebenen behandelt. Im Verlauf des Themenbereich werden Spezialfälle wie die Lagebeziehung von (Halb-) Geraden und Halbebenen, sowie von Polygonen, orientierten Ebenen und orientierten Polygonen vertieft.

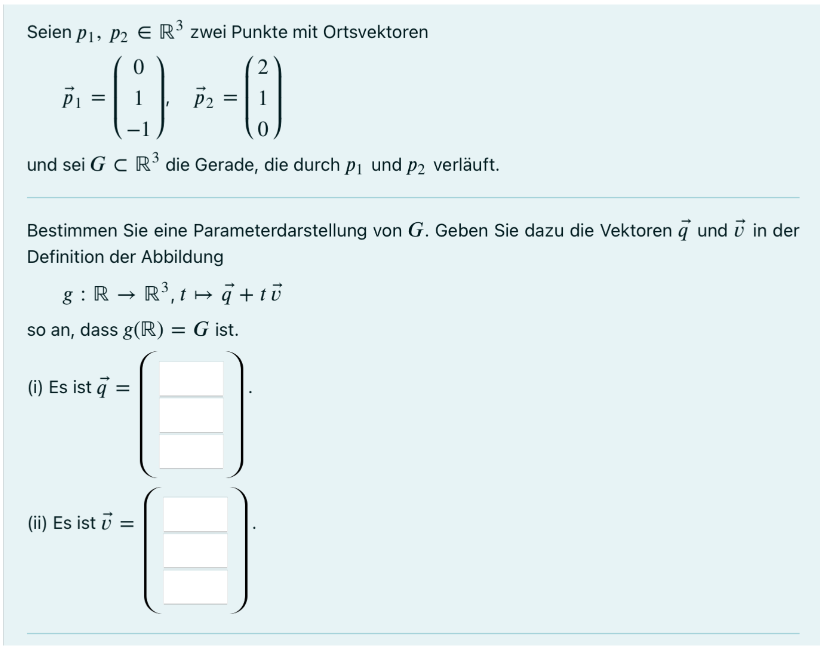
Inhaltsverzeichnis

◄ ▲ ►

2.3.1 Darstellungen von Geraden und Ebenen

2.3.1.1 Parameterdarstellung von Geraden

Tags	Parameterdarstellung, Gerade
Screenshot	(Stand 07.10.2024)


Seien $p_1,\ p_2 \in \mathbb{R}^3$ zwei Punkte mit Ortsvektoren

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und sei $G \subset \mathbb{R}^3$ die Gerade, die durch p_1 und p_2 verläuft.

Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung von G. Geben Sie dazu die Vektoren $\vec{q}$ und $\vec{v}$ in der Definition der Abbildung

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, t \mapsto \vec{q} + t\,\vec{v}$$

so an, dass $g(\mathbb{R}) = G$ ist.

(i) Es ist $\vec{q} =$

(ii) Es ist $\vec{v} =$

Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll die Parameterdarstellung einer Gerade in $\mathbb{R}^3$ bestimmt werden. Dazu sollen ein Stützvektor und ein Spannvektor der Gerade angegeben werden.
Vorkenntnisse	Bestimmung eines Spannvektors (Verschiebungsvektor)
Randomisierung	Die Komponenten des Ortvektors und die Komponenten des Spannvektors der Gerade werden zufällig gewählt.
Anpassung	Die Komponenten des Ortvektors und die Komponenten des Spannvektors der Gerade können beliebig angepasst werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

2.3.1.2 Parameterdarstellung von Ebenen

Tags — Parameterdarstellung, Gerade

Screenshot — (Stand 07.10.2024)

Seien $p_1,\ p_2,\ p_3 \in \mathbb{R}^3$ drei Punkte mit Ortsvektoren

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \\ -5 \end{pmatrix}$$

und sei $E \subset \mathbb{R}^3$ die Ebene, die durch p_1, p_2 und p_3 verläuft.

Bestimmen Sie eine Parameterdarstellung von E. Geben Sie dazu die Vektoren $\vec{q}$, $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ in der Definition der Abbildung

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (s,t) \mapsto \vec{q} + s\,\vec{v}_1 + t\,\overrightarrow{v_2}$$

so an, dass $h(\mathbb{R}^2) = E$ ist.

(i) Es ist $\vec{q} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{pmatrix}$.

(ii) Es ist $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{pmatrix}$ und es ist $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{pmatrix}$.

Autor — Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee — Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz — CC BY-SA 4.0

Thema — In dieser Aufgabe soll die Parameterdarstellung einer Ebene in $\mathbb{R}^3$ bestimmt werden. Dazu sollen ein Stützvektor und zwei Spannvektoren der Ebene angegeben werden.

Vorkenntnisse — Bestimmung von Spannvektoren (Verschiebungsvektoren)

Randomisierung — Die Komponenten des Ortvektors und die Komponenten der Spannvektoren der Ebene werden zufällig gewählt.

Anpassung — Die Komponenten des Ortvektors und die Komponenten der Spannvektoren der Ebene können beliebig angepasst werden.

Sonderoption — Feedback unterdrücken: ja

2.3.1.3 Normalendarstellung von Ebenen

Tags: Normalendarstellung, Ebene

Screenshot: (Stand 07.10.2024)

Seien $p_1,\ p_2,\ p_3 \in \mathbb{R}^3$ drei Punkte mit Ortsvektoren

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ -9 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_3 = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und sei $E \subset \mathbb{R}^3$ die Ebene, die durch p_1, p_2 und p_3 verläuft.

Bestimmen Sie eine Normalendarstellung von E. Geben Sie dazu die Vektoren $\vec{q}$ und $\vec{n}$ in der Definition der Menge

$$M = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid (\vec{x} - \vec{q}) \cdot \vec{n} = 0\}$$

so an, dass $M = E$ ist.

(i) Es ist $\vec{q} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{pmatrix}$.

(ii) Es ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{pmatrix}$.

Autor: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: In dieser Aufgabe soll die Normalendarstellung einer Ebene in $\mathbb{R}^3$ bestimmt werden. Dazu sollen ein Stützvektor und ein Normalenvektor der Ebene angegeben werden.

Vorkenntnisse: Bestimmung von Spannvektoren, Bestimmung von Normalenvektoren (z.B. Kreuzprodukt)

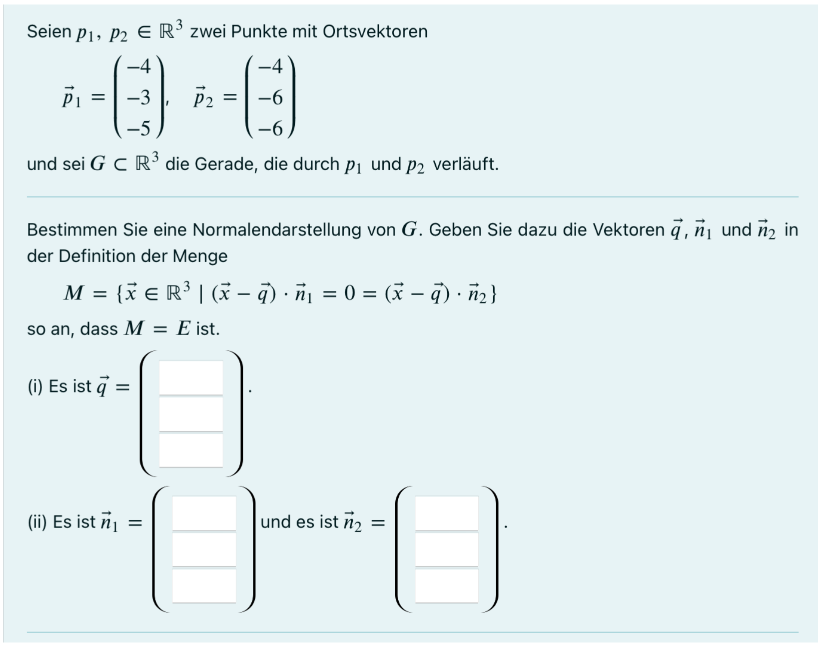
Randomisierung: Die Komponenten des Ortvektors und die Komponenten der Spannvektoren der Ebene werden zufällig gewählt.

Anpassung: Die Komponenten des Ortvektors und die Komponenten der Spannvektoren der Ebene können beliebig angepasst werden.

Sonderoption: Feedback unterdrücken: ja

2.3.1.4 Normalendarstellung von Geraden

Tags	Normalendarstellung, Gerade
Screenshot	(Stand 07.10.2024)



Seien $p_1,\ p_2 \in \mathbb{R}^3$ zwei Punkte mit Ortsvektoren

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}$$

und sei $G \subset \mathbb{R}^3$ die Gerade, die durch p_1 und p_2 verläuft.

Bestimmen Sie eine Normalendarstellung von G. Geben Sie dazu die Vektoren $\vec{q}$, $\vec{n}_1$ und $\vec{n}_2$ in der Definition der Menge

$$M = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid (\vec{x} - \vec{q}) \cdot \vec{n}_1 = 0 = (\vec{x} - \vec{q}) \cdot \vec{n}_2\}$$

so an, dass $M = E$ ist.

(i) Es ist $\vec{q} =$.

(ii) Es ist $\vec{n}_1 =$ und es ist $\vec{n}_2 =$.

Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll die Normalendarstellung einer Gerade in $\mathbb{R}^3$ bestimmt werden. Dazu sollen ein Stützvektor und zwei Normalenvektoren der Gerade angegeben werden.
Vorkenntnisse	Bestimmung von Normalenvektoren
Randomisierung	Die Komponenten des Ortvektors und die Komponenten des Spannvektors der Geraden werden zufällig gewählt.
Anpassung	Die Komponenten des Ortvektors und die Komponenten des Spannvektors der Geraden können beliebig angepasst werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

2.3.2 Geraden und Ebenen

2.3.2.1 Lagebeziehung von Geraden und Ebenen (1)

Tags Lagebeziehung, Gerade, Ebene

Screenshot (Stand 08.10.2024)

Seien G eine Gerade und E eine Ebene in $\mathbb{R}^3$. Die Gerade G werde parametrisiert durch

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, t \mapsto \vec{p} + t\,\vec{v}$$

mit $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ und die Ebene E werde parametrisiert durch

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (s_1, s_2) \mapsto \vec{q} + s_1\,\vec{w}_1 + s_2\,\vec{w}_2$$

mit linear unabhängigen Vektoren $\overrightarrow{w_1}$, $\overrightarrow{w_2} \in \mathbb{R}^3$. Im Folgenden bezeichne $\vec{n}$ das Vektorprodukt $\vec{n} = \vec{w}_1 \times \vec{w}_2$.

(a) Vervollständigen Sie die folgende Aussage zu einer im Allgemeinen wahren Aussage über die Lagebeziehung von G und E.

Wenn [(Meine Auswahl zurücksetzen)] sind, dann schneidet die Gerade G die Ebene E [(Meine Auswahl zurücksetzen)].

(b) Vervollständigen Sie jede der drei folgenden Aussagen zu einer im Allgemeinen wahren Aussage über die Lagebeziehung von G und E.

(i) Wenn die Gerade G die Ebene E in genau einem Punkt schneidet, dann sind [(Meine Auswahl zurücksetzen)].

(ii) Wenn die Gerade G die Ebene E in unendlich vielen Punkten schneidet, dann sind [(Meine Auswahl zurücksetzen)].

(iii) Wenn die Gerade G die Ebene E gar nicht schneidet, dann sind [(Meine Auswahl zurücksetzen)].

Autor Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz CC BY-SA 4.0

Thema In dieser Aufgabe sollen Kriterien für die Lagebeziehung von Geraden und Ebenen erarbeitet werden. In Aufgabenteil (a) soll dazu ein Lückentext zu einer wahren Aussage über die Lagebeziehung von Geraden und Ebenen ergänzt werden, indem sowohl geeignete Kriterien an die Stütz- und Normalvektoren der Geraden und der Ebene als auch die Lagebeziehung selbst ausgewählt werden. In Aufgabenteil (b) sollen drei Lückentexte zu jeweils einer Lagebeziehung von Geraden und Ebenen zu einer wahren Aussage ergänzt werden, indem erneut geeignete Kriterien an die Stütz- und Normalvektoren der Geraden ausgewählt werden.

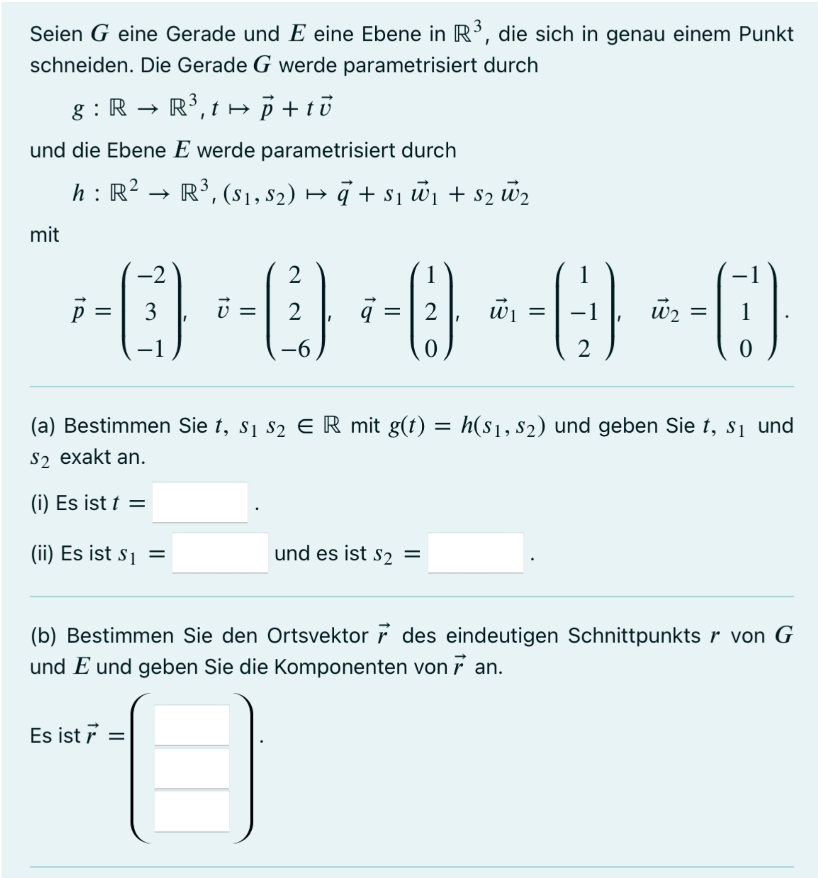
Vorkenntnisse Parameterdarstellung von Geraden und Ebenen, Normalendarstellung von Ebenen, Kriterien zur Bestimmung der Lagebeziehung von Geraden und Ebenen

Randomisierung Die Reihenfolge der vorgegebenen Antworten ist zufällig gewählt.

Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

2.3.2.2 Lagebeziehung von Geraden und Ebenen (2)

Tags	Lagebeziehung, Gerade, Ebene
Screenshot	(Stand 08.10.2024)



Seien G eine Gerade und E eine Ebene in $\mathbb{R}^3$, die sich in genau einem Punkt schneiden. Die Gerade G werde parametrisiert durch

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, t \mapsto \vec{p} + t\,\vec{v}$$

und die Ebene E werde parametrisiert durch

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (s_1, s_2) \mapsto \vec{q} + s_1\,\vec{w}_1 + s_2\,\vec{w}_2$$

mit

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie $t,\ s_1\ s_2 \in \mathbb{R}$ mit $g(t) = h(s_1, s_2)$ und geben Sie $t,\ s_1$ und s_2 exakt an.

(i) Es ist $t =$.

(ii) Es ist $s_1 =$ und es ist $s_2 =$.

(b) Bestimmen Sie den Ortsvektor $\vec{r}$ des eindeutigen Schnittpunkts r von G und E und geben Sie die Komponenten von $\vec{r}$ an.

Es ist $\vec{r} =$.

Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll der Schnittpunkt einer Geraden mit einer Ebene bestimmt werden. Sowohl die Gerade als auch die Ebene sind in Parameterdarstellung gegeben. In Aufgabenteil (a) sollen die Parameter des Schnittpunktes in der Parameterdarstellung sowohl der Geraden als auch der Ebene bestimmt werden. In Aufgabenteil (b) soll der Ortsvektor des Schnittpunkts der Geraden mit der Ebene bestimmt werden.
Vorkenntnisse	Lösung linearer Gleichungssysteme, Parameterdarstellung von Geraden und Ebenen, Kriterien zur Bestimmung der Lagebeziehung von Geraden und Ebenen
Randomisierung	Die Komponenten der Orts- und Spannvektoren der Geraden und der Ebene sind ganzzahlig und zufällig so gewählt, dass sowohl die Parameter als auch die Komponenten des Ortvektors des Schnittpunkts ganzzahlig sind.
Anpassung	Der Ortsvektor und die Spannvektoren der Ebene können beliebig gewählt werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

2.3.2.3 Lagebeziehung von Geraden und Ebenen (3) (Halbgeraden)

Tags: Lagebeziehung, Gerade, Halbgerade, Ebene

Screenshot: (Stand 08.10.2024)

Seien G eine Gerade und E eine Ebene in $\mathbb{R}^3$, die sich in genau einem Punkt schneiden. Die Gerade G werde parametrisiert durch

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, t \mapsto \vec{p} + t\,\vec{v}$$

und die Ebene E werde parametrisiert durch

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (s_1, s_2) \mapsto \vec{q} + s_1\,\vec{w}_1 + s_2\,\vec{w}_2$$

mit

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} -9 \\ -5 \\ 18 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$
$$\vec{w}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Die Menge

$$G_+ = \{g(t) \mid t > 0\}$$

definiert eine Halbgerade in G.

(a) Bestimmen Sie die reelle Zahl $t \in \mathbb{R}$ mit $g(t) \in E$ und geben Sie t exakt an.

(i) Es ist $t =$ ______ .

(b) Sei $r = g(t)$ der Schnittpunkt von G und E für t aus Aufgabenteil (a). Entscheiden Sie mithilfe von t, ob r ein Element der Halbgeraden G_+ ist. Vervollständigen Sie dazu den folgenden Lückentext.

Der Punkt r ist [(Meine Auswahl zurücksetzen) ⇕] Element von G_+.

Autor: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: In dieser Aufgabe soll der Schnittpunkt einer Halbgeraden mit einer Ebene bestimmt werden. Sowohl die Halbgerade als auch die Ebene sind in Parameterdarstellung gegeben. In Aufgabenteil (a) soll der Parameter des Schnittpunktes in der Parameterdarstellung der Halbgeraden bestimmt werden. In Aufgabenteil (b) soll ein Lückentext zu einer wahren Aussage über die Lagebeziehung der Halbgeraden und der Ebene ergänzt werden.

Vorkenntnisse: Lösung linearer Gleichungssysteme, Parameterdarstellung von Geraden und Ebenen, Kriterien zur Bestimmung der Lagebeziehung von Geraden und Ebenen, Definition von Halbgeraden

Randomisierung: Die Komponenten der Orts- und Spannvektoren der Halbgeraden und der Ebene sind ganzzahlig und zufällig so gewählt, dass der Parameter des Schnittpunkts in der Parameterdarstellung der Halbgeraden ganzzahlig ist.

Anpassung	Der Ortsvektor und die Spannvektoren der Ebene können beliebig gewählt werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

2.3.2.4 Lagebeziehung von Geraden und Ebenen (4) (Halbebenen)

Tags	Lagebeziehung, Gerade, Ebene, Halbebene
Screenshot	(Stand 08.10.2024)

Seien G eine Gerade und E eine Ebene in $\mathbb{R}^3$, die sich in genau einem Punkt schneiden. Die Gerade G werde parametrisiert durch

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, t \mapsto \vec{p} + t\,\vec{v}$$

und die Ebene E werde parametrisiert durch

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (s_1, s_2) \mapsto \vec{q} + s_1\,\vec{w}_1 + s_2\,\vec{w}_2.$$

Die Menge

$$H = \{h(s_1, s_2) \mid 0 \leq s_2\}$$

definiert eine Halbebene in E. Im Folgenden seien

$$\vec{q} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 10 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Geben Sie einen Ortsvektor $\vec{p}$ und einen Richtungsvektor $\vec{v}$ an, sodass die Gerade G die Halbebene H schneidet und die Gerade G die Halbebene $E \setminus H$ nicht schneidet.

(i) Es ist $\vec{p} = \begin{pmatrix} \ \\ \ \\ \ \end{pmatrix}$.

(ii) Es ist $\vec{v} = \begin{pmatrix} \ \\ \ \\ \ \end{pmatrix}$.

(b) Geben Sie einen Ortsvektor $\vec{p}$ und einen Richtungsvektor $\vec{v}$ an, sodass die Gerade G die Halbebene H und die Halbebene $E \setminus H$ schneidet.

(i) Es ist $\vec{p} = \begin{pmatrix} \ \\ \ \\ \ \end{pmatrix}$.

(ii) Es ist $\vec{v} = \begin{pmatrix} \ \\ \ \\ \ \end{pmatrix}$.

Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0

Thema	In dieser Aufgabe sollen Stütz- und Spannvektoren von zwei Geraden angegeben werden, die bestimmte Lagebeziehungen mit einer gegebenen Halbebene und ihrer komplementären Halbebene aufweisen. In Aufgabenteil (a) soll eine Gerade definiert werden, die die Halbebene schneidet, aber die komplementäre Halbebene nicht schneidet. In Aufgabenteil (b) soll eine Gerade definiert werden, die sowohl die Halbebene als auch die komplementäre Halbebene schneidet.
Vorkenntnisse	Lösung linearer Gleichungssysteme, Parameterdarstellung von Geraden und Ebenen, Kriterien zur Bestimmung der Lagebeziehung von Geraden und Ebenen, Definition von Halbebenen
Randomisierung	Die Komponenten des Stützvektors und der Spannvektoren der (Halb-) Ebene sind ganzzahlig und zufällig gewählt.
Anpassung	Der Stützvektor und die Spannvektoren der (Halb-) Ebene können beliebig gewählt werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

2.3.2.5 Lagebeziehung von Geraden und Ebenen (5) (Orientierung)

Tags	Lagebeziehung, Gerade, Ebene, Orientierung
Screenshot	(Stand 08.10.2024)

Sei G eine von dem Vektor $\vec{v}$ aufgespannte Gerade und sei E eine von den Vektoren $\vec{w}_1$ und $\vec{w}_2$ aufgespannte Ebene in $\mathbb{R}^3$ mit

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

▶ Vorder- und Rückseiten von Ebenen

(a) Bestimmen Sie den Normalenvektor $\vec{n} = \vec{w}_1 \times \vec{w}_2$ und das Standardskalarprodukt $\vec{n} \cdot \vec{v}$ von $\vec{n}$ und $\vec{v}$.

(i) Es ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{pmatrix}$.

(ii) Es ist $\vec{n} \cdot \vec{v} = \square$.

(b) Vervollständigen Sie (mithilfe von Aufgabenteil (a)) die folgenden Aussagen zu im Allgemeinen wahren Aussagen über die Lagebeziehung von G und E.

(i) Die von $\vec{v}$ aufespannte Gerade G schneidet (Meine Auswahl zurücksetzen) der Ebene E bezüglich $(\vec{w}_1, \vec{w}_2)$.

(ii) Die von $-\vec{v}$ aufespannte Gerade G schneidet (Meine Auswahl zurücksetzen) der Ebene E bezüglich $(\vec{w}_2 + \vec{w}_1, \vec{w}_2)$.

(iii) Die von $\vec{v}$ aufespannte Gerade G schneidet (Meine Auswahl zurücksetzen) der Ebene E bezüglich $(\vec{w}_1, \vec{w}_2 + \vec{w}_1)$.

(c) Geben Sie einen Vektor $\vec{w}$ an, sodass eine von $\vec{w}$ aufgespannte Gerade weder Vorder- noch Rückseite der Ebene E bezüglich $(\vec{w}_1, \vec{w}_2)$ schneidet.

Es ist $\vec{w} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{pmatrix}$.

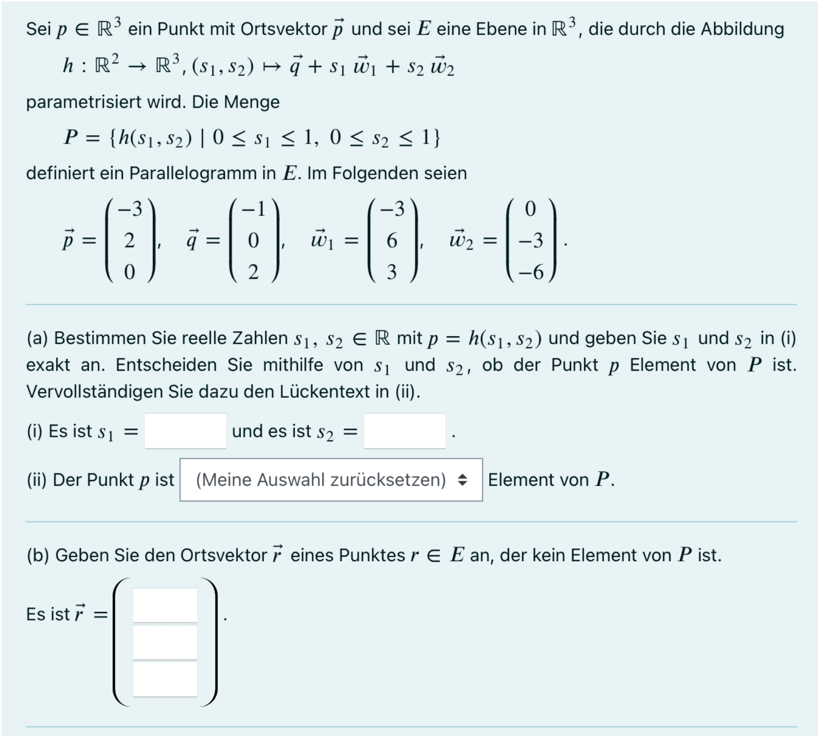
Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0

Thema	In dieser Aufgabe sollen die Lagebeziehung einer Geraden und der durch die Orientierung der Spannvektoren definierten Vorder- und Rückseite einer Ebene untersucht werden. Die Gerade und die Ebene sind durch ihre Spannvektoren definiert. In Aufgabenteil (a) sollen der Normalenvektor der Ebene als das Kreuzprodukt der Spannvektoren der Ebene berechnet werden. Weiterhin soll das Standardskalarprodukt des Normalenvektors der Ebene und des Spannvektors der Geraden berechnet werden. In Aufgabenteil (b) sollen drei Lückentexte zu wahren Aussagen über die Lagebeziehung der Geraden und Vorder- und Rückseite der Ebene ergänzt werden. Die Lagebeziehung unterscheidet sich durch die Wahl jeweils anderer Spannvektoren sowohl für die Gerade als auch für die Ebene. In Aufgabenteil (c) soll der Spannvektor einer Geraden angegeben werden, der weder die Vorder- noch die Rückseite der Ebene schneidet.
Vorkenntnisse	Parameterdarstellung von Geraden und Ebenen, Kriterien zur Bestimmung der Lagebeziehung von Geraden und Ebenen
Randomisierung	Die Komponenten der Spannvektoren der Geraden und der Ebene sind ganzzahlig und zufällig gewählt.
Anpassung	Die Spannvektoren der Ebene können beliebig gewählt werden,
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

2.3.3 Punkte und Polygone

2.3.3.1 Lagebeziehung von Punkten und Polygonen (1) (Parallelogramme)

Tags	Lagebeziehung, Punkt, Ebene, Polygon, Parallelogramm
Screenshot	(Stand 08.10.2024)



Sei $p \in \mathbb{R}^3$ ein Punkt mit Ortsvektor $\vec{p}$ und sei E eine Ebene in $\mathbb{R}^3$, die durch die Abbildung

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (s_1, s_2) \mapsto \vec{q} + s_1\,\vec{w}_1 + s_2\,\vec{w}_2$$

parametrisiert wird. Die Menge

$$P = \{h(s_1, s_2) \mid 0 \le s_1 \le 1,\ 0 \le s_2 \le 1\}$$

definiert ein Parallelogramm in E. Im Folgenden seien

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie reelle Zahlen $s_1,\ s_2 \in \mathbb{R}$ mit $p = h(s_1, s_2)$ und geben Sie s_1 und s_2 in (i) exakt an. Entscheiden Sie mithilfe von s_1 und s_2, ob der Punkt p Element von P ist. Vervollständigen Sie dazu den Lückentext in (ii).

(i) Es ist $s_1 =$ ____ und es ist $s_2 =$ ____ .

(ii) Der Punkt p ist (Meine Auswahl zurücksetzen) Element von P.

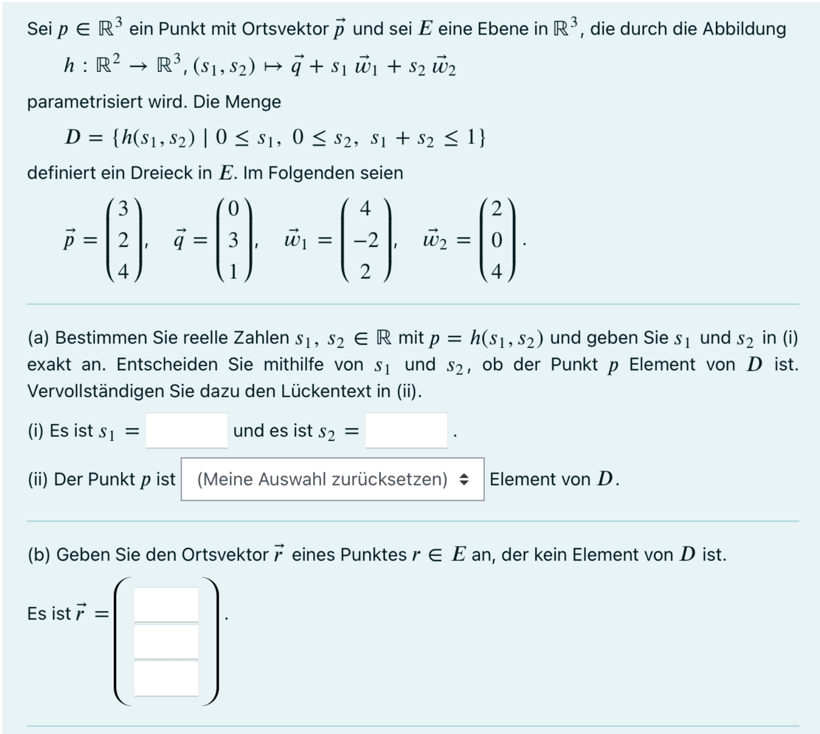
(b) Geben Sie den Ortsvektor $\vec{r}$ eines Punktes $r \in E$ an, der kein Element von P ist.

Es ist $\vec{r} =$ (____ ; ____ ; ____).

Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe sollen die Lagebeziehung von Punkten und einem Parallelogramm bestimmt werden. Die Ebene, in der das Parallelogramm liegt, ist in Parameterdarstellung gegeben. In Aufgabenteil (a) ist ein Punkt in der Ebene gegeben. Es sollen die Parameter des Punktes in der Parameterdarstellung der Ebene angegeben werden. Weiterhin soll ein Lückentext zu einer wahren Aussage über die Lagebeziehung des gegebene Punktes und des Parallelogramms ergänzt werden. In Aufgabenteil (b) soll ein Punkt angegeben werden, der in dem Parallelogramm liegt.
Vorkenntnisse	Parameterdarstellung von Ebenen, Kriterien zur Bestimmung der Lagebeziehung von Punkten und Ebenen, Ungleichungen zur Beschreibung elementarer geometrischer Figuren in $\mathbb{R}^2$
Randomisierung	Die Komponenten des Stützvektors und der Spannvektoren der Ebene sind ganzzahlig und zufällig gewählt.
Anpassung	Der OrtsvStützvektor und die Spannvektoren der Ebene können beliebig gewählt werden,
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

2.3.3.2 Lagebeziehung von Punkten und Polygonen (2) (Dreieck)

Tags	Lagebeziehung, Punkt, Ebene, Polygon, Dreieck
Screenshot	(Stand 08.10.2024)



Sei $p \in \mathbb{R}^3$ ein Punkt mit Ortsvektor $\vec{p}$ und sei E eine Ebene in $\mathbb{R}^3$, die durch die Abbildung

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (s_1, s_2) \mapsto \vec{q} + s_1\,\vec{w}_1 + s_2\,\vec{w}_2$$

parametrisiert wird. Die Menge

$$D = \{h(s_1, s_2) \mid 0 \leq s_1,\ 0 \leq s_2,\ s_1 + s_2 \leq 1\}$$

definiert ein Dreieck in E. Im Folgenden seien

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie reelle Zahlen $s_1,\ s_2 \in \mathbb{R}$ mit $p = h(s_1, s_2)$ und geben Sie s_1 und s_2 in (i) exakt an. Entscheiden Sie mithilfe von s_1 und s_2, ob der Punkt p Element von D ist. Vervollständigen Sie dazu den Lückentext in (ii).

(i) Es ist $s_1 =$ ___ und es ist $s_2 =$ ___ .

(ii) Der Punkt p ist (Meine Auswahl zurücksetzen) Element von D.

(b) Geben Sie den Ortsvektor $\vec{r}$ eines Punktes $r \in E$ an, der kein Element von D ist.

Es ist $\vec{r} =$ ( ) .

Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe sollen die Lagebeziehung von Punkten und einem Dreieck bestimmt werden. Die Ebene, in der das Dreick liegt, ist in Parameterdarstellung gegeben. In Aufgabenteil (a) ist ein Punkt in der Ebene gegeben. Es sollen die Parameter des Punktes in der Parameterdarstellung der Ebene angegeben werden. Weiterhin soll ein Lückentext zu einer wahren Aussage über die Lagebeziehung des gegebene Punktes und des Dreiecks ergänzt werden. In Aufgabenteil (b) soll ein Punkt angegeben werden, der in dem Dreieck liegt.
Vorkenntnisse	Parameterdarstellung von Ebenen, Kriterien zur Bestimmung der Lagebeziehung von Punkten und Ebenen, Ungleichungen zur Beschreibung elementarer geometrischer Figuren in $\mathbb{R}^2$
Randomisierung	Die Komponenten des Stützvektors und der Spannvektoren der Ebene sind ganzzahlig und zufällig gewählt.
Anpassung	Der Stützvektor und die Spannvektoren der Ebene können beliebig gewählt werden,
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

2.3.4 Geraden und Polygone

2.3.4.1 Lagebeziehung von Geraden und Polygonen (1) (Parallelogramme)

Tags	Lagebeziehung, Gerade, Ebene, Polygon, Parallelogramm
Screenshot	(Stand 08.10.2024)

Sei $p \in \mathbb{R}^3$ ein Punkt mit Ortsvektor $\vec{p}$ und sei E eine Ebene in $\mathbb{R}^3$, die durch die Abbildung

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (s_1, s_2) \mapsto \vec{q} + s_1\,\vec{w}_1 + s_2\,\vec{w}_2$$

parametrisiert wird. Die Menge

$$P = \{h(s_1, s_2) \mid 0 \le s_1 \le 1,\ 0 \le s_2 \le 1\}$$

definiert ein Parallelogramm in E. Im Folgenden seien

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie den Richtungsvektor $\vec{v}$, sodass die durch

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, t \mapsto \vec{p} + t\,\vec{v}$$

parametrisierte Gerade G das Parallelogramm P in seinem Mittelpunkt m schneidet.

(a) Geben Sie den Ortsvektor $\vec{m}$ von m an.

Es ist $\vec{m} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{pmatrix}$.

(b) Geben Sie den Richtungsvektor $\vec{v}$ an.

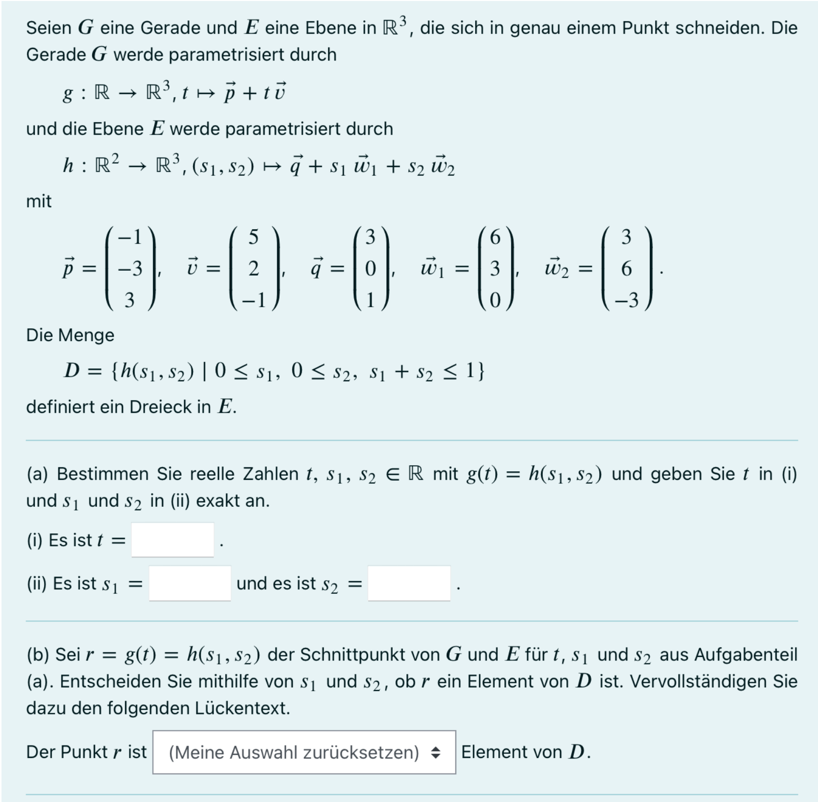
Es ist $\vec{v} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{pmatrix}$.

Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll der Spannvektor einer Geraden, so gewählt werden, dass die Gerade ein gegebenes Parallelogramm in seinem Mittelpunkt schneidet. Die Ebene, in der das Parallelogramm liegt, ist in Parameterdarstellung gegeben. In Aufgabenteil (a) ist der Mittelpunkt des Parallelogramms zu bestimmen. In Aufgabenteil (b) soll mithilfe des Stützvektors der Geraden und dem Mittelpunkt des Parallelogramms ein Spannvektor der Geraden bestimmt werden.
Vorkenntnisse	Parameterdarstellung von Geraden und Ebenen, Ungleichungen zur Beschreibung elementarer geometrischer Figuren in $\mathbb{R}^2$
Randomisierung	Die Komponenten des Stützvektors der Geraden, des Stützvektors der Ebene und der Spannvektoren der Ebene sind ganzzahlig und so zufällig gewählt, dass die Gerade nicht in der Ebene verlaufen kann.
Anpassung	Der Stützvektor und die Spannvektoren der Ebene können beliebig gewählt werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

2.3.4.2 Lagebeziehung von Geraden und Polygonen (2) (Dreiecke)

Tags: Lagebeziehung, Gerade, Ebene, Polygon, Dreieck

Screenshot: (Stand 08.10.2024)



Seien G eine Gerade und E eine Ebene in $\mathbb{R}^3$, die sich in genau einem Punkt schneiden. Die Gerade G werde parametrisiert durch

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, t \mapsto \vec{p} + t\,\vec{v}$$

und die Ebene E werde parametrisiert durch

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (s_1, s_2) \mapsto \vec{q} + s_1\,\vec{w}_1 + s_2\,\vec{w}_2$$

mit

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Die Menge

$$D = \{h(s_1, s_2) \mid 0 \le s_1,\ 0 \le s_2,\ s_1 + s_2 \le 1\}$$

definiert ein Dreieck in E.

(a) Bestimmen Sie reelle Zahlen t, s_1, $s_2 \in \mathbb{R}$ mit $g(t) = h(s_1, s_2)$ und geben Sie t in (i) und s_1 und s_2 in (ii) exakt an.

(i) Es ist $t =$ ______ .

(ii) Es ist $s_1 =$ ______ und es ist $s_2 =$ ______ .

(b) Sei $r = g(t) = h(s_1, s_2)$ der Schnittpunkt von G und E für t, s_1 und s_2 aus Aufgabenteil (a). Entscheiden Sie mithilfe von s_1 und s_2, ob r ein Element von D ist. Vervollständigen Sie dazu den folgenden Lückentext.

Der Punkt r ist (Meine Auswahl zurücksetzen) Element von D.

Autor: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: In dieser Aufgabe soll die Lagebeziehung einer Geraden und eines Dreiecks untersucht werden. Die Gerade und die Ebene, in der das Dreieck liegt, sind in Parameterdarstellung gegeben. In Aufgabenteil (a) sollen die Parameter des Schnittpunkts der Geraden und der Ebene in den Parameterdarstellungen der Geraden und der Ebene bestimmt werden. In Aufgabenteil (b) soll ein Lückentext zu einer wahren Aussage über die Lagebeziehung der Geraden und des Dreiecks ergänzt werden.

Vorkenntnisse: Parameterdarstellung von Geraden und Ebenen, Kriterien zur Bestimmung der Lagebeziehung von Geraden und Ebenen, Ungleichungen zur Beschreibung elementarer geometrischer Figuren in $\mathbb{R}^2$

Randomisierung: Die Komponenten des Stützvektors und des Spannvektors der Geraden, des Stützvektors der Ebene und der Spannvektoren der Ebene sind ganzzahlig und so zufällig gewählt, dass die Gerade die Ebene in genau einem Punkt schneidet.

Anpassung: Der Stützvektor und die Spannvektoren der Ebene können beliebig gewählt werden,

Sonderoption: Feedback unterdrücken: ja

2.3.4.3 Lagebeziehung von Geraden und Polygonen (3) (Orientierte Dreiecke)

Tags	Lagebeziehung, Gerade, Ebene, Polygon, Dreieck, Orientierung
Screenshot	(Stand 08.10.2024)

Seien G eine Gerade und E eine Ebene in $\mathbb{R}^3$, die sich in genau einem Punkt schneiden. Die Gerade G werde parametrisiert durch

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3, t \mapsto \vec{p} + t\,\vec{v}$$

und die Ebene E werde parametrisiert durch

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, (s_1, s_2) \mapsto \vec{q} + s_1\,\vec{w}_1 + s_2\,\vec{w}_2$$

mit

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{q} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

Die Menge

$$D = \{h(s_1, s_2) \mid 0 \le s_1,\ 0 \le s_2,\ s_1 + s_2 \le 1\}$$

definiert ein Dreieck in E.

▶ Vorder- und Rückseiten von Ebenen und von Teilmengen von Ebenen

---

(a) Bestimmen Sie den Normalenvektor $\vec{n} = \vec{w}_1 \times \vec{w}_2$ und das Standardskalarprodukt $\vec{n} \cdot \vec{v}$ von $\vec{n}$ und $\vec{v}$.

(i) Es ist $\vec{n} = \begin{pmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{pmatrix}$.

(ii) Es ist $\vec{n} \cdot \vec{v} =$ ______ .

(a) Bestimmen Sie reelle Zahlen $t,\ s_1,\ s_2 \in \mathbb{R}$ mit $g(t) = h(s_1, s_2)$ und geben Sie t in (i) und s_1 und s_2 in (ii) exakt an.

(i) Es ist $t =$ ______ .

(ii) Es ist $s_1 =$ ______ und es ist $s_2 =$ ______ .

(c) Vervollständigen Sie mithilfe von Aufgabenteilen (a) und (b) die folgende Aussage zu einer im Allgemeinen wahren Aussage über die Lagebeziehung von G und D.

Die Gerade G schneidet [(Meine Auswahl zurücksetzen) ⬍] des Dreiecks D bezüglich $(\vec{w}_1, \vec{w}_2)$.

Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0

Thema	In dieser Aufgabe soll die Lagebeziehung einer Geraden und der Vorder- und Rückseite eines Dreiecks untersucht werden. Die Gerade und die Ebene, in der das Dreieck liegt, sind in Parameterdarstellung gegeben. In Aufgabenteil (a) soll ein Normalenvektor der Ebene als Kreuzprodukt der Spannvektoren der Ebene bestimmt werden. Weiterhin soll das Standardskalarprodukt des Normalenvektors der Ebene mit dem Spannvektor der Geraden bestimmt werden. In Aufgabenteil (b) sollen die Parameter des Schnittpunkts der Geraden und der Ebene in den Parameterdarstellungen der Geraden und der Ebene bestimmt werden. In Aufgabenteil (c) soll ein Lückentext zu einer wahren Aussage über die Lagebeziehung der Geraden und der Vorder- und Rückseite des Dreiecks ergänzt werden.
Vorkenntnisse	Parameterdarstellung von Geraden und Ebenen, Kriterien zur Bestimmung der Lagebeziehung von Geraden und Ebenen, Ungleichungen zur Beschreibung elementarer geometrischer Figuren in $\mathbb{R}^2$
Randomisierung	Die Komponenten des Stützvektors und des Spannvektors der Geraden, des Stützvektors der Ebene und der Spannvektoren der Ebene sind ganzzahlig und so zufällig gewählt, dass die Gerade die Ebene in genau einem Punkt schneidet.
Anpassung	Der Stützvektor und die Spannvektoren der Ebene können beliebig gewählt werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

2.3.4.4 Lagebeziehung von Geraden und Polygonen (4) (Sichtbare Dreiecke)

Tags Lagebeziehung, Gerade, Halbgerade, Ebene, Polygon, Dreieck, Orientierung

Screenshot (Stand 08.10.2024)

Betrachten Sie die Halbgerade

$$G_+ = \{\vec{p} + t\,\vec{v} \mid t > 0\}.$$

und die Dreiecke

$$D_i = \{\vec{q}_i + s_1\,\vec{w}_{i1} + s_2\,\vec{w}_{i2} \mid 0 \le s_1,\ 0 \le s_2,\ s_1 + s_2 \le 1\}$$

für $i \in \{1, 2, \ldots, 6\}$. Sei $\vec{q}$ der Ortsvektor eines beliebigen Punktes und seien $\vec{w}_1$, $\vec{w}_2$ linear unabhängige Vektoren, dann seien $\vec{p} = \vec{q} + \vec{n}$ und $\vec{v} = -\vec{n}$ mit $\vec{n} = \vec{w}_1 \times \vec{w}_2$ und

(1)	$\vec{q}_1 = \vec{q}$,	$\vec{w}_{11} = \vec{w}_1$,	$\vec{w}_{12} = \vec{w}_2$,
(2)	$\vec{q}_2 = \vec{q} - \vec{w}_2$,	$\vec{w}_{21} = \vec{w}_1$,	$\vec{w}_{22} = \vec{w}_2 - \vec{w}_1$,
(3)	$\vec{q}_3 = \vec{q} - \vec{n}$,	$\vec{w}_{31} = \vec{w}_2$,	$\vec{w}_{32} = \vec{w}_2 - \vec{w}_1$,
(4)	$\vec{q}_4 = \vec{w}_1 + \vec{q}$,	$\vec{w}_{41} = \vec{w}_2 - \vec{w}_1$,	$\vec{w}_{42} = -\vec{w}_1$,
(5)	$\vec{q}_5 = \vec{w}_1 + \vec{q}$,	$\vec{w}_{51} = \vec{w}_2$,	$\vec{w}_{52} = -\vec{w}_1$,
(6)	$\vec{q}_6 = \vec{q}$,	$\vec{w}_{61} = \vec{w}_2$,	$\vec{w}_{62} = \vec{w}_2 - \vec{w}_1$.

▶ Sichtbare Dreiecke

Genau eine der folgenden Aussagen über die Sichtbarkeit der Dreiecke D_1, D_2, ..., D_6 bezüglich G_+ ist im Allgemeinen wahr. Bestimmen Sie, welches der genannten Dreiecke sichtbar oder nicht sichtbar bezüglich G_+ ist und markieren Sie die zugehörige im Allgemeinen wahre Aussage.

- (Meine Auswahl zurücksetzen)

- (1) Das Dreieck D_1 ist nicht sichtbar bezüglich G_+.
- (2) Das Dreieck D_2 ist nicht sichtbar bezüglich G_+.
- (3) Das Dreieck D_3 ist nicht sichtbar bezüglich G_+.
- (4) Das Dreieck D_4 ist nicht sichtbar bezüglich G_+.
- (5) Das Dreieck D_5 ist nicht sichtbar bezüglich G_+.
- (6) Das Dreieck D_6 ist nicht sichtbar bezüglich G_+.

Autor Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz CC BY-SA 4.0

Thema In dieser Aufgabe soll die Lagebeziehung einer Halbgeraden und sechs Dreiecken untersucht werden. Es soll genau das Dreieck identifiziert werden, das bezüglich der Halbgeraden nicht sichtbar ist.

Vorkenntnisse Parameterdarstellung von Geraden und Ebenen, Kriterien zur Bestimmung der Lagebeziehung von Geraden und Ebenen, Ungleichungen zur Beschreibung elementarer geometrischer Figuren in $\mathbb{R}^2$

Randomisierung Die Reihenfolge der Dreiecke ist randomisiert.

Anpassung keine

Sonderoption Feedback unterdrücken: ja

3 Grundlagen der Eindimensionalen Analysis

3.1 Grundbegriffe und Eigenschaften von Funktionen

Die Aufgaben in diesem Themenbereich behandeln grundlegende Begriffe zu und Eigenschaften von Funktionen, wie Injektivität, Surjektivität und Bijektivität am Beispiel elementarer reeller Funktionen.

Inhaltsverzeichnis

◄ ▲ ►

3.1.1 Bilder und Urbilder reeller Funktionen

3.1.1.1 Bild und Urbild einer quadratischen Funktion

Tags: Quadratische Funktion, Bild, Urbild

Screenshot: (Stand 06.10.2024)

> Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit
>
> $f(x) = 3\,x^2 + 12\,x + 3.$
>
> (a) Bestimmen Sie das Bild $f(U)$ der Menge $U = [-5, 2]$ unter f. Geben Sie Ihre Lösung als Intervall an. Beachten Sie die Schreibweise `cc(a,b)`, wenn es sich um das geschlossene Intervall $[a, b]$ und `oo(a,b)`, wenn es sich um das offene Intervall (a, b) handelt.
>
> Es ist $f(U) =$
>
> (b) Bestimmen Sie das Urbild $f^{-1}(V)$ der Menge $V = (3, 66)$ unter f. Beachten Sie, dass Sie eine Schnittmenge von Intervallen `I` und `J` über `intersection(I,J)` und eine Vereinigung über `union(I,J)` eingeben, wobei `I` und `J` wie in Aufgabenteil (a) festgelegt sind.
>
> Es ist $f^{-1}(V) =$

Autor: Tim Inoue (Uni-DUE)

Idee: Tim Inoue

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: In dieser Aufgabe ist die quadratische Funktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$$

gegeben. In Aufgabenteil (a) soll das Bild $f(U)$ eines abgeschlossenen Intervalls $U = [a, b]$ unter f bestimmt werden. In Aufgabenteil (b) soll das Urbild $f^{-1}(V)$ eines offenen Intervalls $V = (c, d)$ unter f bestimmt werden.

Vorkenntnisse: Äquivalenzumformung, Bild und Urbild von Mengen unter einer Funktion

Randomisierung: Die Koeffizienten a_2, a_1 und a_0 sind randomisiert. Die Intervalle $[a, b]$ und (c, d) sind ebenfalls so randomisiert, dass die Lösungen $f(U)$ und $f^{-1}(V)$ ganzzahlige Intervallgrenzen besitzen.

Anpassungen: Die Funktion f kann um weitere Funktionen ergänzt werden, die Lösungsmenge muss entsprechend angepasst werden.

Sonderoption: Feedback unterdrücken: ja

3.1.1.2 Bilder reeller Funktionen

Tags Ungleichung, Bild

Screenshot (Stand 06.10.2024)

Betrachten Sie die Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die definiert sind durch

$$f(x) = 2\,x + 4, \quad g(x) = x^2 + 1.$$

Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ Mengen mit

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}.$$

(a) Bestimmen Sie die Bildmenge $f(A)$. Geben Sie dazu eine die Elemente y von $f(A)$ beschreibende Bedingung in Form einer Ungleichung an. Geben Sie zum Beispiel eine Bedingung $2 < y \leq 4$ als `y > 2 and y <= 4` oder eine Bedingung $y < 2$ oder $y \geq 4$ als `y < 2 or y >=4` ein.

Es ist $f(A) = \{y \in \mathbb{R} \mid$ ______ $\}$.

(b) Bestimmen Sie die Bildmenge $g(A)$.

Es ist $g(A) = \{y \in \mathbb{R} \mid$ ______ $\}$.

(c) Bestimmen Sie die Bildmenge $g(B)$.

Es ist $g(B) = \{y \in \mathbb{R} \mid$ ______ $\}$.

Autor Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz CC BY-SA 4.0

Thema In dieser Aufgabe sind Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = 2\,x + a, \qquad g(x) = x^2 + b \tag{3.1.1}$$

und Mengen

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq s_1\}, \qquad B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq s_2\} \tag{3.1.2}$$

gegeben. In Aufgabenteil (a) soll das Bild von A unter f bestimmt werden. In den Aufgabenteilen (b) und (c) sollen jeweils die Urbilder von A und B unter g bestimmt werden. Die Urbildmengen sollen mithilfe von Ungleichungen angegeben werden.

Vorkenntnisse Äquivalenzumformung, Bild von Mengen unter Funktionen

Randomisierung Die Konstante a und die Schranken s_1 und s_2 werden zufällig als ganze Zahlen mit $a \in \{2, 4\}$, $s_1, s_2 \in \{1, 2, 3\}$ gewählt. Die Konstante b ist gleich $s_1 - 1$.

Anpassungen keine

Sonderoption Feedback unterdrücken: ja

3.1.1.3 Urbilder reeller Funktionen

Tags: Ungleichung, Urbild

Screenshot: (Stand 06.10.2024)

Betrachten Sie die Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die definiert sind durch

$$f(x) = 2\,x + 2, \quad g(x) = x^2 + 3.$$

Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ Mengen mit

$$A = \{y \in \mathbb{R} \mid y \geq 4\}, \quad B = \{y \in \mathbb{R} \mid y \leq 19\}.$$

(a) Bestimmen Sie die Urbildmengen $f^{-1}(A)$. Geben Sie dazu eine die Elemente x von $f^{-1}(A)$ beschreibende Bedingung in Form einer Ungleichung an. Geben Sie zum Beispiel eine Bedingung $2 < x \leq 4$ als `x > 2 and x <= 4` oder eine Bedingung $x < 2$ oder $x \geq 4$ als `x < 2 or x >=4` ein.

Es ist $f^{-1}(A) = \{x \in \mathbb{R} \mid$ ______ $\}$.

(b) Bestimmen Sie die Urbildmengen $g^{-1}(A)$.

Es ist $g^{-1}(A) = \{x \in \mathbb{R} \mid$ ______ $\}$.

(c) Bestimmen Sie die Urbildmengen $g^{-1}(B)$.

Es ist $g^{-1}(B) = \{x \in \mathbb{R} \mid$ ______ $\}$.

Autor: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: In dieser Aufgabe sind Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = 2\,x + a, \qquad g(x) = x^2 + b \tag{3.1.3}$$

und Mengen

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq s_1\}, \qquad B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq s_2\} \tag{3.1.4}$$

gegeben. In Aufgabenteil (a) soll das Urbild von A unter f bestimmt werden. In den Aufgabenteilen (b) und (c) sollen jeweils die Bilder von A und B unter g bestimmt werden. Die Bildmengen sollen mithilfe von Ungleichungen angegeben werden.

Vorkenntnisse: Äquivalenzumformung, Urbild von Mengen unter Funktionen

Randomisierung: Die Konstante a und die Schranke s_1 werden als ganze Zahlen mit $a \in \{2, 4\}$ und $s_1 \in \{2, 4, 6\}$ gewählt. Die Schranke b ist gleich $s_1 - 1$ und die Schranke s_2 ist gleich $s_1^2 + b$.

Anpassungen: keine

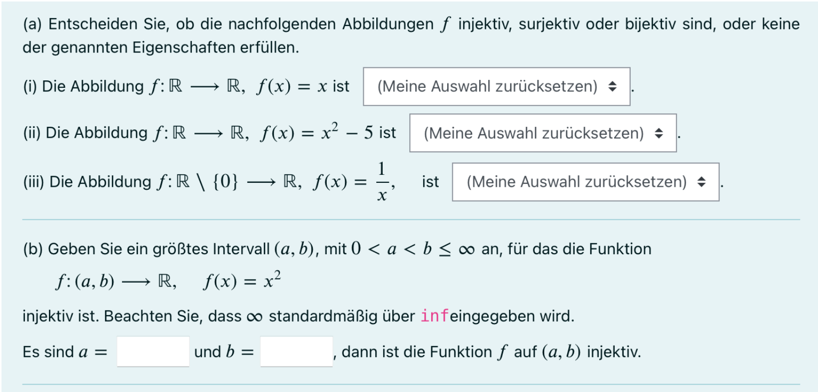
Sonderoption: Feedback unterdrücken: ja

3.1.2 Injektitvität, Surjektivität und Bijektivität

3.1.2.1 Injektivität und Surjektivität (1)

Tags Injektiv, Surjektiv, Bijektiv, Funktion

Screenshot (Stand 06.10.2024)



Autor Tim Inoue (Uni-DUE)

Idee Tim Inoue

Lizenz CC BY-SA 4.0

Thema In Aufgabenteil (a) (i) - (iii) sind Funktionen f dargestellt, bei denen entschieden werden soll, ob sie injektiv, surjektiv oder bijektiv sind, oder keine der genannten Eigenschaften erfüllen. In Aufgabenteil (b) ist die Funktion

$$f\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = x^2$$

gegeben. Es sollen Werte für a und b gefunden werden, sodass (a,b) das größte Intervall ist, auf dem f injektiv ist.

Vorkenntnisse Injektivität, Surjektivität, Bijektivität, Äquivalenzumformungen, Funktionen

Randomisierung keine

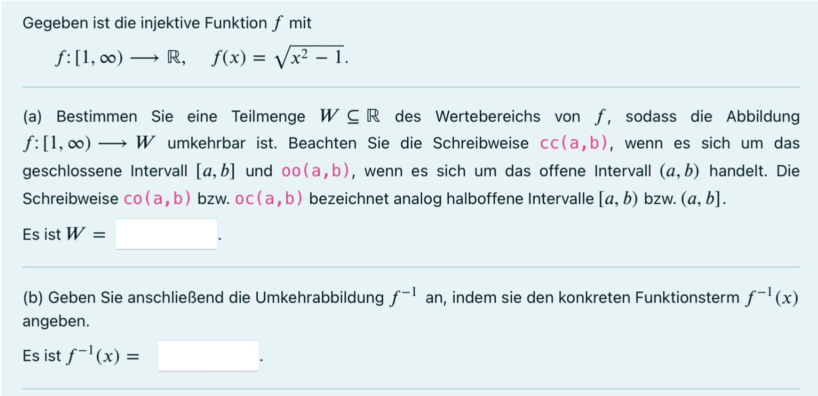
Anpassungen Die Funktionen f in den Aufgabenteilen (a) (i) - (iii) können um weitere Funktionen ergänzt werden

Sonderoption Feedback unterdrücken: ja

3.1.2.2 Injektivität und Surjektivität (2)

Tags — Injektiv, Surjektiv, Bijektiv, Umkehrfunktion

Screenshot — (Stand 06.10.2024)


Gegeben ist die injektive Funktion f mit

$$f\colon [1,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{x^2-1}.$$

(a) Bestimmen Sie eine Teilmenge $W \subseteq \mathbb{R}$ des Wertebereichs von f, sodass die Abbildung $f\colon [1,\infty) \longrightarrow W$ umkehrbar ist. Beachten Sie die Schreibweise `cc(a,b)`, wenn es sich um das geschlossene Intervall $[a,b]$ und `oo(a,b)`, wenn es sich um das offene Intervall (a,b) handelt. Die Schreibweise `co(a,b)` bzw. `oc(a,b)` bezeichnet analog halboffene Intervalle $[a,b)$ bzw. $(a,b]$.

Es ist $W =$.

(b) Geben Sie anschließend die Umkehrabbildung f^{-1} an, indem sie den konkreten Funktionsterm $f^{-1}(x)$ angeben.

Es ist $f^{-1}(x) =$.

Autor — Tim Inoue (Uni-DUE)

Idee — Tim Inoue

Lizenz — CC BY-SA 4.0

Thema — In dieser Aufgabe ist die injektive Funktion

$$f\colon [1,\infty) \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \sqrt{x^2-1}$$

gegeben. In Aufgabenteil (a) soll eine Teilmenge $W \subseteq \mathbb{R}$ bestimmt werden, sodass die Funktion f umkehrbar ist. In Aufgabenteil (b) soll anschließend die Umkehrfunktion f^{-1} angegeben werden.

Vorkenntnisse — Äquivalenzumformung, Bild und Urbild von Mengen unter einer Funktion, Umkehrbarkeit von Funktionen

Randomisierung — keine

Anpassungen — Die Funktion f kann angepasst werden, solange sie umkehrbar bleibt.

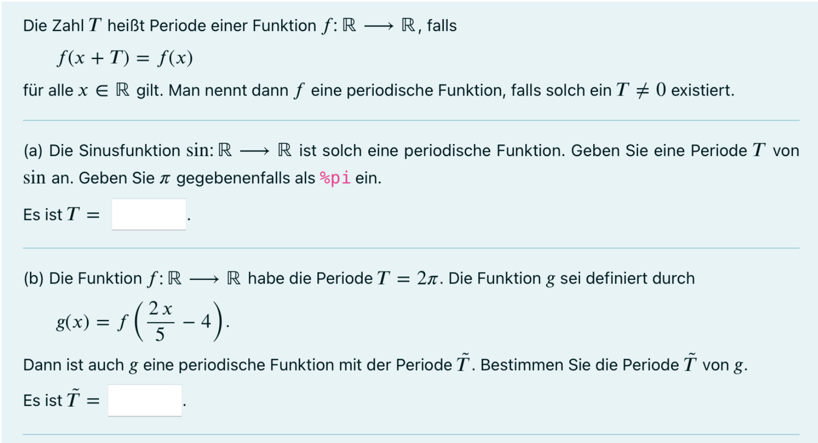
Sonderoption — Feedback unterdrücken: ja

3.1.3 Periodische Funktionen

3.1.3.1 Periodische Funktionen

Tags Sinus, Periode, Funktion

Screenshot (Stand 06.10.2024)



Die Zahl T heißt Periode einer Funktion $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, falls

$$f(x+T) = f(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Man nennt dann f eine periodische Funktion, falls solch ein $T \neq 0$ existiert.

(a) Die Sinusfunktion $\sin\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ist solch eine periodische Funktion. Geben Sie eine Periode T von $\sin$ an. Geben Sie π gegebenenfalls als `%pi` ein.

Es ist $T =$.

(b) Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ habe die Periode $T = 2\pi$. Die Funktion g sei definiert durch

$$g(x) = f\left(\frac{2\,x}{5} - 4\right).$$

Dann ist auch g eine periodische Funktion mit der Periode $\tilde{T}$. Bestimmen Sie die Periode $\tilde{T}$ von g.

Es ist $\tilde{T} =$.

Autor Tim Inoue (Uni-DUE)

Idee Tim Inoue

Lizenz CC BY-SA 4.0

Thema In dieser Aufgabe wird zunächst der Begriff der Periode T einer Funktion f erläutert. In Aufgabenteil (a) wird eine Periode der Sinusfunktion abgefragt. In Aufgabenteil (b) ist eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit der Periode $T = 2\pi$ gegeben. Ferner ist eine Funktion g durch

$$g(x) = f(ax - b)$$

definiert. Dann ist g ebenfalls periodisch und es soll eine Periode $\tilde{T}$ von g bestimmt werden.

Vorkenntnisse Äquivalenzumformung, Periodische Funktionen

Randomisierung Die Koeffizienten a und b sind so randomisiert, dass $\tilde{T}$ ein ganzzahliges Vielfaches von π bleibt.

Anpassungen Die Funktionen f und g können angepasst werden, solange sie periodisch bleiben.

Sonderoption Feedback unterdrücken: ja

3.2 Folgen, Reihen und Funktionenfolgen

Die Aufgaben dieses Themenbereichs umfassen Zahlenfolgen, unendliche Reihen und Funktionenfolgen. Schwerpunkte bilden die Untersuchung des Konvergenzverhaltens und Bestimmung des Grenzwerts von reellen Zahlenfolgen, darunter auch rekursiv definierte Folgen, die Anwendung von Konvergenzkriterien für unendliche Reihen und die Unterscheidung von verschiedenen Konvergenzbegriffen für Funktionenfolgen.

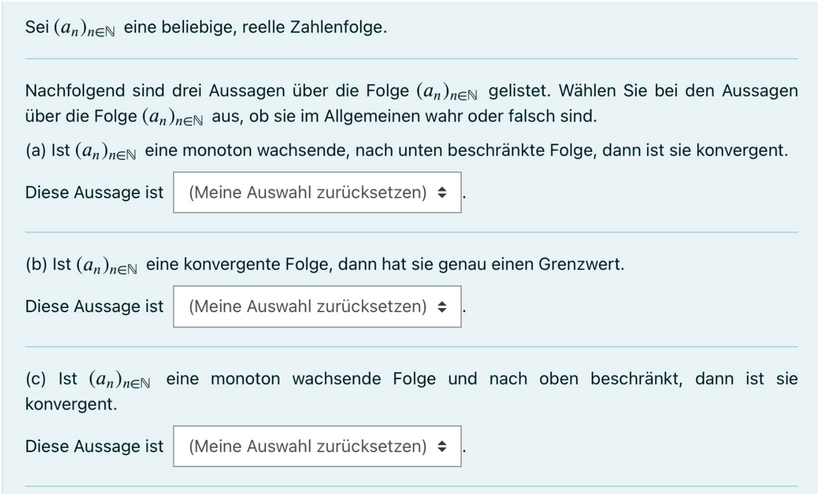
Inhaltsverzeichnis

◄ ▲ ►

3.2.1 Konvergenz von Zahlenfolgen

3.2.1.1 Aussagen über reelle Zahlenfolgen

Tags	Folgen, Konvergenz, Mathematik
Screenshot	(Stand 06.10.2024)



Autor	Tim Inoue (Uni-DUE)
Idee	Frauke Sprengel Susanne Bellmer
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe ist eine beliebige $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben. In den Aufgabenteilen (a), (b) und (c) sollen Aussagen über $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Allgemeingültigkeit geprüft und mit Wahr oder Falsch markiert werden.
Vorkenntnisse	Folgen, Konvergenz
Randomisierung	Die Auswahl der Aussagen in (a) bis (c) erfolgt randomisiert aus einer Liste von Aussagen.
Anpassungen	Die Liste an Aussagen kann ergänzt und angepasst werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

3.2.1.2 Konvergente Zahlenfolgen (1)

Tags	Zahlenfolge, Konvergenz, binomische Formel
Screenshot	(Stand 03.09.2024)

Seien $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen reeller Zahlen mit $0 \leq b_n < d_n < \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \frac{d_n^2 - b_n^2}{d_n + b_n}$$

gegen null konvergiert.

Bestimmen Sie dazu für festes $k \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl $N_k \in \mathbb{N}$, sodass $|a_n| \leq \frac{1}{k}$ für all $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N_k$ erfüllt ist.

Es ist $N_k =$ ______.

Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe wird die Konvergenz der Komposition zweier Nullfolgen anhand der Definition von Konvergenz von Zahlenfolgen untersucht. Zentraler Bestandteil ist dabei, dass die Komposition durch Verwendung der binomischen Formel vereinfacht werden kann.
Vorkenntnisse	Konvergenz von Zahlenfolgen, binomische Formel, Rechnen mit Ungleichungen
Randomisierung	Die Bezeichner der drei Folgen werden zufällig aus einer Liste von vier Bezeichnern ausgewählt. Dies hat keinen inhaltlichen Einfluss auf die Aufgabe.
Anpassungen	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

3.2.1.3 Konvergente Zahlenfolgen (2)

Tags	Zahlenfolge, Beschränktheit, Konvergenz
Screenshot	(Stand 06.10.2024)

Betrachten Sie die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \frac{\alpha\, n^2 - 5}{8 - 9\, n} - \frac{5\, n^2 + 3}{2 - 3\, n}.$$

(a) Geben Sie den Koeffizienten α so an, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist.

Es ist $\alpha =$ ____.

(b) Bestimmen Sie mit der Wahl von α aus Aufgabenteil (a) den Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, falls dieser existiert.

Geben Sie `±inf` ein, falls die Folge bestimmt gegen $\pm\infty$ divergiert.

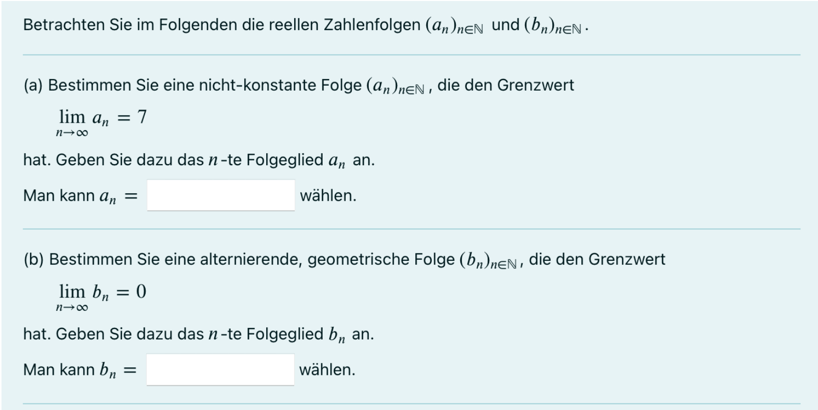
Es ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n =$ ____.

Autor	Tim Inoue (Uni-DUE)
Idee	Jörg Härterich
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $$a_n = \frac{f(n,\alpha)}{g(n)} - \frac{h(n)}{k(n)}$$ für Polynomfunktionen f, g und h gegeben. In Aufgabenteil (a) soll der Koeffizient α so bestimmt werden, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist. In Aufgabenteil (b) soll schließlich der Grenzwert in Abhängigkeit von α aus (a) bestimmt werden, wobei die bestimmte Divergenz gegen $\pm\infty$ durch $\pm$ `inf` festgelegt wird.
Vorkenntnisse	Folgen, Konvergenz, Koeffizientenvergleich, Beschränktheit von Folgen, Äquivalenzumformungen
Randomisierung	Die Koeffizienten der Funktionen f, g und h sind ganzzahlig randomisiert.
Anpassungen	Die Folge a_n kann für eine erhöhte Schwierigkeit angepasst werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

3.2.1.4 Konvergente Zahlenfolgen (3)

Tags Zahlenfolge, alternierende Folge, geometrische Folge, Konvergenz

Screenshot (Stand 06.10.2024)


Betrachten Sie im Folgenden die reellen Zahlenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(a) Bestimmen Sie eine nicht-konstante Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 7$$

hat. Geben Sie dazu das n-te Folgeglied a_n an.

Man kann $a_n =$ wählen.

(b) Bestimmen Sie eine alternierende, geometrische Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

hat. Geben Sie dazu das n-te Folgeglied b_n an.

Man kann $b_n =$ wählen.

Autor Tim Inoue (Uni-DUE)

Idee Jonas Priebe

Lizenz CC BY-SA 4.0

Thema In dieser Aufgabe sollen reelle Zahlenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ betrachtet werden. In Aufgabenteil (a) soll eine nicht-konstante Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gewählt werden, sodass

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$

gilt. In Aufgabenteil (b) soll eine alternierende, geometrische Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ angegeben werden, die den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

hat.

Vorkenntnisse Folgen, Konvergenz, alternierende Folgen, geometrische Folgen

Randomisierung Der Grenzwert a ist ganzzahlig randomisiert.

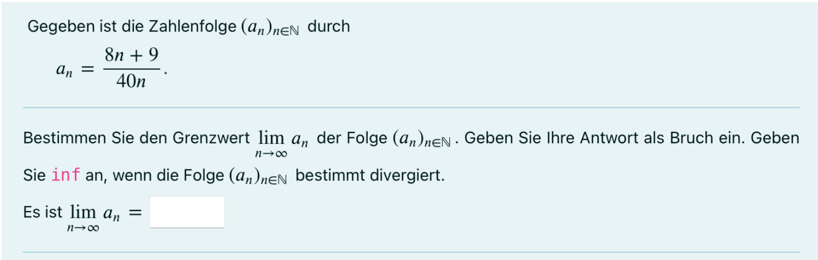
Anpassungen Der Grenzwerte der Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ können für eine erhöhte Schwierigkeit angepasst werden.

Sonderoption Feedback unterdrücken: ja

3.2.1.5 Konvergente Zahlenfolgen (4)

Tags: Zahlenfolge, Konvergenz

Screenshot: (Stand 06.10.2024)



Autor: Tim Inoue (Uni-DUE)

Idee: Nikta Shayanfar
Miriam Weigel

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: In dieser Aufgabe ist die Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \frac{pn+c}{kpn}$$

für ganze Zahlen c, k und p gegeben. Es soll der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} a_n$$

bestimmt werden, wobei Divergenz über `inf` angegeben werden soll.

Vorkenntnisse: Folgen, Konvergenz

Randomisierung: Der Grenzwert a ist ganzzahlig randomisiert. Die Parameter c, k und p sind ganzzahlig um a herum randomisiert.

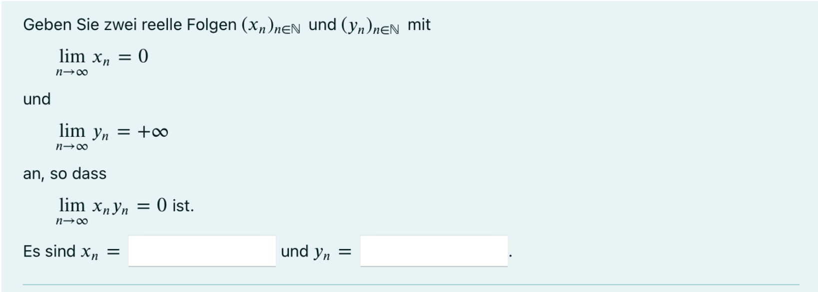
Anpassungen: Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kann für eine erhöhte Schwierigkeit angepasst werden.

Sonderoption: Feedback unterdrücken: ja

3.2.1.6 Produkt von Zahlenfolgen (1)

Tags: Zahlenfolge, Konvergenz, Divergenz, Grenzwert, Produkte von Folgen

Screenshot: (Stand 06.10.2024)


Geben Sie zwei reelle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

und

$$\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$$

an, so dass

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0 \text{ ist.}$$

Es sind $x_n =$ ______ und $y_n =$ ______.

Autor: Tim Inoue (Uni-DUE)

Idee: Jörg Härterich

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: In dieser Aufgabe sollen zwei Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt werden, wobei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert. Es soll zusätzlich die Produktfolge $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren oder divergieren.

Vorkenntnisse: Folgen, Konvergenz

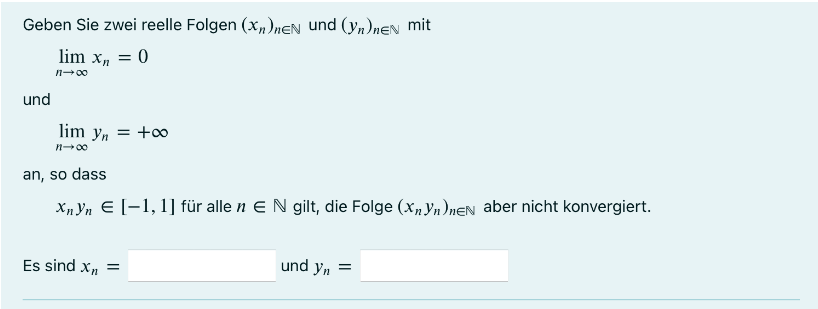
Randomisierung: Die Konvergenz oder Divergenz der Produktfolge $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist randomisiert.

Anpassungen: Die Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ können für eine erhöhte Schwierigkeit angepasst werden.

Sonderoption: Feedback unterdrücken: ja

3.2.1.7 Produkt von Zahlenfolgen (2)

Tags	Zahlenfolge, Konvergenz, Divergenz, Grenzwert, Produkte von Folgen
Screenshot	(Stand 06.10.2024)


Geben Sie zwei reelle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

und

$$\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$$

an, so dass

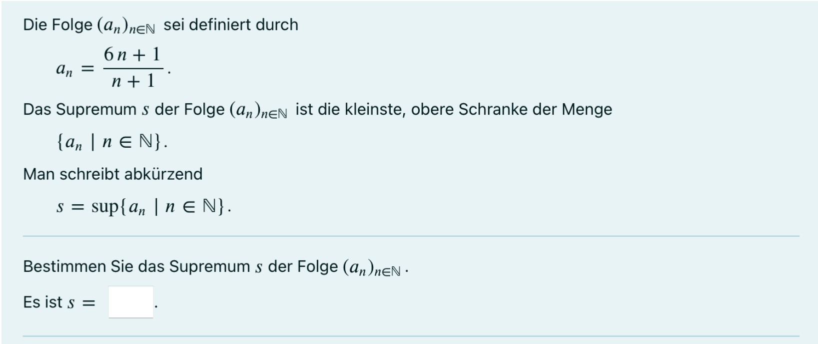
$x_n y_n \in [-1,1]$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, die Folge $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aber nicht konvergiert.

Es sind $x_n =$ und $y_n =$

Autor	Tim Inoue (Uni-DUE)
Idee	Jörg Härterich
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe sollen zwei Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt werden, wobei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergiert. Es soll zusätzlich die Produktfolge $(x_n y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im Intervall $[-1,1]$ liegen, aber nicht konvergieren.
Vorkenntnisse	Folgen, Konvergenz
Randomisierung	keine
Anpassungen	Die Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ können für eine erhöhte Schwierigkeit angepasst werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

3.2.1.8 Supremum einer Zahlenfolge

Tags	Zahlenfolge, Konvergenz, Supremum
Screenshot	(Stand 06.10.2024)


Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei definiert durch

$$a_n = \frac{6n+1}{n+1}.$$

Das Supremum s der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist die kleinste, obere Schranke der Menge

$$\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Man schreibt abkürzend

$$s = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

Bestimmen Sie das Supremum s der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Es ist $s =$.

Autor	Tim Inoue (Uni-DUE)
Idee	Julia Joklitschke
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe ist eine Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $a_n = \frac{an+1}{n+1}$ für eine ganze Zahl a. Es soll das Supremum $s = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt werden.
Vorkenntnisse	Folgen, Supremum, Beschränktheit
Randomisierung	Der Parameter a ist ganzzahlig randomisiert und legt das Supremum s fest.
Anpassungen	Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kann für eine erhöhte Schwierigkeit angepasst werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

3.2.1.9 Zahlenfolgen als Abbildungen

Tags	Zahlenfolge, Injektivität, Surjektivität, Teilfoge, Häufungspunkt
Screenshot	(Stand 03.09.2024)

Sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge natürlicher Zahlen. Wir betrachten $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im Folgenden als Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto a_n$. Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind.

(a) Falls $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ injektiv ist, so besitzt $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Häufungspunkte.

Diese Aussage ist im Allgemeinen (Meine Auswahl zurücksetzen) .

(b) Falls $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als Abbildung surjektiv ist, so besitzt $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nur endlich viele Häufungspunkte.

Diese Aussage ist im Allgemeinen (Meine Auswahl zurücksetzen) .

(c) Falls $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Häufungspunkte besitzt, so ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ injektiv.

Diese Aussage ist im Allgemeinen (Meine Auswahl zurücksetzen) .

(d) Falls $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unendlich viele Häufungspunkte besitzt, so ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ surjektiv.

Diese Aussage ist im Allgemeinen (Meine Auswahl zurücksetzen) .

Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe werden vier Aussagen zu Häufungspunkten, Injektivität und Surjektivität einer Zahlenfolge formuliert. Es ist der Wahrheitswert der Aussagen anzugeben.
Vorkenntnisse	Häufungspunkte von Zahlenfolgen, Eigenschaften von Teilfolgen, Injektivität von Abbildungen, Surjektivität von Abbildungen
Randomisierung	Der Bezeichner der Folge wird zufällig aus einer Liste von vier Bezeichnern ausgewählt. Dies hat keinen inhaltlichen Einfluss auf die Aufgabe.
Anpassung	Die Liste der Bezeichner kann beliebig ergänzt werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

3.2.2 Rekursiv definierte Zahlenfolgen

3.2.2.1 Rekursiv definierte Zahlenfolgen (1)

Tags: Zahlenfolge, Konvergenz, Rekursionsformel, Teilfolge, Grenzwert

Screenshot: (Stand 16.09.2024)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die durch

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{1+a_n} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

rekursiv definierte Folge nicht negativer reeller Zahlen mit Anfangswert $a_1 \geq 0$. Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent.

Geben Sie den Grenzwert $a := \lim_{n\to\infty} a_n$ an.

Es ist $a =$ ____.

Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe wird der Grenzwert einer rekursiv definierten Zahlenfolge bestimmt.
Vorkenntnisse	Konvergenz von Zahlenfolgen, Eigenschaften von Teilfolgen konvergenter Folgen, Rechenregeln für konvergente Zahlenfolgen
Randomisierung	Die Bezeichner der drei Folgen werden zufällig aus einer Liste von vier Bezeichnern ausgewählt. Dies hat keinen inhaltlichen Einfluss auf die Aufgabe.
Anpassungen	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

3.2.2.2 Rekursiv definierte Zahlenfolgen (2)

Tags: Zahlenfolge, Häufungspunkt, Rekursionsformel, Teilfolge

Screenshot: (Stand 16.09.2024)

> Sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die durch
>
> $$b_{n+1} = -b_n \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$
>
> rekursiv definierte Folge reeller Zahlen mit Anfangswert $b_1 = x$.
>
> (a) Geben Sie die Menge $V \subset \mathbb{R}$ aller Häufungspunkte von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $x = 1$ an. Geben Sie eine Menge $\{u, v, w\}$ mit Elementen u, v und w als `{u,v,w}` ein.
>
> Es ist $V =$ ______.
>
> (b) Geben Sie die Menge $U \subset \mathbb{R}$ aller Häufungspunkte von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $x = 0$ an.
>
> Es ist $U =$ ______.

Autor: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: In dieser Aufgabe werden die Häufungspunkte einer rekursiv definierten Zahlenfolge zu verschiedenen Anfangswerten bestimmt.

Vorkenntnisse: Häufungspunkte von Zahlenfolgen, Eigenschaften von Teilfolgen

Randomisierung: Der Bezeichner der Folge wird zufällig aus einer Liste von vier Bezeichnern ausgewählt. Dies hat keinen inhaltlichen Einfluss auf die Aufgabe. Der Anfangswert der rekursiv definierten Zahlenfolge in Aufgabenteil (a) wird aus den ganzen Zahlen zwischen 1 und 9 ausgewählt. Dies hat keinen inhaltlichen Einfluss auf die Aufgabe.

Anpassungen: Die Liste der Bezeichner kann beliebig ergänzt werden. Der Anfangswert in Aufgabenteil (a) kann als beliebige reelle Zahl ungleich null (siehe Aufgabenteil (b)) gewählt werden.

Sonderoption: Feedback unterdrücken: ja

3.2.2.3 Rekursiv definierte Zahlenfolgen (3)

Tags Zahlenfolge, Häufungspunkt, Rekursionsformel, Teilfolge

Screenshot (Stand 16.09.2024)

Sei $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die durch

$$c_{n+1} = c_n^2 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

rekursiv definierte Folge reeller Zahlen mit Anfangswert $c_1 = x$.

(a) Geben Sie die Menge $V \subset \mathbb{R}$ aller Häufungspunkte von $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $x = 7$ an. Geben Sie eine Menge $\{u, v, w\}$ mit Elementen u, v und w als `{u,v,w}` ein.

Es ist $V =$ ☐.

(b) Geben Sie die Menge $U \subset \mathbb{R}$ aller Häufungspunkte von $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $x = 0$ an.

Es ist $U =$ ☐.

Autor Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz CC BY-SA 4.0

Thema In dieser Aufgabe werden die Häufungspunkte einer rekursiv definierten Zahlenfolge zu verschiedenen Anfangswerten bestimmt.

Vorkenntnisse Häufungspunkte von Zahlenfolgen, Eigenschaften von Teilfolgen

Randomisierung Der Bezeichner der Folge wird zufällig aus einer Liste von vier Bezeichnern ausgewählt. Dies hat keinen inhaltlichen Einfluss auf die Aufgabe. Der Anfangswert der rekursiv definierten Zahlenfolge in Aufgabenteil (a) wird aus den ganzen Zahlen zwischen 1 und 9 ausgewählt. Dies hat keinen inhaltlichen Einfluss auf die Aufgabe.

Anpassungen Die Liste der Bezeichner kann beliebig ergänzt werden. Der Anfangswert in Aufgabenteil (a) kann als beliebige reelle Zahl ungleich -1, 0, 1 (siehe Aufgabenteil (b)) gewählt werden.

Sonderoption Feedback unterdrücken: ja

3.2.2.4 Rekursiv definierte Zahlenfolgen (4)

Tags	Zahlenfolge, Häufungspunkt, Rekursionsformel, Teilfolge
Screenshot	(Stand 16.09.2024)

Sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die durch

$$b_{n+1} = \frac{1}{b_n} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

rekursiv definierte Folge reeller Zahlen mit Anfangswert $b_1 = x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

(a) Geben Sie die Menge $V \subset \mathbb{R}$ aller Häufungspunkte von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $x = -8$ an. Geben Sie eine Menge $\{u, v, w\}$ mit Elementen u, v und w als `{u,v,w}` ein.

Es ist $V =$ ______.

(b) Geben Sie die Menge $U \subset \mathbb{R}$ aller Häufungspunkte von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $x = -1$ an.

Es ist $U =$ ______.

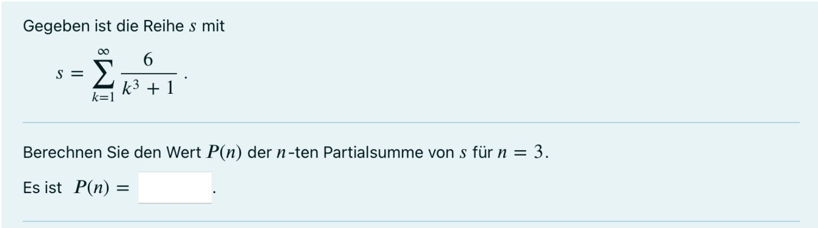
Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe werden die Häufungspunkte einer rekursiv definierten Zahlenfolge zu verschiedenen Anfangswerten bestimmt.
Vorkenntnisse	Häufungspunkte von Zahlenfolgen, Eigenschaften von Teilfolgen
Randomisierung	Der Bezeichner der Folge wird zufällig aus einer Liste von vier Bezeichnern ausgewählt. Dies hat keinen inhaltlichen Einfluss auf die Aufgabe. Der Anfangswert der rekursiv definierten Zahlenfolge in Aufgabenteil (a) wird aus den ganzen Zahlen zwischen -2 und -9 und zwischen 2 und 9 ausgewählt. Dies hat keinen inhaltlichen Einfluss auf die Aufgabe.
Anpassungen	Die Liste der Bezeichner kann beliebig ergänzt werden. Der Anfangswert in Aufgabenteil (a) kann als beliebige reelle Zahl ungleich -1, 0, 1 (vergleiche Aufgabenteil (b)) gewählt werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

3.2.3 Konvergenz von unendlichen Reihen

3.2.3.1 Reihe (elementar) summieren

Tags Zahlenfolge, Reihe, Summe, Partialsumme

Screenshot (Stand 06.10.2024)


Gegeben ist die Reihe s mit

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{6}{k^3 + 1} \,.$$

Berechnen Sie den Wert $P(n)$ der n-ten Partialsumme von s für $n = 3$.

Es ist $P(n) =$.

Autor Tim Inoue (Uni-DUE)

Idee Eva Glasmachers

Lizenz CC BY-SA 4.0

Thema In dieser Aufgabe ist die unendliche Reihe

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a}{k^b + c}$$

gegeben. Es soll der Wert der n-ten Partialsumme $P(n)$ berechnet werden.

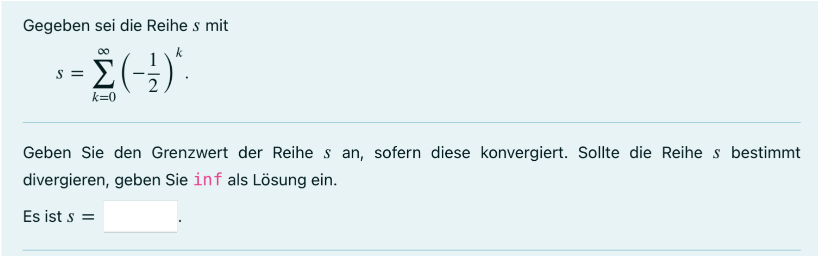
Vorkenntnisse Unendliche Reihen, Partialsummen, Folgen

Randomisierung Die Parameter a, b und c sind ganzzahlig randomisiert. Das $n \leq 5$ für die Partialsumme $P(n)$ ist randomisiert und ganzzahlig.

Anpassungen Die Reihe s kann angepasst werden.

Sonderoption Feedback unterdrücken: ja

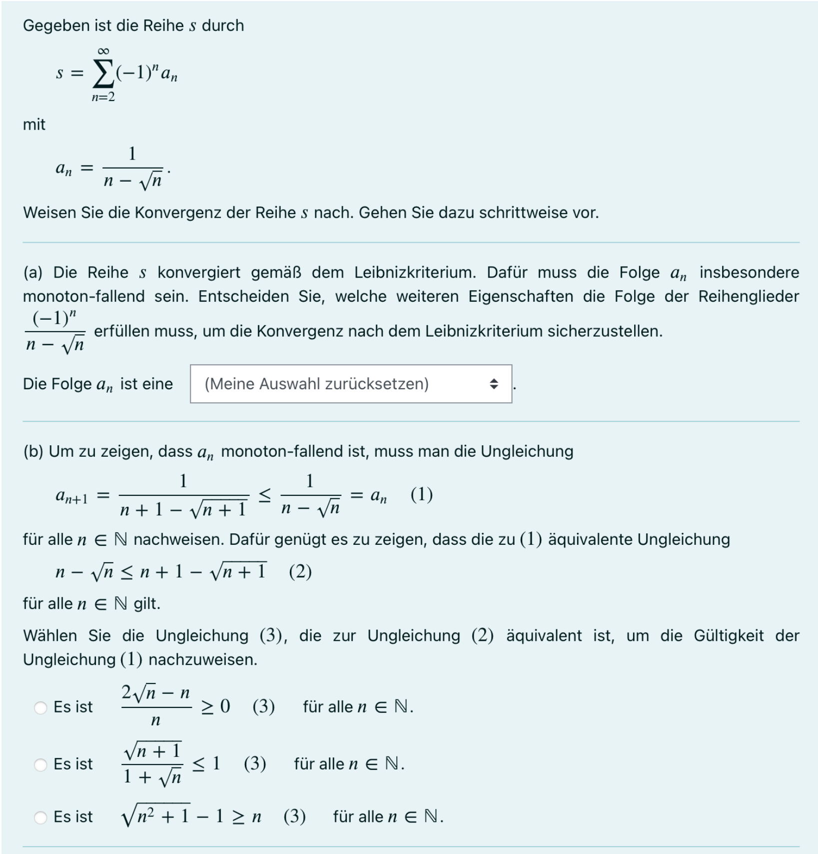
3.2.3.2 Konvergenz einer geometrischen Reihe

Tags	Grenzwert, Reihe, Geometrische Reihe
Screenshot	(Stand 06.10.2024) 
Autor	Tim Inoue (Uni-DUE)
Idee	Julia Joklitschke
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe ist die geometrische Reihe $$s = \sum_{k=0}^{\infty} q^k$$ gegeben. Sofern s konvergiert, soll der Grenzwert angegeben werden. Andernfalls wird `inf` als Lösung für bestimmte Divergenz gewertet.
Vorkenntnisse	Geometrische Reihe, Grenzwerte
Randomisierung	Der Parameter q ist randomisiert, sodass $\lvert q\rvert < 1$ gilt.
Anpassungen	Die Reihe s kann angepasst werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

3.2.3.3 Leibnizkriterium

Tags Leibnizkriterium, Reihe

Screenshot (Stand 06.10.2024)



Gegeben ist die Reihe s durch

$$s = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n a_n$$

mit

$$a_n = \frac{1}{n - \sqrt{n}}.$$

Weisen Sie die Konvergenz der Reihe s nach. Gehen Sie dazu schrittweise vor.

(a) Die Reihe s konvergiert gemäß dem Leibnizkriterium. Dafür muss die Folge a_n insbesondere monoton-fallend sein. Entscheiden Sie, welche weiteren Eigenschaften die Folge der Reihenglieder $\frac{(-1)^n}{n-\sqrt{n}}$ erfüllen muss, um die Konvergenz nach dem Leibnizkriterium sicherzustellen.

Die Folge a_n ist eine (Meine Auswahl zurücksetzen) .

(b) Um zu zeigen, dass a_n monoton-fallend ist, muss man die Ungleichung

$$a_{n+1} = \frac{1}{n+1-\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{n-\sqrt{n}} = a_n \quad (1)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ nachweisen. Dafür genügt es zu zeigen, dass die zu (1) äquivalente Ungleichung

$$n - \sqrt{n} \leq n + 1 - \sqrt{n+1} \quad (2)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Wählen Sie die Ungleichung (3), die zur Ungleichung (2) äquivalent ist, um die Gültigkeit der Ungleichung (1) nachzuweisen.

- Es ist $\frac{2\sqrt{n}-n}{n} \geq 0 \quad (3)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- Es ist $\frac{\sqrt{n+1}}{1+\sqrt{n}} \leq 1 \quad (3)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
- Es ist $\sqrt{n^2+1} - 1 \geq n \quad (3)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Autor Tim Inoue (Uni-DUE)

Idee Julia Joklitschke

Lizenz CC BY-SA 4.0

Thema In dieser Aufgabe ist die konvergente Reihe

$$s = \sum_{n=2}^{\infty} (-1) a_n$$

mit

$$a_n = \frac{1}{n - \sqrt{n}}$$

gegeben. In Aufgabenteil (a) werden die Eigenschaften für die Konvergenz gemäß Leibnizkriterium erfragt. In Aufgabenteil (b) soll nachgewiesen werden, dass a_n monoton-fallend ist. Dafür soll eine zu

$$a_{n+1} \leq a_n$$

äquivalente Ungleichung angegeben werden, die zum Beweis benutzt wird.

Vorkenntnisse Unendliche Reihen, alternierende Folgen, Äquivalenzumformungen, Ungleichungen

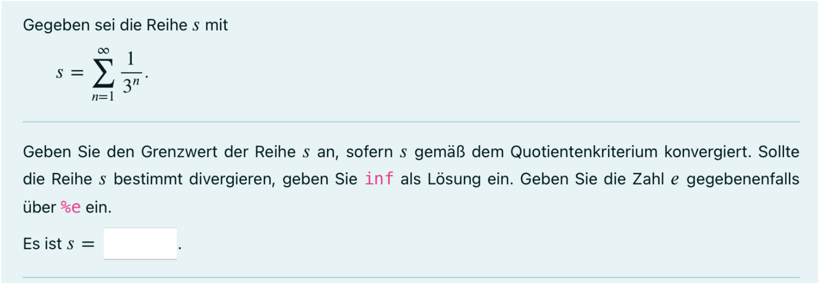
Randomisierung	keine
Anpassungen	Die Folge a_n kann für eine erhöhte Schwierigkeit angepasst werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

3.2.3.4 Quotientenkriterium

Tags Zahlenfolge, Reihe, Quotientenkriterium

Screenshot (Stand 27.08.2024)

Screenshot (Stand 06.10.2024)



Autor Tim Inoue (Uni-DUE)

Idee Julia Joklitschke

Lizenz CC BY-SA 4.0

Thema In dieser Aufgabe ist die unendliche Reihe

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

gegeben. Es soll mithilfe des Quotientenkriteriums die Konvergenz der Reihe s überprüft und im Anschluss der Grenzwert angegeben werden.

Vorkenntnisse Unendliche Reihen, alternierende Folgen, Äquivalenzumformungen, Ungleichungen

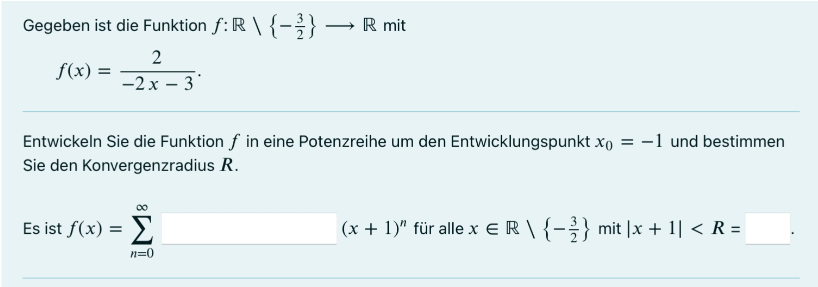
Randomisierung Die Folge a_n wird aus einer Liste von Folgen randomisiert ausgewählt.

Anpassungen Die Folge a_n in der bereitgestellten Liste kann ergänzt werden.

Sonderoption Feedback unterdrücken: ja

3.2.3.5 Entwicklung einer rationalen Funktion

Tags	Rationale Funktion, Entwicklungspunkt, Potenzreihe
Screenshot	(Stand 06.10.2024)


Gegeben ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}\right\} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{2}{-2\,x - 3}.$$

Entwickeln Sie die Funktion f in eine Potenzreihe um den Entwicklungspunkt $x_0 = -1$ und bestimmen Sie den Konvergenzradius R.

Es ist $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}$ ______ $(x+1)^n$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{3}{2}\right\}$ mit $|x+1| < R =$ ____ .

Autor	Tim Inoue (Uni-DUE)
Idee	Annette Püttmann
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{c}{b}\right\} \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \frac{a}{bx+c}$ gegeben. Die Funktion f soll um den Entwicklungspunkt x_0 entwickelt werden. Ferner soll der Konvergenzradius R angegeben werden.
Vorkenntnisse	Potenzreihen, Entwicklung von rationalen Funktionen
Randomisierung	Der Entwicklungspunkt x_0 ist randomisiert, die Koeffizienten a, b und c sind um x_0 herum randomisiert.
Anpassungen	Die Funktion f kann angepasst werden, solange sie in eine Potenzreihe entwickelt werden kann.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

3.2.4 Funktionenfolgen

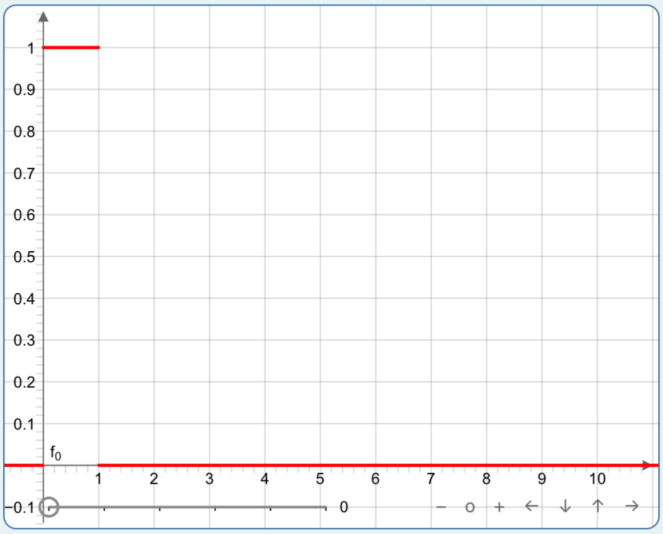
3.2.4.1 Konvergenz von Funktionenfolgen (1)

Tags	Funktionenfolge, punktweise Konvergenz, gleichmäßige Konvergenz
Screenshot	(Stand 03.09.2024)

Betrachten Sie die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Funktionen

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 1 & x \in [n, n+1] \\ 0 & x \notin [n, n+1] \end{cases}.$$

Die folgende Abbildung zeigt die Funktionsgraphen von f_n für $n \in \{0, 1, \ldots, 10\}$. Mithilfe des Schiebereglers lässt sich n variieren.



(a) Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise konvergiert. Bestimmen Sie dazu zu festem $c \in (0,1)$ und festem $x \in \mathbb{R}$ die Menge $N_{c,x}$ aller natürlichen Zahlen n, für die $|f_n(x)| < c$ erfüllt ist. Geben Sie gegebenenfalls die logischen Verknüpfungen A und B oder A oder B zweier Aussagen A und B als `A and B` beziehungsweise `A or B` ein.

Es ist $N_{c,x} = \{n \in \mathbb{N} \mid \quad\}$.

(b) Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gleichmäßig konvergiert. Bestimmen Sie dazu zu festem $c \in (0,1)$ und festem $n \in \mathbb{N}$ eine reelle Zahlen x, sodass $|f_n(x)| > c$ erfüllt ist.

Es ist $x =$.

Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe wird die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Funktionen

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \begin{cases} 1 & x \in [n, n+1] \\ 0 & x \notin [n, n+1] \end{cases}$$

anhand der Definition auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz untersucht.

Vorkenntnisse	punktweise und gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen, Rechnen mit Ungleichungen
Randomisierung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

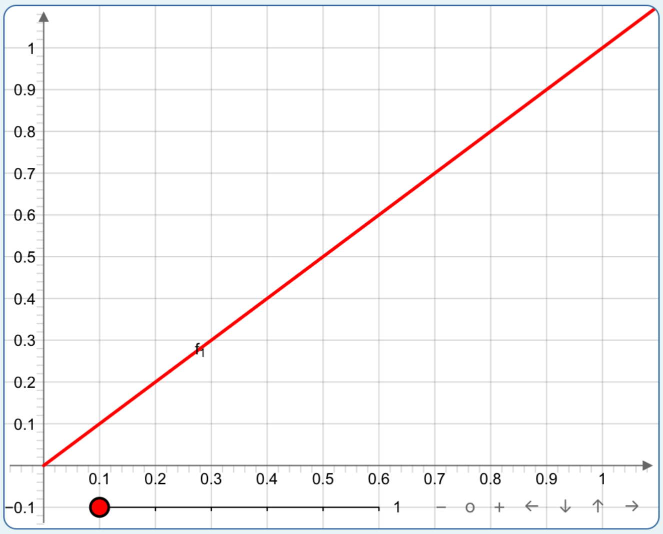
3.2.4.2 Konvergenz von Funktionenfolgen (2)

Tags	Funktionenfolge, punktweise Konvergenz, gleichmäßige Konvergenz
Screenshot	(Stand 03.09.2024)

Betrachten Sie die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Funktionen

$$f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{x}{n}.$$

Die folgende Abbildung zeigt die Funktionsgraphen von f_n für $n \in \{1,\ldots,10\}$. Mithilfe des Schiebreglers lässt sich n variieren.



(a) Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise gegen die Nullfunktion $[0,\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 0$ konvergiert. Bestimmen Sie dazu zu festem $c > 0$ und festem $x \in [0,\infty)$ eine positive reelle Zahl $N_{c,x} \in \mathbb{R}$, sodass $|f_n(x)| < c$ für alle natürlichen Zahlen $n \in \mathbb{N}$ mit $n > N_{c,x}$ erfüllt ist. Geben Sie gegebenenfalls die logischen Verknüpfungen A und B oder A oder B zweier Aussagen A und B als `A and B` beziehungsweise `A or B` ein.

Es ist $N_{c,x} =$ ____.

(b) Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht gleichmäßig konvergiert. Bestimmen Sie dazu zu festem $c > 0$ und festem $n \in \mathbb{N}$ eine nicht negative reelle Zahl x, sodass $|f_n(x)| > c$ erfüllt ist.

Es ist $x =$ ____.

Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe wird die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Funktionen $$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{x}{n}$$ anhand der Definition auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz untersucht.
Vorkenntnisse	punktweise und gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen, Rechnen mit Ungleichungen
Randomisierung	keine

Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

3.3 Stetigkeit

Die Aufgaben dieses Themenbereichs behandeln die Stetigkeit und Lipschitz-Stetigkeit reeller Funktionen und den Zusammenhang der Begriffe. Schwerpunkte liegen unter anderem auf der stetigen Fortsetzbarkeit von Funktionen, der Stetigkeit stückweise definierter Funktionen und der Charakterisierung von Stetigkeit vermöge des Funktionsgraphen.

Inhaltsverzeichnis

◀ ▲ ▶

3.3.1 Stetigkeit reeller Funktionen

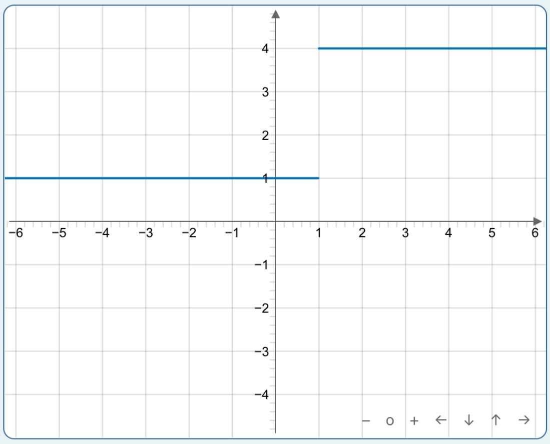
3.3.1.1 Stetige Funktionen anhand von Graphen

Tags Stetigkeit, Graphen

Screenshot (Stand 06.10.2024)

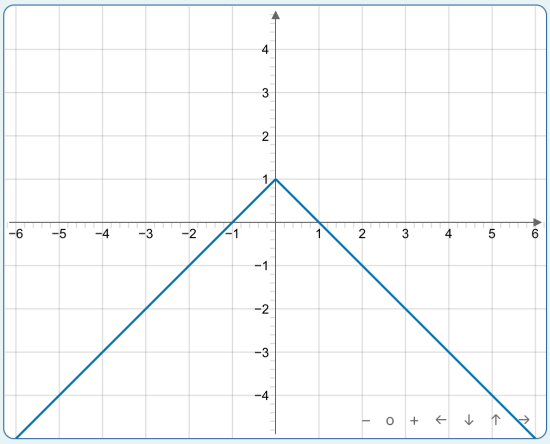
Gegeben seien die folgenden Graphen von Funktionen, die jeweils auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sind. Entscheiden Sie anhand der Abbildungen, welche Funktionen stetig sind.

(a) Der Graph zur Funktion f ist gegeben durch

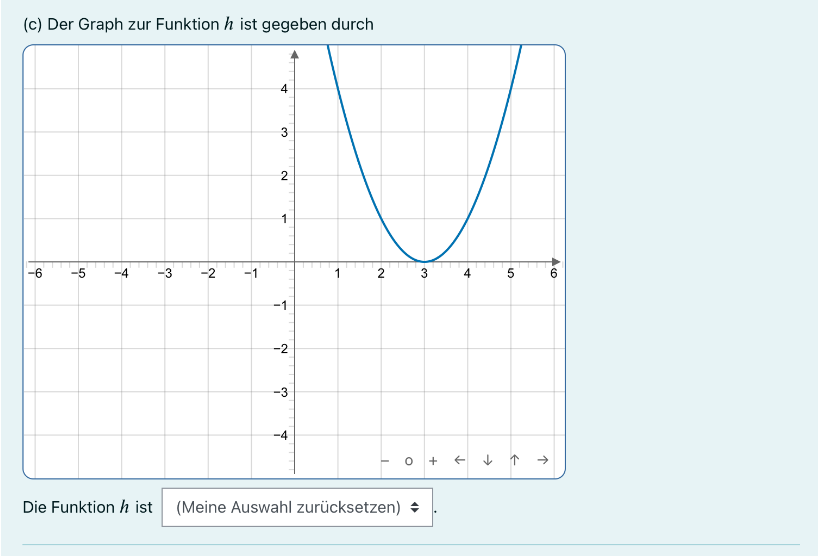


Die Funktion f ist (Meine Auswahl zurücksetzen) .

(b) Der Graph zur Funktion g ist gegeben durch



Die Funktion g ist (Meine Auswahl zurücksetzen) .

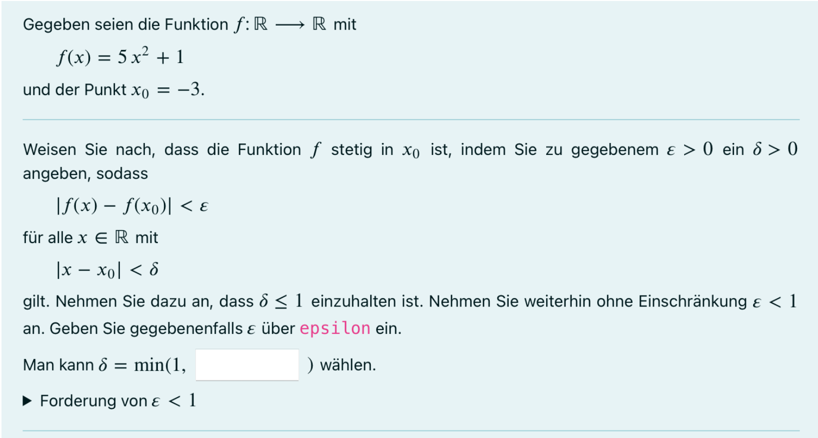


Autor	Tim Inoue (Uni-DUE)
Idee	Tim Inoue
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe sind Graphen Funktionen f, g und $h\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben. In den Aufgabenteilen (a), (b) und (c) soll entschieden werden, ob es sich bei den abgebildeten Funktionen um stetige Funktionen handelt.
Vorkenntnisse	Stetigkeit
Randomisierung	Die abgebildeten Graphen sind aus einer Auswahl von stetigen und nicht-stetigen Funktionen randomisiert ausgewählt.
Anpassung	Die Funktionen können entsprechend angepasst werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

3.3.1.2 Stetigkeit mit ε-δ-Definition

Tags: Stetigkeit, epsilon-delta, Funktion

Screenshot: (Stand 06.10.2024)



Gegeben seien die Funktion $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = 5\,x^2 + 1$$

und der Punkt $x_0 = -3$.

Weisen Sie nach, dass die Funktion f stetig in x_0 ist, indem Sie zu gegebenem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ angeben, sodass

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit

$$|x - x_0| < \delta$$

gilt. Nehmen Sie dazu an, dass $\delta \leq 1$ einzuhalten ist. Nehmen Sie weiterhin ohne Einschränkung $\varepsilon < 1$ an. Geben Sie gegebenenfalls ε über `epsilon` ein.

Man kann $\delta = \min(1,$ ____ $)$ wählen.

▶ Forderung von $\varepsilon < 1$

Autor: Tim Inoue (Uni-DUE)

Idee: Tim Inoue

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: In dieser Aufgabe ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = ax^2 + b$$

und der Punkt $x_0 = c$ gegeben. Für $\varepsilon < 1$ soll ein $\delta \in (0, 1]$ bestimmt werden, sodass für alle $x \in \mathbb{R}$ mit

$$|x - x_0| < \delta$$

auch

$$|f(x) - f(x_0) < \varepsilon$$

gilt.

Vorkenntnisse: Stetigkeit, $\varepsilon - \delta$-Kriterium

Randomisierung: Die Koeffizienten a, b und c sind randomisierte ganze Zahlen.

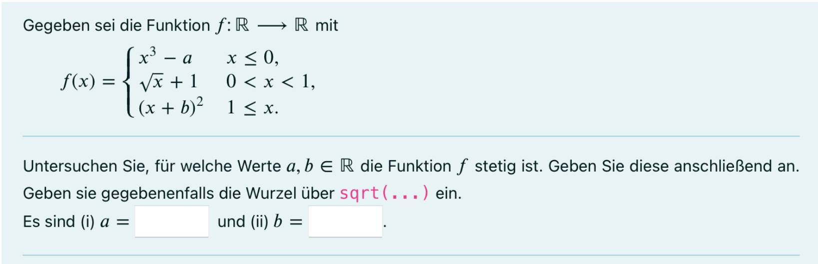
Anpassung: Die Funktion f kann angepasst werden, die Wahl von δ ändert sich damit.

Sonderoption: Feedback unterdrücken: ja

3.3.1.3 Stetigkeit mit Parametern

Tags Stetigkeit, stetige Fortsetzung, Funktion

Screenshot (Stand 06.10.2024)


Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - a & x \leq 0, \\ \sqrt{x} + 1 & 0 < x < 1, \\ (x+b)^2 & 1 \leq x. \end{cases}$$

Untersuchen Sie, für welche Werte $a, b \in \mathbb{R}$ die Funktion f stetig ist. Geben Sie diese anschließend an.
Geben sie gegebenenfalls die Wurzel über `sqrt(...)` ein.
Es sind (i) $a =$ und (ii) $b =$.

Autor Tim Inoue (Uni-DUE)

Idee Tim Inoue

Lizenz CC BY-SA 4.0

Thema In dieser Aufgabe ist die Funktion f mit

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - a & x \leq 0, \\ \sqrt{x} + 1 & 0 < x < 1, \\ (x+b)^2 & 1 \leq x. \end{cases}$$

gegeben. Es soll untersucht werden, für welche Werte von a und b auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist.

Vorkenntnisse Stetigkeit, Grenzwerte, stetige Fortsetzung, Folgenstetigkeit

Randomisierung keine

Anpassung Die Funktion f kann mit den Stützstellen a und b angepasst werden.

Sonderoption Feedback unterdrücken: ja

3.3.1.4 Stetigkeit mit Fortsetzung

Tags Stetigkeit, stetige Fortsetzung, Funktion

Screenshot (Stand 06.10.2024)

> Gegeben ist die Funktion $f\colon (0,\infty)\setminus\{3\} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit
>
> $$f(x) = \frac{x^6 - 729}{x^3 - 27}.$$
>
> ---
>
> Bestimmen Sie eine reelle Zahl a, sodass die Funktion $\tilde{f}$ mit
>
> $$\tilde{f}\colon (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} a & x = 3, \\ f(x) & \text{sonst}, \end{cases}$$
>
> stetig ist. Man nennt $\tilde{f}$ die stetige Fortsetzung von f. Geben Sie gegebenenfalls a als Bruch an.
>
> Es ist $a =$ ___ .

Autor Tim Inoue (Uni-DUE)

Idee Tim Inoue

Lizenz CC BY-SA 4.0

Thema In dieser Aufgabe ist die Funktion

$$f : (0,\infty) \setminus \{x_0\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x^{2k} - x_0^{2k}}{x^k - x_0^k}$$

gegeben. Es soll dann so eine reelle Zahl a bestimmt werden, sodass die Funktion

$$\tilde{f}\colon (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} a & x = x_0, \\ f(x) & \text{sonst}, \end{cases}$$

stetig in $x = x_0$ ist.

Vorkenntnisse Stetigkeit, Grenzwerte, stetige Fortsetzung, Folgenstetigkeit

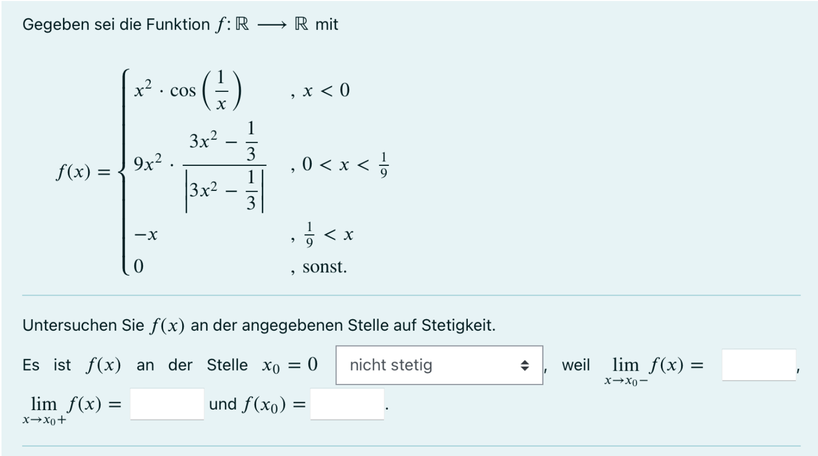
Randomisierung Der Parameter x_0 und der Exponent k sind randomisiert.

Anpassung Die Funktionen f kann angepasst werden.

Sonderoption Feedback unterdrücken: ja

3.3.1.5 Stetigkeit stückweiser Funktionen

Tags	stückweise stetig, Stetigkeit, Funktion
Screenshot	(Stand 26.08.2024)



Autor	Tim Inoue (Uni-DUE)
Idee	Leen Jubarah
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe ist die stückweise definierte Funktion $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) & , x < 0 \\ 9x^2 \cdot \dfrac{3x^2 - \frac{1}{3}}{\left|3x^2 - \frac{1}{3}\right|} & , 0 < x < \frac{1}{9} \\ -x & , \frac{1}{9} < x \\ 0 & , \text{sonst.} \end{cases}$$

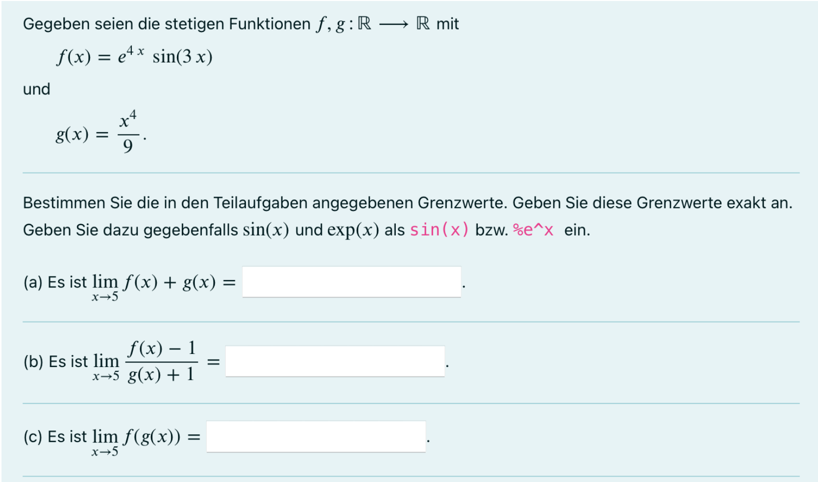
gegeben. Die Funktion f soll an der Stelle $x_0 = 0$ auf Stetigkeit untersucht werden.

Vorkenntnisse	Stetigkeit, Folgenstetigkeit
Randomisierung	keine
Anpassung	Die Funktion f kann entsprechend angepasst werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

3.3.1.6 Rechenregeln zu Stetigkeit

Tags: Grenzwerte, Stetigkeit

Screenshot: (Stand 06.10.2024)



Gegeben seien die stetigen Funktionen $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = e^{4\,x}\,\sin(3\,x)$$

und

$$g(x) = \frac{x^4}{9}.$$

Bestimmen Sie die in den Teilaufgaben angegebenen Grenzwerte. Geben Sie diese Grenzwerte exakt an. Geben Sie dazu gegebenenfalls $\sin(x)$ und $\exp(x)$ als `sin(x)` bzw. `%e^x` ein.

(a) Es ist $\lim\limits_{x\to 5} f(x) + g(x) =$ _____.

(b) Es ist $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{f(x)-1}{g(x)+1} =$ _____.

(c) Es ist $\lim\limits_{x\to 5} f(g(x)) =$ _____.

Autor: Tim Inoue (Uni-DUE)

Idee: Tim Inoue

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: In dieser Aufgabe sind stetige Funktionen $f, g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = k \cdot \sin(ax)e^x + (1-k)\cdot \cos(x)e^x$$

und

$$g(x) = \left|\frac{b}{c}x^d\right|$$

gegeben. In Aufgabenteil (a) soll der Grenzwert

$$\lim_{x\to x_0} f(x) + g(x)$$

bestimmt werden. In Aufgabenteil (b) soll der Grenzwert

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-1}{g(x)+1}$$

bestimmt werden. In Aufgabenteil (c) soll der Grenzwert

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x))$$

bestimmt werden.

Vorkenntnisse: Rechenregeln zu Grenzwerten, Stetigkeit, Folgenstetigkeit

Randomisierung: Die Parameter a, b, c und d sind randomisierte, ganze Zahlen. Die Zahl k ist eine ganzzahlige Zufallszahl zwischen 0 und 1.

Anpassung: Die Funktionen f und g können angepasst werden.

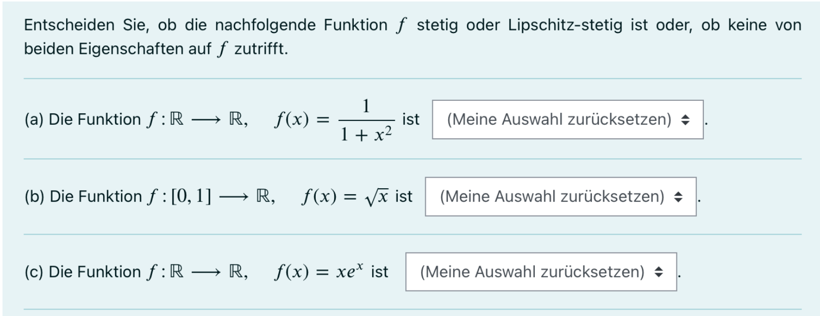
Sonderoption: Feedback unterdrücken: ja

3.3.2 Lipschitz-Stetigkeit

3.3.2.1 Lipschitz-Stetigkeit (1)

Tags Stetigkeit, Lipschitz

Screenshot (Stand 06.10.2024)


Entscheiden Sie, ob die nachfolgende Funktion f stetig oder Lipschitz-stetig ist oder, ob keine von beiden Eigenschaften auf f zutrifft.

(a) Die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$ ist (Meine Auswahl zurücksetzen).

(b) Die Funktion $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{x}$ ist (Meine Auswahl zurücksetzen).

(c) Die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = xe^x$ ist (Meine Auswahl zurücksetzen).

Autor Tim Inoue (Uni-DUE)

Idee Tim Inoue

Lizenz CC BY-SA 4.0

Thema In Aufgabenteil (a) soll entschieden werden, ob die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

stetig oder Lipschitz-stetig ist, oder, ob keine der beiden Eigenschaft zutrifft. In Aufgabenteil (b) soll entschieden werden, ob die Funktion

$$f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{x}$$

stetig oder Lipschitz-stetig ist, oder, ob keine der beiden Eigenschaft zutrifft. In Aufgabenteil (c) soll entschieden werden, ob die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = xe^x$$

stetig oder Lipschitz-stetig ist, oder, ob keine der beiden Eigenschaft zutrifft.

Vorkenntnisse Stetigkeit, Lipschitz-Stetigkeit

Randomisierung keine

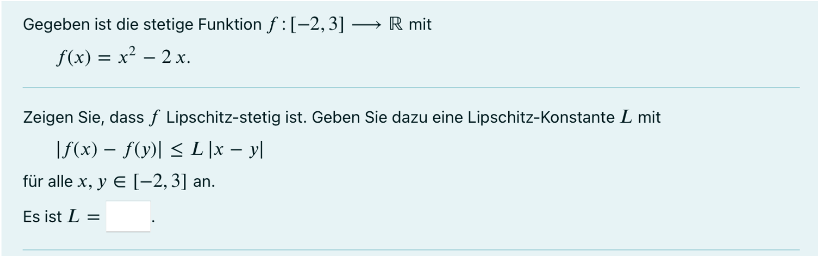
Anpassung Die Funktion f kann in allen Aufgabenteilen angepasst werden.

Sonderoption Feedback unterdrücken: ja

3.3.2.2 Lipschitz-Stetigkeit (2)

Tags: Stetigkeit, Lipschitz

Screenshot: (Stand 06.10.2024)



Autor: Tim Inoue (Uni-DUE)

Idee: Tim Inoue

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: In dieser Aufgabe ist die stetige Funktion

$$f\colon [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 - cx$$

gegeben. Für f soll eine Lipschitz-Konstante $L \geq 0$ gefunden werden, sodass

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

für alle $x, y \in [a, b]$ gilt.

Vorkenntnisse: Stetigkeit, Lipschitz-Stetigkeit

Randomisierung: Das Intervall $[a, b]$ und der Koeffizient c sind randomisierte, ganze Zahlen mit $a < b$.

Anpassung: Die Funktion f kann angepasst werden.

Sonderoption: Feedback unterdrücken: ja

3.4 Differentialrechnung

Die Aufgaben dieses Themenbereichs behandeln die Grundlagen der Differentialrechnung reeller Funktionen. Sie umfassen die Untersuchung der Differenzierbarkeit und die Bestimmung der Ableitung sowohl elementarer Funktionen als auch Kompositionen von Funktionen. In weiteren Aufgaben werden die Ketten- und Produktregel sowie die Ableitung von Quotienten auf beispielhaft angewendet.

Inhaltsverzeichnis

◄ ▲ ►

3.4.1 Differenzierbarkeit elementarer Abbildungen

3.4.1.1 Differenzierbarkeit (affin) linearer Funktionen

Tags	Differenzierbarkeit, Ableitung, Lineare Funktion
Screenshot	(Stand 16.09.2024)

Betrachten Sie für $a, b \in \mathbb{R}$ die (affin) lineare Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto b\,x + a.$$

Zeigen Sie, dass f differenzierbar in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ ist. Gehen Sie dazu wie folgt vor.

(a) Bestimmen Sie $y \in \mathbb{R}$, sodass die Abbildung

$$q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} & x \neq x_0 \\ y & x = x_0 \end{cases}$$

stetig in x_0 ist. Geben Sie gegebenenfalls x_0 als `x0` ein.

Es ist $y =$ ______ .

(b) Um zu zeigen, dass die Funktion q mit der von Ihnen in Aufgabenteil (a) angegebenen reellen Zahl y stetig ist, geben Sie zu beliebigem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ an, sodass für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt

$$|q(x) - q(x_0)| < \varepsilon.$$

Geben Sie gegebenenfalls ε als `epsilon` und den Absolutbetrag $|z|$ einer reellen Zahl z als `abs(z)` ein.

Es ist $\delta =$ ______ .

Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll die Differenzierbarkeit einer allgemeinen (affin) linearen Funktion gezeigt und ihrer Ableitung bestimmt werden.
Vorkenntnisse	Kenntnis der Definition und der Charakterisierung der Differenzierbarkeit von reellen Funktionen
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: nein

3.4.1.2 Differenzierbarkeit quadratischer Funktionen

Tags: Differenzierbarkeit, Ableitung, Quadratische Funktion

Screenshot: (Stand 03.09.2024)

Betrachten Sie für $a, b \in \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ die quadratische Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto c\,x^2 + b\,x + a.$$

Zeigen Sie, dass f differenzierbar in jedem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ ist. Gehen Sie dazu wie folgt vor.

(a) Bestimmen Sie $y \in \mathbb{R}$, sodass die Abbildung

$$q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} & x \neq x_0 \\ y & x = x_0 \end{cases}$$

stetig in x_0 ist. Geben Sie gegebenenfalls x_0 als `x0` ein.

Es ist $y =$ ______ .

(b) Um zu zeigen, dass die Funktion q mit der von Ihnen in Aufgabenteil (a) angegebenen reellen Zahl y stetig ist, geben Sie zu beliebigem $\varepsilon > 0$ ein und falls möglich das größte $\delta > 0$ an, sodass für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \delta$ gilt

$$|q(x) - q(x_0)| < \varepsilon.$$

Geben Sie gegebenenfalls ε als `epsilon` und den Absolutbetrag $|z|$ einer reellen Zahl z als `abs(z)` ein.

▶ Zur Forderung eines, falls möglich, größten $\delta > 0$

Es ist $\delta =$ ______ .

Autor: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: In dieser Aufgabe soll die Differenzierbarkeit einer allgemeinen quadratischen Funktion gezeigt und ihrer Ableitung bestimmt werden.

Vorkenntnisse: Kenntnis der Definition und der Charakterisierung der Differenzierbarkeit von reellen Funktionen

Anpassung: keine

Sonderoption: Feedback unterdrücken: nein

3.4.1.3 Differenzierbarkeit von Kompositionen

Tags — Differenzierbarkeit, Ableitung, Kettenregel, Produktregel

Screenshot — (Stand 03.09.2024)

Betrachten Sie Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$$

Zeigen Sie, dass f differenzierbar ist.

(a) Aus der Ketten- und der Produktregel folgt, dass die Restriktion

$$g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$$

differenzierbar ist. Bestimmen Sie die Ableitung g' von g.

Es ist $g'(x) =$ ________ .

(b) Bestimmen Sie $y \in \mathbb{R}$, sodass die Abbildung

$$q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} & x \neq 0 \\ y & x = 0 \end{cases}$$

stetig in null ist.

Es ist $y =$ ________ .

(c) Um zu zeigen, dass die Funktion q mit der von Ihnen in Aufgabenteil (b) angegebenen reellen Zahl y stetig ist, geben Sie zu beliebigem $\varepsilon > 0$ ein und falls möglich das größte $\delta > 0$ an, sodass für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - 0| < \delta$ gilt

$$|q(x) - q(0)| < \varepsilon.$$

Geben Sie gegebenenfalls ε als `epsilon` ein.

▶ Zur Forderung eines, falls möglich, größten $\delta > 0$

Es ist $\delta =$ ________ .

Autor — Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee — Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz — CC BY-SA 4.0

Thema — In dieser Aufgabe soll die Differenzierbarkeit der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(0) = 0$ und mit $f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ für $x \neq 0$ bewiesen werden. In Aufgabenteil (a) soll dazu die Ableitung von f mithilfe der Ketten- und der Produktregel außerhalb von null bestimmt werden. In Aufgabenteil (b) soll dann eine stetige Fortsetzung des Differenzenquotienten an null bestimmt werden. In Aufgabenteil (c) soll die Stetigkeit der in Aufgabenteil (b) angegebenen Fortsetzung des Differenzenquotienten an null bewiesen werden.

Vorkenntnisse — Kenntnis der Definition und der Charakterisierung der Differenzierbarkeit von reellen Funktionen, Ketten- und Produktregel

Anpassung — keine

Sonderoption — Feedback unterdrücken: nein

3.4.1.4 Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Tags	Differenzierbarkeit, Ableitung, Betrag, Betragsfunktion
Screenshot	(Stand 03.09.2024)

Betrachten Sie die Betragsfunktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x| .$$

Zeigen Sie, dass f stetig, aber nicht differenzierbar in null ist. Gehen Sie dazu wie folgt vor.

(a) Geben Sie zu beliebigem $\varepsilon > 0$ ein und falls möglich das größte $\delta > 0$ an, sodass für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - 0| < \delta$ gilt

$$|f(x) - f(0)| < \varepsilon .$$

Geben Sie gegebenenfalls ε als `epsilon` ein.

Es ist $\delta =$ ____ .

(b) Betrachten Sie für beliebiges $y \in \mathbb{R}$ die Abbildung

$$q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \begin{cases} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} & x \neq 0 \\ y & x = 0 \end{cases} .$$

Geben Sie für alle $y \in \mathbb{R}$ und alle $\delta > 0$ ein $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $|x - 0| < \delta$ an, sodass

$$|q(x) - q(0)| \geq 1 .$$

ist. Unterscheiden Sie dabei die folgenden drei Fälle. Geben Sie gegebenenfalls δ als `delta` ein.

(i) Für $y = 0$ ist $x =$ ____ .

(ii) Für $y < 0$ ist $x =$ ____ .

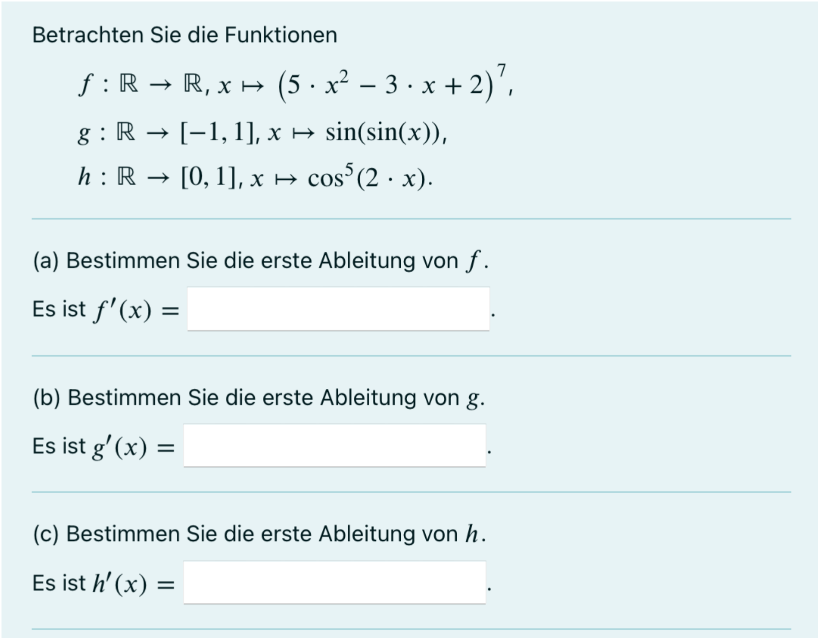
(iii) Für $y > 0$ ist $x =$ ____ .

Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass die Betragsfunktion stetig, aber nicht differenzierbar in null ist. In Aufgabenteil (a) soll gezeigt werden, dass die Betragsfunktion stetig in null ist. In Aufgabenteil (b) soll gezeigt werden, dass der Differenzenquotient an null keine stetige Fortsetzung besitzt.
Vorkenntnisse	Kenntnis der Definition und der Charakterisierung der Differenzierbarkeit von reellen Funktionen, Betragsfunktion
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: nein

3.4.2 Bestimmung von Ableitungen und Rechenregeln

3.4.2.1 Ableitung Kettenregel

Tags	Funktion, Ableitung, Differentialrechnung
Screenshot	(Stand 06.10.2024)

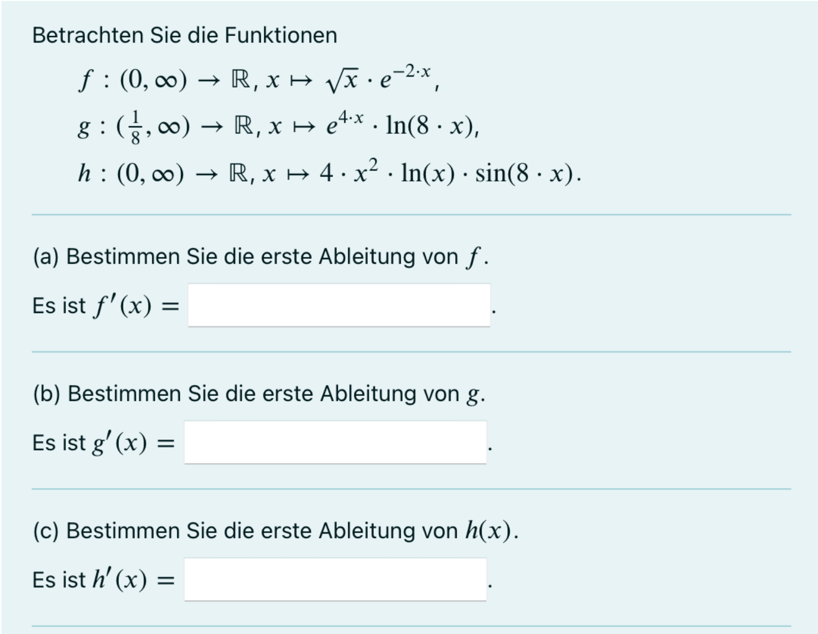


Autor	Hakim Günther (WH)
Idee	Hakim Günther
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	Gegeben sind drei Funktionen $f(x)$, $g(x)$, und $h(x)$. Für diese Funktionen sollen die ersten Ableitungen bestimmt werden, wobei die Kettenregel anzuwenden ist.
Vorkenntnisse	Grundlagen der Differentialrechnung, Kettenregel, Ableitung von Potenz-, Sinus- und Kosinusfunktionen.
Randomisierung	Die Funktionen $f(x)$, $g(x)$, und $h(x)$ werden mit zufälligen Koeffizienten und Exponenten generiert: • $f(x)$ ist eine Potenzfunktion mit einem Polynom als Basis • $g(x)$ ist eine verkettete Sinusfunktion • $h(x)$ ist eine Potenz einer Kosinusfunktion
Anpassung	Die Wertebereiche der zufälligen Koeffizienten und Exponenten können angepasst werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: nein

3.4.2.2 Ableitung Produktregel

Tags: Funktion, Ableitung, Differentialrechnung

Screenshot: (Stand 06.10.2024)



Autor: Hakim Günther (WH)

Idee: Hakim Günther

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: Gegeben sind drei Funktionen f(x), g(x), und h(x). Für diese Funktionen sollen die ersten Ableitungen bestimmt werden, wobei die Produktregel anzuwenden ist.

Vorkenntnisse: Grundlagen der Differentialrechnung, Produktregel, Ableitung von Exponential-, Logarithmus-, Potenz- und trigonometrischen Funktionen.

Randomisierung: Die Funktionen $f(x)$, $g(x)$, und $h(x)$ werden mit zufälligen Koeffizienten generiert:

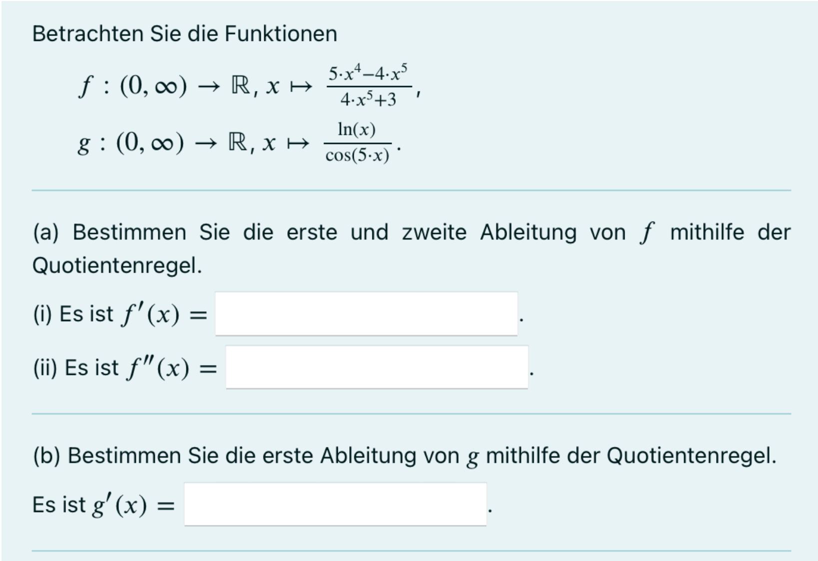
- $f(x)$ ist das Produkt einer Potenzfunktion und einer Exponentialfunktion
- $g(x)$ ist das Produkt einer Exponentialfunktion und einer Logarithmusfunktion
- $h(x)$ ist das Produkt einer polynomialen Funktion, einer Logarithmusfunktion und einer Sinusfunktion

Anpassung: Die Wertebereiche der zufälligen Koeffizienten können angepasst werden. Aktuell werden Werte zwischen 1 und 9 für die Koeffizienten verwendet.

Sonderoption: Feedback unterdrücken: nein

3.4.2.3 Ableitung Quotient

Tags	Differentialgleichung, Funktion, Ableitung
Screenshot	(Stand 06.10.2024)

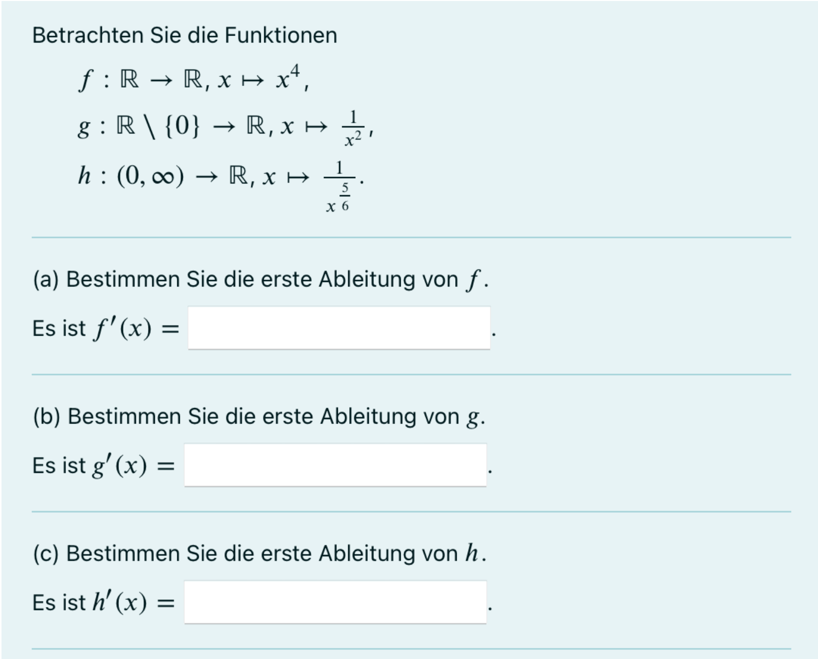


Autor	Hakim Günther (WH)
Idee	Hakim Günther
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	Gegeben sind zwei Funktionen $f(x)$ und $g(x)$. Für diese Funktionen sollen die Ableitungen unter Anwendung der Quotientenregel bestimmt werden. Für $f(x)$ ist zusätzlich die zweite Ableitung zu berechnen.
Vorkenntnisse	Grundlagen der Differentialrechnung, Quotientenregel, Ableitung von Potenz-, Logarithmus- und trigonometrischen Funktionen.
Randomisierung	Die Funktionen $f(x)$ und $g(x)$ werden mit zufälligen Koeffizienten generiert: • $f(x)$ ist der Quotient zweier Polynome • $g(x)$ ist der Quotient einer Logarithmusfunktion und einer Kosinusfunktion
Anpassung	Die Wertebereiche der zufälligen Koeffizienten können angepasst werden. Aktuell werden Werte zwischen 2 und 6 für die meisten Koeffizienten verwendet.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: nein

3.4.2.4 Differentialrechnung Grundlagen (1)

Tags Funktion, Ableitung, Differentialrechnung

Screenshot (Stand 06.10.2024)



Betrachten Sie die Funktionen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^4,$$
$$g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x^2},$$
$$h : (0, \infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x^{\frac{5}{6}}}.$$

(a) Bestimmen Sie die erste Ableitung von f.

Es ist $f'(x) =$.

(b) Bestimmen Sie die erste Ableitung von g.

Es ist $g'(x) =$.

(c) Bestimmen Sie die erste Ableitung von h.

Es ist $h'(x) =$.

Autor Hakim Günther (WH)

Idee Hakim Günther

Lizenz CC BY-SA 4.0

Thema Gegeben sind drei Funktionen $f(x)$, $g(x)$ und $h(x)$. Für diese Funktionen sollen die ersten Ableitungen bestimmt werden, wobei die Potenzregel für verschiedene Exponenten anzuwenden ist.

Vorkenntnisse Grundlagen der Differentialrechnung, Potenzregel für positive, negative und gebrochene Exponenten.

Randomisierung Die Funktionen werden mit zufälligen Exponenten generiert:

- $f(x) = x^n$, wobei n eine positive ganze Zahl zwischen 2 und 9 ist
- $g(x) = x^n$, wobei n eine negative ganze Zahl zwischen -2 und -9 ist
- $h(x) = x^n$, wobei n ein negativer Bruch ist

Anpassung Die Wertebereiche der zufälligen Exponenten können angepasst werden.

Sonderoption Feedback unterdrücken: nein

3.4.2.5 Differentialrechnung Grundlagen (2)

Tags: Funktion, Ableitung, Differentialrechnung

Screenshot: (Stand 06.10.2024)

Betrachten Sie die Funktionen

$$f : \mathbb{R} \to [-1, 1], x \mapsto \cos(5 \cdot x),$$
$$g : \mathbb{R} \to [-1, 1], x \mapsto \sin\left(\frac{5 \cdot x}{4}\right),$$
$$h : \mathbb{R} \to [-1, 1], x \mapsto \cos(3 \cdot \pi \cdot x).$$

(a) Bestimmen Sie die erste Ableitung von f.

Es ist $f'(x) =$ ______ .

(b) Bestimmen Sie die erste Ableitung von g.

Es ist $g'(x) =$ ______ .

(c) Bestimmen Sie die erste Ableitung von h.

Es ist $h'(x) =$ ______ .

Autor: Hakim Günther (WH)

Idee: Hakim Günther

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: Gegeben sind drei Funktionen $f(x)$, $g(x)$ und $h(x)$, die trigonometrische Funktionen mit linearen Argumenten darstellen. Für diese Funktionen sollen die ersten Ableitungen bestimmt werden, wobei die Kettenregel anzuwenden ist.

Vorkenntnisse: Grundlagen der Differentialrechnung, Kettenregel, Ableitungen von Sinus- und Kosinusfunktionen.

Randomisierung: Die Funktionen werden mit zufälligen Koeffizienten generiert:

- $f(x) = \cos(a\,x)$, wobei a eine ganze Zahl zwischen 2 und 9 ist
- $g(x) = \sin(b\,x)$, wobei b ein Bruch ist
- $h(x) = \cos(c\,x)$, wobei c ein Vielfaches von π ist

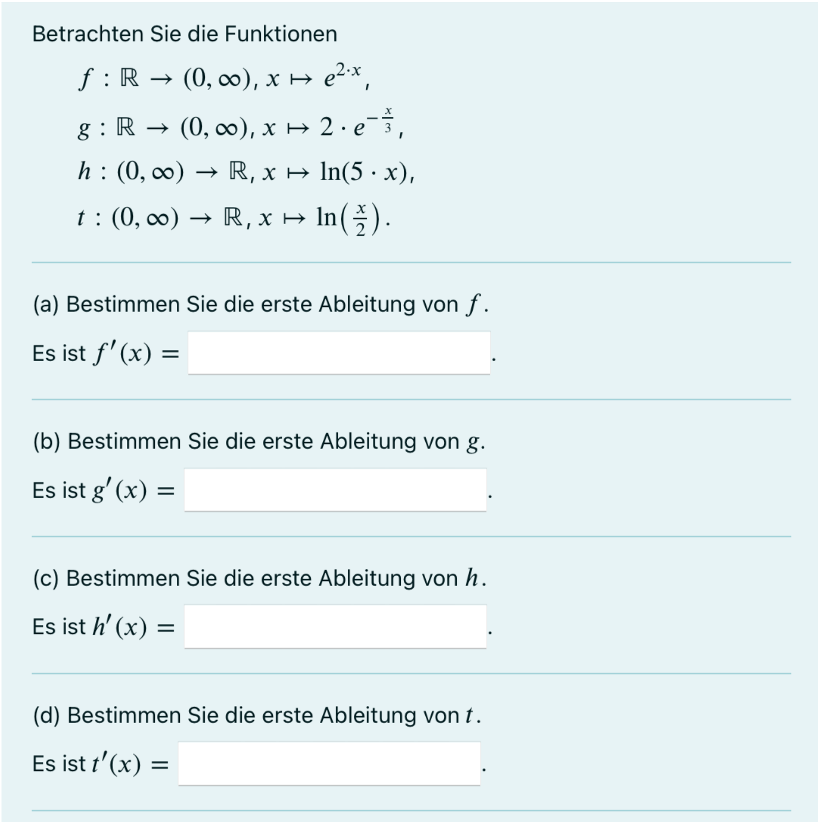
Anpassung: Die Wertebereiche der zufälligen Koeffizienten können angepasst werden.

Sonderoption: Feedback unterdrücken: nein

3.4.2.6 Differentialrechnung Grundlagen (3)

Tags: Funktion, Ableitung, Differentialrechnung

Screenshot: (Stand 06.10.2024)


Betrachten Sie die Funktionen

$$f : \mathbb{R} \to (0, \infty),\, x \mapsto e^{2 \cdot x},$$
$$g : \mathbb{R} \to (0, \infty),\, x \mapsto 2 \cdot e^{-\frac{x}{3}},$$
$$h : (0, \infty) \to \mathbb{R},\, x \mapsto \ln(5 \cdot x),$$
$$t : (0, \infty) \to \mathbb{R},\, x \mapsto \ln\left(\tfrac{x}{2}\right).$$

(a) Bestimmen Sie die erste Ableitung von f.

Es ist $f'(x) =$ ______ .

(b) Bestimmen Sie die erste Ableitung von g.

Es ist $g'(x) =$ ______ .

(c) Bestimmen Sie die erste Ableitung von h.

Es ist $h'(x) =$ ______ .

(d) Bestimmen Sie die erste Ableitung von t.

Es ist $t'(x) =$ ______ .

Autor: Hakim Günther (WH)

Idee: Hakim Günther

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: Gegeben sind vier Funktionen $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ und $t(x)$, die exponential- und logarithmische Funktionen mit linearen Argumenten darstellen. Für diese Funktionen sollen die ersten Ableitungen bestimmt werden, wobei die Kettenregel anzuwenden ist.

Vorkenntnisse: Grundlagen der Differentialrechnung, Kettenregel, Ableitungen von Exponential- und Logarithmusfunktionen.

Randomisierung: Die Funktionen werden mit zufälligen Koeffizienten generiert:

- $f(x) = e^{ax}$, wobei a eine ganze Zahl zwischen 2 und 7 ist
- $g(x) = b\,e^{cx}$, wobei b eine ganze Zahl zwischen 3 und 7 ist und c ein negativer Bruch
- $h(x) = \ln(dx)$, wobei d eine ganze Zahl zwischen 2 und 6 ist
- $t(x) = \ln(ex)$, wobei e ein Bruch ist

Anpassung: Die Wertebereiche der zufälligen Koeffizienten können angepasst werden.

Sonderoption: Feedback unterdrücken: nein

3.5 Integration, Eigenschaften und Methoden

Die Aufgaben dieses Themenbereichs behandeln Grundlagen der Integration reeller Funktionen. Die Aufgaben umfassen die Bestimmung von Stammfunktionen, Integralen und uneigentlichen Integralen unter Anwendung der Integrationsmethoden der partiellen Integration, Substitution und Partialbruchzerlegung. Weiterhin werden die Methoden in Anwendungsbeispielen erprobt.

Inhaltsverzeichnis

◀ ▲ ▶

3.5.1 Ober- und Untersumme reeller Funktionen

3.5.1.1 Untersumme einer quadratischen Funktion bestimmen

Tags: monoton, Untersumme, Integral, Funktion

Screenshot: (Stand 06.10.2024)

> Gegeben ist die Funktion f mit
>
> $$f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2.$$
>
> Bestimmen Sie die Untersumme U_n von f auf dem Intervall $I = [0,1]$, wenn I äquidistant in $n > 1$ Teile zerlegt wird.
>
> Es ist $U_n =$ ______ .

Autor: Tim Inoue (Uni-DUE)

Idee: Tim Inoue

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: In dieser Aufgabe ist die Funktion

$$f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = x^2$$

gegeben. Es soll die Untersumme U_n von f auf dem Intervall $I = [0,1]$ bestimmt werden, wenn I äquidistant in $n > 1$ Teile zerlegt wird.

Vorkenntnisse: Untersumme, Integral

Randomisierung: keine

Anpassung: Die Funktion f kann für eine erhöhte Schwierigkeit angepasst werden, sofern es für die Untersumme U_n eine geschlossene Formel gibt.

Sonderoption: Feedback unterdrücken: ja

3.5.1.2 Integration von Regelfunktionen (1)

Tags	Integral, Treppenfunktion, Regelfunktion, gleichmäßige Konvergenz
Screenshot	(Stand 16.09.2024)

Betrachten Sie die Funktion

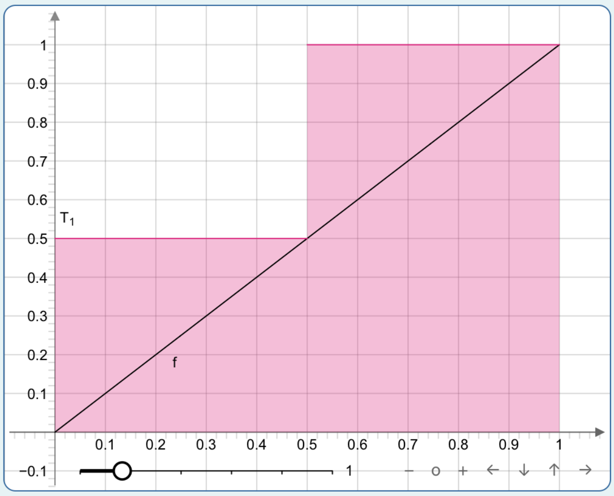
$$f : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x$$

und für alle $n \in \mathbb{N}$ die Treppenfunktion

$$T_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto f\left(\frac{\lceil 2^n \cdot x \rceil}{2^n}\right).$$

▶ Gaußklammer

Die folgende Abbildung zeigt die Funktionsgraphen von f und T_n für $n \in \{0, 1, \ldots, 6\}$. Mithilfe des Schiebreglers lässt sich n variieren.



(a) Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f konvergiert und damit f eine Regelfunktion ist. Bestimmen Sie dazu für festes $k \in \mathbb{N}$ die Menge N_k aller natürlichen Zahlen n, sodass für alle $x \in [0,1]$ gilt

$$|f(x) - T_n(x)| \leq \frac{1}{2^k}.$$

Es ist $N_k = \{n \in \mathbb{N} \mid \quad\}$.

(b) Berechnen Sie das Integral von T_n in Abhängigkeit von n.

Es ist $\int T_n = \quad$.

(c) Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge $(\int T_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Es ist $\lim\limits_{n\to\infty} \int T_n = \quad$.

(d) Geben Sie das Integral von f an.

Es ist $\int f = \quad$.

Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0

Thema	In dieser Aufgabe soll das Integral der Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$ bestimmt werden. In Aufgabenteil (a) soll gezeigt werden, dass eine gegebene Folge von Treppenfunktionen gleichmäßig gegen f konvergiert und damit f eine Regelfunktion ist. In Aufgabenteil (b) sollen die Integrale der Glieder der Folge der Treppenfunktionen bestimmt werden. In Aufgabenteil (c) und (d) soll der Grenzwert der Folge von Integralen aus Aufgabenteil (b) bestimmt und damit das Integral von f angegeben werden.
Verbotene Wörter	int, limit
Vorkenntnisse	Kenntnis von Treppenfunktionen und Regelfunktionen und den zugehörigen Integralbegriffen, gleichmäßige Konvergenz, Gauß-Klammer
Randomisierung	keine
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

3.5.1.3 Integration von Regelfunktionen (2)

Tags Integral, Treppenfunktion, Regelfunktion, gleichmäßige Konvergenz

Screenshot (Stand 16.09.2024)

Betrachten Sie die Funktion

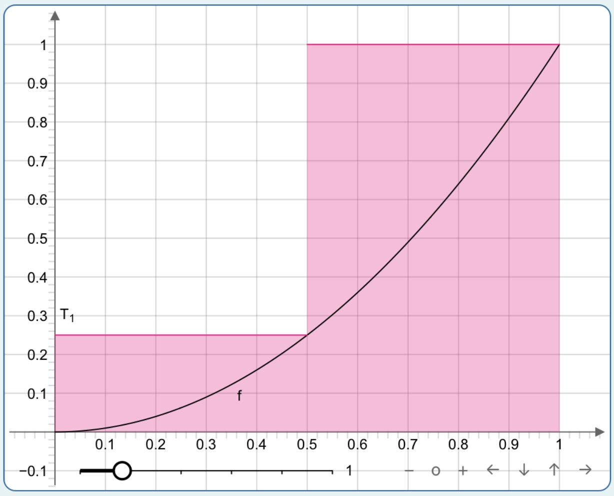
$$f : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$$

und für alle $n \in \mathbb{N}$ die Treppenfunktion

$$T_n : [0,1] \to \mathbb{R},\ x \mapsto f\left(\frac{\lceil 2^n \cdot x \rceil}{2^n}\right).$$

▶ Gaußklammer

Die folgende Abbildung zeigt die Funktionsgraphen von f und T_n für $n \in \{0, 1, \dots, 6\}$. Mithilfe des Schiebreglers lässt sich n variieren.



(a) Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f konvergiert und damit f eine Regelfunktion ist. Bestimmen Sie dazu für festes $k \in \mathbb{N}$ die Menge N_k aller natürlichen Zahlen n, sodass für alle $x \in [0,1]$ gilt

$$|f(x) - T_n(x)| \leq \frac{1}{2^k}.$$

Es ist $N_k = \{n \in \mathbb{N} \mid$ ______ $\}$.

(b) Berechnen Sie das Integral von T_n in Abhängigkeit von n.

Es ist $\int T_n =$ ______.

(c) Bestimmen Sie den Grenzwert der Folge $(\int T_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Es ist $\lim_{n\to\infty} \int T_n =$ ______.

(d) Geben Sie das Integral von f an.

Es ist $\int f =$ ______.

Autor Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

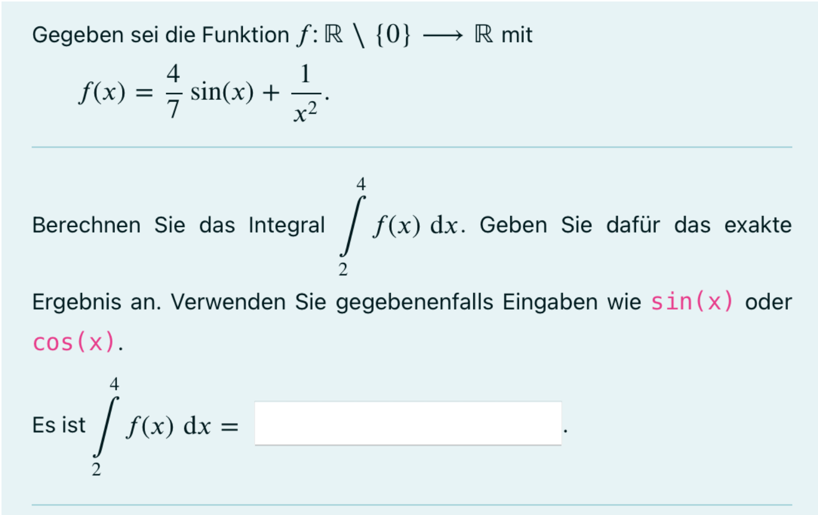
Lizenz CC BY-SA 4.0

Thema	In dieser Aufgabe soll das Integral der Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ bestimmt werden. In Aufgabenteil (a) soll gezeigt werden, dass eine gegebene Folge von Treppenfunktionen gleichmäßig gegen f konvergiert und damit f eine Regelfunktion ist. In Aufgabenteil (b) sollen die Integrale der Glieder der Folge der Treppenfunktionen bestimmt werden. In Aufgabenteil (c) und (d) soll der Grenzwert der Folge von Integralen aus Aufgabenteil (b) bestimmt und damit das Integral von f angegeben werden.
Verbotene Wörter	int, limit
Vorkenntnisse	Kenntnis von Treppenfunktionen und Regelfunktionen und den zugehörigen Integralbegriffen, gleichmäßige Konvergenz, Gauß-Klammer
Randomisierung	keine
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

3.5.2 Bestimmte Integrale

3.5.2.1 Integrale berechnen (1)

Tags	Integral, Stammfunktion, elementare Funktion
Screenshot	(Stand 06.10.2024)



Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{4}{7}\sin(x) + \frac{1}{x^2}.$$

Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x$. Geben Sie dafür das exakte Ergebnis an. Verwenden Sie gegebenenfalls Eingaben wie `sin(x)` oder `cos(x)`.

Es ist $\displaystyle\int_2^4 f(x)\,\mathrm{d}x =$ ______ .

Autor	Tim Inoue (Uni-DUE)
Idee	Tim Inoue
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe ist die stetige Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = a\sin(x) + \frac{(-1)^k}{x^b}$$

gegeben. Es soll das bestimme Integral

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x)\,\mathrm{d}x$$

mit $x_0, x_1 \in (0, \infty) \setminus \{0\}$ und $x_0 < x_1$ berechnet werden.

Vorkenntnisse	Stetigkeit, Stammfunktion, bestimmtes Integral
Randomisierung	Die Parameter a, b und k sind randomisierte ganze Zahlen.
Anpassung	Die Funktion f kann angepasst werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

3.5.2.2 Durchfluss durch einen Wasserschlauch

Tags stückweise Funktion, Integral, Durchfluss

Screenshot (Stand 06.10.2024)

Durch einen Schlauch mit Durchmesser $1.5\,\mathrm{cm}$ fließt Wasser. Die Fließgeschwindigkeit lässt sich als Funktion der Zeit auffassen und beträgt:

$$v(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 0.4\,t^2 & t \in [0,1] \\ 0.4 & t \in [1,20] \\ 8.4 - 0.4\,t & t \in [20,21] \\ 0 & t > 21 \end{cases}$$

Dabei werden die Geschwindigkeit in $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ und die Zeit t in Sekunden angegeben.

▶ Hinweis

Berechnen Sie das Volumen des durch den Schlauch geflossenen Wassers. Geben Sie Ihre Antwort als Dezimalzahl an, indem Sie auf 2 Stellen nach dem Komma runden.

Das Volumen beträgt ______ Liter.

Autor Tim Inoue (Uni-DUE)

Idee Oskar Riedler

Lizenz CC BY-SA 4.0

Thema In dieser Aufgabe ist eine stückweise definierte Funktion

$$v(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ a\,t^2 & t \in [0,1] \\ a & t \in [1,20] \\ a(21-t) & t \in [20,21] \\ 0 & t > 21 \end{cases}$$

gegeben, die die Fließgeschwindigkeit eines Schlauches mit Durchmesser d beschreibt. Es soll das Volumen des durch den Schlauch geflossenen Wassers berechnet und auf 2 Nachkommastellen gerundet angegeben werden.

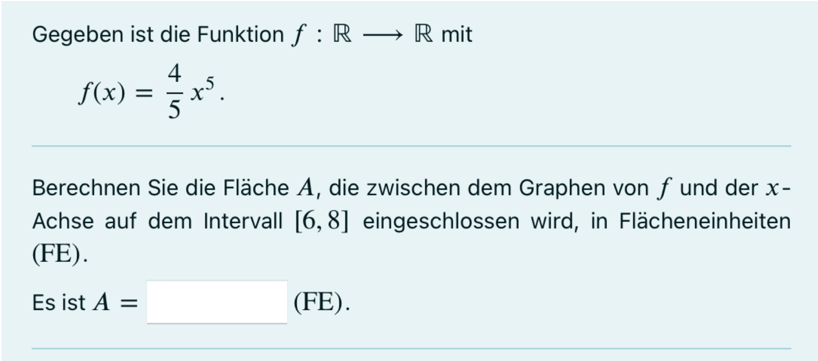
Randomisierung Die Parameter a und d sind randomisiert.

Anpassung keine

Sonderoption Feedback unterdrücken: ja

3.5.2.3 Fläche zwischen Graph und x-Achse berechnen

Tags	Integral, Flächenberechnung, eingeschlossene Fläche, Stammfunktion
Screenshot	(Stand 06.10.2024)



Gegeben ist die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{4}{5}\,x^5 .$$

Berechnen Sie die Fläche A, die zwischen dem Graphen von f und der x-Achse auf dem Intervall $[6, 8]$ eingeschlossen wird, in Flächeneinheiten (FE).

Es ist $A =$ (FE).

Autor	Tim Inoue (Uni-DUE)
Idee	Tim Inoue
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe ist die Funktion $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = cx^k$ gegeben. Es soll die Fläche A, die zwischen dem Graphen von f und der x-Achse auf dem Intervall $[a, b]$ eingeschlossen wird, in Flächeneinheiten (FE) berechnet werden .
Randomisierung	Die Parameter a, b, c und k sind randomisiert mit $a < b$.
Anpassung	Die Funktion f kann angepasst werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

3.5.2.4 Bestimmte Integrale (1)

Tags	Integral, Substitution.
Screenshot	(Stand 27.08.2024)

> Berechnen Sie das bestimmte Integral der Funktion:
>
> $$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto\frac{2\,x}{\sqrt{7\,x^2+6}}.$$
>
> Verwenden Sie `sqrt(x)` für $\sqrt{x}$ im Ergebnisfeld. Des Weiteren, geben Sie Brüche nicht in Dezimalform an.
>
> Es ist $\displaystyle\int_{-2\,b}^{3\,b} f(x)\,\mathrm{d}x =$ __________,
>
> mit $b>0$.

Autor	Michael Kubocz (RWTH)
Idee	Michael Kubocz
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	Die Stammfunktion ist eine Wurzelfunktion, die mit Hilfe einer Substitution berechnet werden kann.
Verbotene Wörter	Integrate.
Vorkenntnisse	Stammfunktion, Substitution.
Randomisierung	Unabhängige Parameter im Zähler und Nenner der zu integrierenden Funktion und in Integralgrenzen werden zufällig und als ganzzahlig gewählt.
Anpassung	Funktion und Integralgrenzen können angepasst werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

3.5.2.5 Bestimmte Integrale (2)

Tags: Integral, Substitution.

Screenshot: (Stand 28.08.2024)

Berechnen Sie das bestimmte Integral der Funktion:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{5\,x}{6\,x^2 + 8}.$$

Verwenden Sie `log(x)` für den natürlichen Logarithmus $\ln x$ und `abs(x)` für $|x|$ im Ergebnisfeld. Des Weiteren, geben Sie Brüche nicht in Dezimalform an.

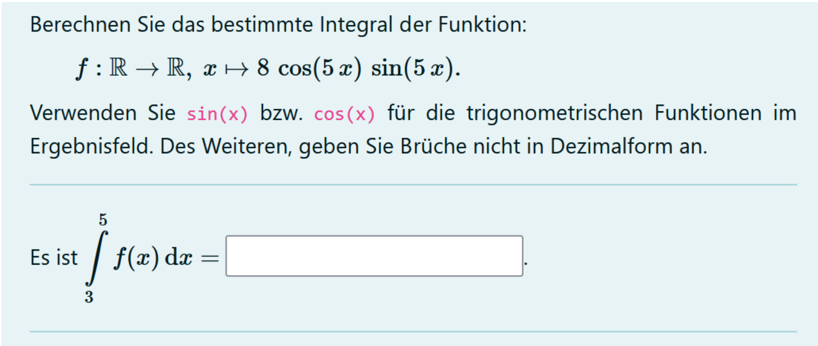
Es ist $\displaystyle\int_{b+2}^{5\,b} f(x)\,\mathrm{d}x =$ ________,

mit $b > 0$.

Autor	Michael Kubocz (RWTH)
Idee	Michael Kubocz
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	Die Stammfunktion ist eine Logarithmusfunktion, die mit Hilfe einer Substitution berechnet werden kann.
Verbotene Wörter	Integrate.
Vorkenntnisse	Stammfunktion, Substitution.
Randomisierung	Unabhängige Parameter im Zähler und Nenner der zu integrierenden Funktion und in Integralgrenzen werden zufällig und als ganzzahlig gewählt.
Anpassung	Funktion und Integralgrenzen können angepasst werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

3.5.2.6 Bestimmte Integrale (3)

Tags	Integral, partielle Integration.
Screenshot	(Stand 28.08.2024)



Autor	Michael Kubocz (RWTH)
Idee	Michael Kubocz
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	Die Stammfunktion ist eine trigonometrische Funktion, die mit Hilfe einer partiellen Integration berechnet werden kann.
Verbotene Wörter	Integrate.
Vorkenntnisse	Stammfunktion, partielle Integration.
Randomisierung	Zwei Unabhängige Parameter im Integranden und beide Integralgrenzen werden zufällig und als ganzzahlig gewählt.
Anpassung	Funktion und Integralgrenzen können angepasst werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

3.5.2.7 Bestimmte Integrale (4)

Tags	Integral, Partialbruchzerlegung, Substitution.
Screenshot	(Stand 28.08.2024)

Berechnen Sie das bestimmte Integral der Funktion:

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{4}{x^2 + 3\,x + 2},$$

Verwenden Sie `log(x)` für den natürlichen Logarithmus $\ln x$ und `abs(x)` für $|x|$ im Ergebnisfeld. Des Weiteren, geben Sie Brüche nicht in Dezimalform an.

Es ist $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x =$ ______ .

mit $b > a > 0$.

Autor	Michael Kubocz (RWTH)
Idee	Michael Kubocz
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	Die Stammfunktion ist eine Summe aus Logarithmusfunktionen, die mit Hilfe einer Partialbruchzerlegung (nur Linearfaktoren) und anschließender Substitution berechnet werden kann.
Verbotene Wörter	Integrate.
Vorkenntnisse	Stammfunktion, Partialbruchzerlegung, Substitution.
Randomisierung	Zähler und beide Nullstellen des Nenners werden zufällig und als ganzzahlig gewählt.
Anpassung	Keine.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

3.5.2.8 Bestimmte Integrale (5)

Tags	Integral, Substitution.
Screenshot	(Stand 28.08.2024) Berechnen Sie das bestimmte Integral der Funktion: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto \dfrac{4\sin(2x)}{\sin^4(x) + \cos^4(x)},$ Verwenden Sie `%pi` für die Kreiszahl π im Ergebnisfeld. Des Weiteren, geben Sie Brüche nicht in Dezimalform an. Es ist $\displaystyle\int_0^{\frac{5\pi}{4}} f(x)\,\mathrm{d}x =$ _____.
Autor	Michael Kubocz (RWTH)
Idee	Michael Kubocz
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	Die Stammfunktion ist eine Arkustangensfunktion, die mit Hilfe von trigonometrischen Additionstheoremen und einer Substitution berechnet werden kann.
Verbotene Wörter	Integrate.
Vorkenntnisse	Stammfunktion, Substitution, trigonometrischen Additionstheoreme.
Randomisierung	Ganzzahliger Parameter im Zähler und ganzahliges Vielfaches von $\pi/4$ (Liste) in der oberen Integralgrenze werden zufällig gewählt.
Anpassung	Obere Integralgrenze kann angepasst werden.
Verbotene Wörter	int, limit
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

3.5.2.9 Trägheitsmoment Platte

Tags	Integral, Trägheitsmoment
Screenshot	(Stand 16.09.2024)

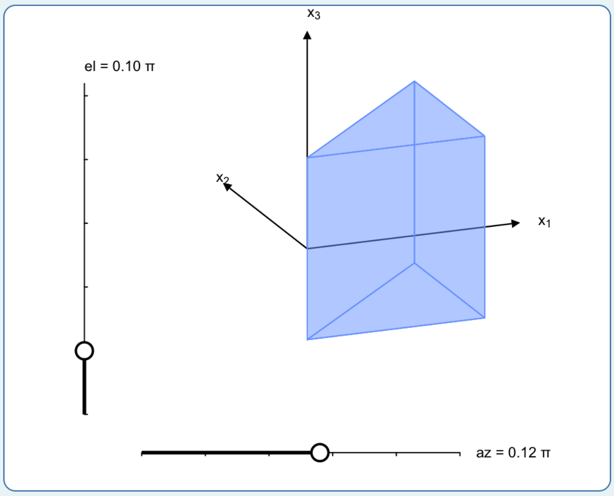
Sei P eine Platte mit stetiger Massenverteilung. Die folgende Abbildung zeigt P als Teilmenge

$$M = \left\{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, 0 \le x_1 \le 1,\, 0 \le x_2 \le x_1, -\frac{1}{2} \le x_3 \le \frac{1}{2} \right\}$$

des $\mathbb{R}^3$. Die Massendichte von P lässt sich als Funktion

$$\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, x = (x_1, x_2, x_3) \mapsto \begin{cases} x_2 & x \in M \\ 0 & x \notin M \end{cases}$$

modellieren.



(a) Bestimmen Sie die Masse

$$m = \iiint \rho(x)\, \mathrm{d}^3 x$$

von P.

Es ist $m =$ ______.

(b) Bestimmen Sie die Koordinaten

$$\bar{x}_i = \frac{1}{m} \iiint x_i\, \rho(x)\, \mathrm{d}^3 x,\;\; i \in \{1, 2, 3\}$$

des Massenmittelpunkts $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) \in \mathbb{R}^3$ von P. Geben Sie einen Punkt (a, b, c) als `[a,b,c]` ein.

Es ist $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) =$ ______.

(c) Berechnen Sie für alle $i \in \{1, 2, 3\}$ das Massenträgheitsmoment

$$I_i = \iiint r_i(x)^2\, \rho(x)\, \mathrm{d}^3 x$$

von P bezüglich der i-ten Koordinatenachse $A_i = \{(x_1, x_2, x_3) \subset \mathbb{R}^3 \mid x_j = 0,\ j \neq i\}$. Dabei bezeichne $r_i(x)$ den euklidischen Abstand zwischen x und A_i. Geben Sie I_i für alle $i \in \{1, 2, 3\}$ jeweils als ein Vielfaches der Masse m von P an.

(i) Es ist $I_x =$ ______ m.

(ii) Es ist $I_y =$ ______ m.

(iii) Es ist $I_z =$ ______ m.

Autor	Emma van der Smagt (RUB)
Idee	Emma van der Smagt
Lizenz	CC BY-SA 4.0

Thema	In dieser Aufgabe sollen die Massenträgheitsmomente einer Platte stetiger Massendichte bestimmt werden. Die Platte ist dabei durch Angabe von Schranken für die x-, y- und z-Koordinaten in ihrer Ausdehnung bestimmt. In Aufgabenteil (a) soll die Masse der Platte bestimmt werden. In Aufgabenteil (b) sollen die Koordinaten des Massenmittelpunkts der Platte bestimmt werden. In Aufgabenteil (c) sollen die Massenträgheitsmomente der Platte bezüglich der drei Koordinatenachsen bestimmt und als Vielfache der Masse der Platte angegeben werden.
Verbotene Wörter	int, limit
Vorkenntnisse	Integration, Satz von Fubini
Randomisierung	Die Schranken der x-, y- und z-Koordinaten der Platte sowie die Massendichte sind randomisiert.
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: nein

3.5.2.10 Wärmeleitung im Rundstab

Tags Integral, Wärmewiderstand, Wärmestrom

Screenshot (Stand 16.09.2024)

Ein Rundstab der Länge l aus einem Material der Wärmeleitfähigkeit k wird als Wärmeleiter untersucht. Der Durchmesser des Stabs wird als Funktion

$$d : [0, l] \to (0, \infty),\ x \mapsto d_0\,(a\,x + 1)$$

in Abhängigkeit des Abstands x zu einem der Enden des Stabs modelliert. Der (infinitesimale) Wärmestrom

$$I(x) = -k\,A(x)\,T'(x)$$

im Stab wird im Folgenden als konstant angenommen.

---

zu (a) Bestimmen Sie die Querschnittsfläche $A(x)$ in Abhängigkeit des Abstands x zu einem der Enden des Stabs. Geben Sie gegebenenfalls d_0 als `d_0` und π als `%pi` ein.

Es ist $A(x) =$ ________.

---

zu (b) Bestimmen Sie die Temperaturdifferenz

$$\Delta T = T(l) - T(0)$$

zwischen den beiden Enden des Stabs und geben sie diese in Abhängigkeit des konstanten Wärmestroms I, der Länge l und der Wärmeleitfähigkeit k an.

Es ist $\Delta T =$ ________.

Autor Emma van der Smagt (RUB)

Idee Emma van der Smagt

Lizenz CC BY-SA 4.0

Thema In dieser Aufgabe wird ein Rundstab l aus einem Material der Wärmeleitfähigkeit k als Wärmeleiter untersucht. Der Durchmesser des Stabs wird als Funktion $d : [0, l] \to (0, \infty)$, $x \mapsto d_0(a\,x + 1)$ in Abhängigkeit des Abstand x von einem der Enden des Stabs modelliert. In Aufgabenteil (a) soll zunächst die Querschnittsfläche in Abhängigkeit des Abstands x von einem der Enden des Stabs bestimmt werden. In Aufgabenteil (b) soll aus den als konstant angenommenen Wärmestrom

$$I(x) = -k\,A(x)\,T'(x)$$

die Temperaturdifferenz ΔT zwischen den beiden Enden des Stabs bestimmt werden.

Verbotene Wörter int, limit

Vorkenntnisse Integration

Randomisierung keine

Anpassung keine

Sonderoption Feedback unterdrücken: nein

3.5.2.11 Ladungsdichte Gewitterwolke

Tags	Integral, Ladung, Strom
Screenshot	(Stand 16.09.2024)

Gewitter kann man physikalisch als Wetterphänomen auffassen, bei dem sich Entladungsvorgänge, "Blitze" in der Atmosphäre ereignen. Den Entladungsvorgängen gehen Ladungstrennungen innerhalb von Wolken oder zwischen Wolken und dem Erdboden voraus.

Im Folgenden wird angenommen, dass eine Wolke mit einem zeitabhängigen Strom

$$I(t) = \dot{Q}(t) = \frac{1}{t^2-16}$$

aufgeladen und damit zur Gewitterwolke wird. Die zeitabhängige Ladung Q der Gewitterwolke ist zu Beginn des Aufladens identisch $Q(0) = 0$. Bestimmen Sie die Ladung $Q(1)$ der Gewitterwolke nach der Zeit 1 des Aufladens.

Es ist $Q(1) =$

Autor	Emma van der Smagt (RUB)
Idee	Emma van der Smagt
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll die Ladung Q einer Gewitterwolke bestimmt werden, die von einem zeitabhängigen Strom $I(t) = Q'(t)$ geladen wird.
Verbotene Wörter	int, limit
Vorkenntnisse	Integration, Ladung und Strom
Randomisierung	Der Funktion, die den zeitabhängigen Strom beschreibt, wird zufällig aus einer Liste von Funktionen ausgewählt.
Anpassung	Die Liste von Funktionen kann um geeignete Funktionen ergänzt werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: nein

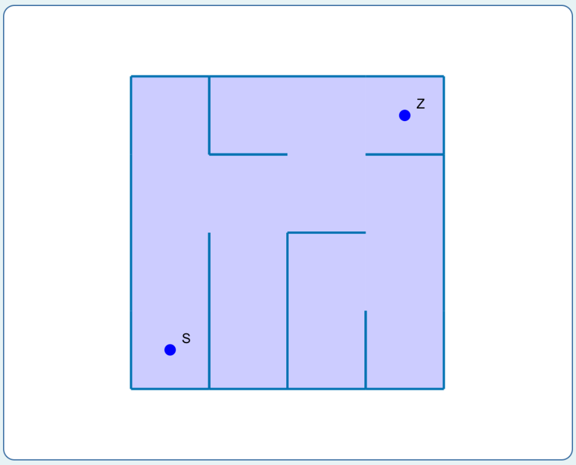
3.5.2.12 Micromouse

Tags	Integral, Rekonstruktion, Geschwindigkeit, Beschleunigung
Screenshot	(Stand 16.09.2024)

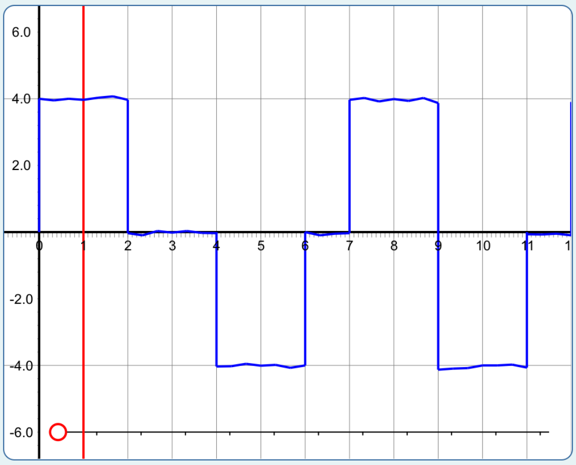
Ein autonomes Fahrzeug, gennant Micromouse-Roboter, erkundet ein Labyrinth. Untersuchen Sie anhand von Bewegungsdaten den Weg des Micromouse-Roboter bei seiner Erkundungsfahrt und stellen Sie eine Vermutung zum verwendeten Lösungsalgorithmus auf. Gehen Sie dabei wie folgt vor.

▶ Micromouse-Roboter

Das in dieser Aufgabe zu untersuchende Labyrinth besteht aus quadratischen Zellen, die in einem (4×4)-Raster angeordnet sind. Die Wege im Labyrinth werden durch an den Seiten der Zellen angebrachte Wände gebildet. Zellen, die nicht durch eine Wand getrennt werden, heißen benachbart. Die folgende Abbildung zeigt schematisch das zu untersuchende Labyrinth, den Startpunkt S und den Zielpunkt Z.



Der Micromouse-Roboter beginnt seine Erkundungsfahrt am Startpunkt S und folgt einem Lösungsalgorithmus bis er am Zielpunkt Z angekommen ist. Dabei bewegt sich der Micromouse-Roboter geradlinig vom Mittelpunkt einer Zelle zu dem Mittelpunkt einer benachbarten Zelle. Der Micromouse-Roboter fährt stets vorwärts und ändert seine Bewegungsrichtung durch Drehungen von 90° oder 180° um die Hochachse jeweils an den Mittelpunkten der Zellen. Die folgende Abbildung zeigt die longitudinale Beschleunigung des Micromouse-Roboter in $\frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$ aufgezeichnet gegen die Zeit in s im Verlauf seiner 88-sekündigen Erkundungsfahrt.



(a) Bestimmen Sie die Höchstgeschwindigkeit v_M des Micromouse-Roboters während seiner Erkundungsfahrt mithilfe der oben angegebenen Bewegungsdaten und geben Sie diese in $\frac{m}{s}$ bis auf 2 signifikante Stellen genau an.

Es ist v_M = ______.

(b) Untersuchen Sie das Labyrinth und geben Sie mithilfe der schematischen Darstellung des Labyrinths und der Bewegungsdaten des Micromouse-Roboters die ungefähren Abmessungen des Labyrinths an. Gehen Sie dabei wie folgt vor.

(i) Bestimmen Sie die Seitenlänge l_Z einer Zelle des Labyrinths und geben Sie diese in m bis auf 2 signifikante Stellen genau an.

Es ist l_Z = ______.

(ii) Bestimmen Sie die Seitenlänge l_L des Labyrinths und geben Sie diese in m bis auf 2 signifikante Stellen genau an.

Es ist l_L = ______.

(c) Geben Sie mithilfe der schematischen Darstellung des Labyrinths und der Bewegungsdaten des Micromouse-Roboters an, welche Zellen des Labyrinths der Micromouse-Roboter während seiner Erkundungsfahrt besucht hat. Markieren Sie dazu die von dem Micromouse-Roboter besuchten Zellen in der obigen Abbildung des Labyrinths durch Klicken auf die entsprechende Zelle. Markierte Zellen zeigen ein Kreuz und sind rot gekennzeichnet, nicht markierte Zellen zeigen kein Kreuz und sind blau gekennzeichnet.

(d) Rekonstruieren Sie einen Lösungsalgorithmus für die Erkundungsfahrt des Micromouse-Roboters, der den obigen Bewegungsdaten entspricht. Vervollständigen Sie dazu den folgenden Pseudocode.

```
Start
    Setze Micromouse-Roboter auf Startpunkt
    Solange Micromouse-Roboter nicht am Zielpunkt ist
        Wenn der Weg nach [(Meine Auswahl zurücksetzen)] frei ist
            Drehe Micromouse-Roboter nach [(Meine Auswahl zurücksetzen)]
        Sonst Wenn der Weg nach vorne frei ist
            Tue nichts
        Sonst Wenn der Weg nach [(Meine Auswahl zurücksetzen)] frei ist
            Drehe Micromouse-Roboter nach [(Meine Auswahl zurücksetzen)]
        Sonst
            Drehe Micromouse-Roboter nach [(Meine Auswahl zurücksetzen)]
            Drehe Micromouse-Roboter nach [(Meine Auswahl zurücksetzen)]
        Ende Wenn
        Bewege Micromouse-Roboter nach vorne
    Ende Solange
Ende
```

Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0

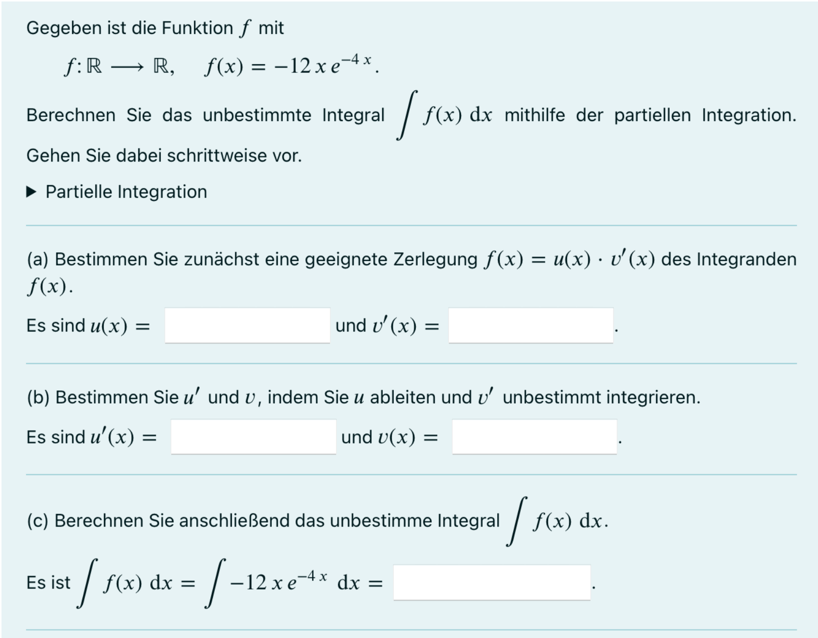
Thema	In dieser Aufgabe soll der Weg und der zugrundeliegende Lösungsalgorithmus eines autonomen Fahrzeuges / Roboters während der Erkundungsfahrt durch ein Labyrinth anhand von Bewegungsdaten untersucht werden: Gegeben sind ein quadratisches Labyrinth mit Start- und Zielpunkt und der zeitliche Verlauf longitudinaler Beschleunigungsdaten des Roboters während seiner Erkundungsfahrt. In Aufgabenteil (a) soll die maximale Geschwindigkeit des Roboters bestimmt werden. In Aufgabenteil (b) soll die Seitenlänge der Zellen und die des Labyrinths bestimmt werden. In Aufgabenteil (c) sollen die von dem Roboter besuchten Zellen des Labyrinths markiert werden. In Aufgabenteil (d) soll ein möglicher Lösungsalgorithmus, dem der Roboter folgt, rekonstruiert werden, indem ein Lückentext geeignet ergänzt wird.
Verbotene Wörter	int, limit
Vorkenntnisse	Rekonstruktion von Geschwindigkeit und zurückgelegtem Weg bei Angabe konstanter Beschleunigung, Pseudocode lesen und verstehen
Randomisierung	Das Labyrinth wird mithilfe einer Variante des Aldous-Broder Algorithmus bis auf wenige Zellen des Labyrinths zufällig erzeugt, sodass mithilfe der Bewegungsdaten des Roboters die einzelnen Aufgabenteile gelöst werden können. Die konstante Beschleunigung des Roboter wird zufällig als ganze Zahl zwischen 3 und 7 jeweils einschließlich mit der Einheit $\frac{cm}{s^2}$ ausgewählt. Dies bestimmt unter anderem die Abmessungen der Zellen und des Labyrinths. Die priorisierte Richtung bei Richtungsänderung des Roboters wird zufällig zwischen *links* und *rechts* ausgewählt. Die Randomisierung hat keine bis geringe Auswirkungen auf den Schwierigkeitsgrad dieser Aufgabe.
Anpassung	Die Größe des quadratischen Labyrinths kann durch die Wahl der Anzahl n ($n \geq 3$) der Zellen jeder Seite des Labyrinths verändert werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

3.5.3 Partielle Integration

3.5.3.1 Partielle Integration (1)

Tags — Partielle Integration, Integral

Screenshot — (Stand 06.10.2024)



Autor — Tim Inoue (Uni-DUE)

Idee — Tim Inoue

Lizenz — CC BY-SA 4.0

Thema — In dieser Aufgabe soll das unbestimmte Integral

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

mithilfe der partiellen Integration berechnet werden, wobei f ein Produkt von differenzierbaren Funktionen u und v ist mit

$$f(x) = u(x) \cdot v'(x).$$

In Aufgabenteil (a) sollen zunächst geeignete Wahlen für u und v' angegeben werden. In Aufgabenteil (b) sollen dann u' und v durch Ableitung und unbestimmte Integration bestimmt werden. In Aufgabenteil (c) soll schließlich das unbestimmte Integral über f mithilfe der partiellen Integration und den Aufgabenteilen (a) und (b) berechnet werden.

Vorkenntnisse — Partielle Integration, Integral

Randomisierung — Die Funktionen u und v werden randomisiert aus einer Liste von differenzierbaren Funktionen gewählt.

Anpassung — Die Liste der Funktionen für u und v kann angepasst werden.

Sonderoption — Feedback unterdrücken: ja

3.5.3.2 Partielle Integration (2)

Tags	Partielle Integration, Integral, Trigonometrie
Screenshot	(Stand 06.10.2024)

Gegeben ist die Funktion f mit

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = -6\,\cos(x)\,\sin(x).$$

Berechnen Sie das unbestimmte Integral $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ mithilfe der partiellen Integration. Gehen Sie dabei schrittweise vor.

▶ Partielle Integration

(a) Bestimmen Sie zunächst eine geeignete Zerlegung $f(x) = u(x) \cdot v'(x)$ des Integranden $f(x)$.

Es sind $u(x) =$ ______ und $v'(x) =$ ______.

(b) Bestimmen Sie u' und v, indem Sie u ableiten und v' unbestimmt integrieren.

Es sind $u'(x) =$ ______ und $v(x) =$ ______.

(c) Berechnen Sie anschließend das unbestimme Integral $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

Es ist $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int -6\,\cos(x)\,\sin(x)\,\mathrm{d}x =$ ______.

Autor: Tim Inoue (Uni-DUE)

Idee: Tim Inoue

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: In dieser Aufgabe soll das unbestimmte Integral

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

mithilfe der partiellen Integration berechnet werden, wobei f ein Produkt von differenzierbaren, trigonometrischen Funktionen u und v ist mit

$$f(x) = u(x) \cdot v'(x).$$

In Aufgabenteil (a) sollen zunächst geeignete Wahlen für u und v' angegeben werden. In Aufgabenteil (b) sollen dann u' und v durch Ableitung und unbestimmte Integration bestimmt werden. In Aufgabenteil (c) soll schließlich das unbestimmte Integral über f mithilfe der partiellen Integration und den Aufgabenteilen (a) und (b) berechnet werden.

Vorkenntnisse: Partielle Integration, Integral, Trigonometrie

Randomisierung: Die Funktionen u und v werden randomisiert aus einer Liste von differenzierbaren Funktionen gewählt.

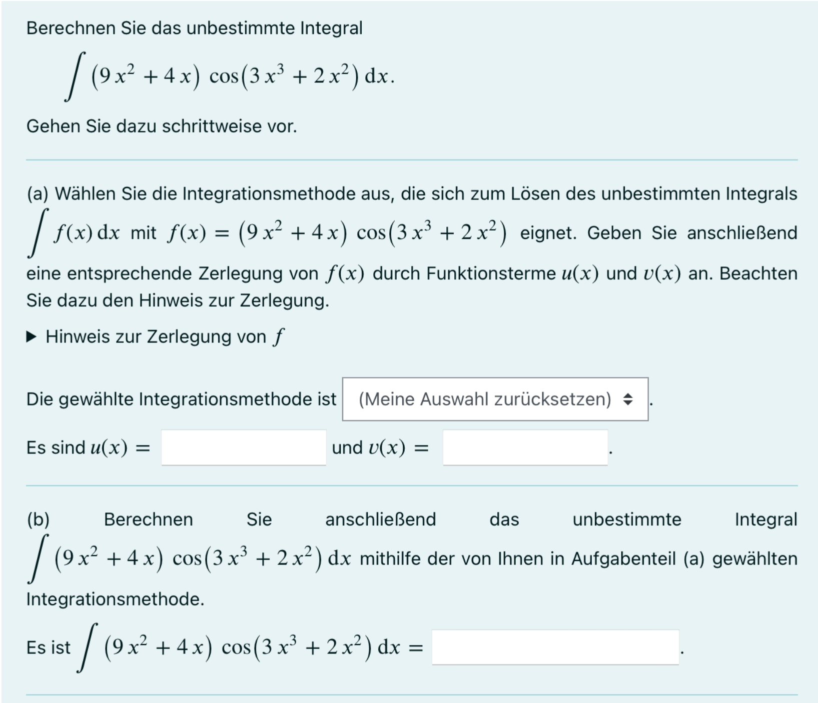
Anpassung: Die Liste der Funktionen für u und v kann angepasst werden.

Sonderoption: Feedback unterdrücken: ja

3.5.3.3 Partielle Integration und Integration durch Substitution

Tags: Partielle Integration, Substitution, Integral, Stammfunktion

Screenshot: (Stand 06.10.2024)



Autor: Tim Inoue (Uni-DUE)

Idee: Emma van der Smagt

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: In dieser Aufgabe soll das unbestimmte Integral

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

mithilfe der partiellen Integration oder Integration durch Substitution berechnet werden, wobei f ein Produkt oder eine Komposition von differenzierbaren Funktionen u und v ist mit

$$f(x) = u(x)\cdot v'(x) \text{ oder } f(x) = u'(v(x))\cdot v'(x).$$

In Aufgabenteil (a) sollen zunächst die geeignete Integrationsmethode und Wahlen für u und v angegeben werden. In Aufgabenteil (b) soll dann das unbestimmte Integral über f mit der in (a) gewählten Integrationsmethode berechnet werden.

Vorkenntnisse: Partielle Integration, Substitution, Integral

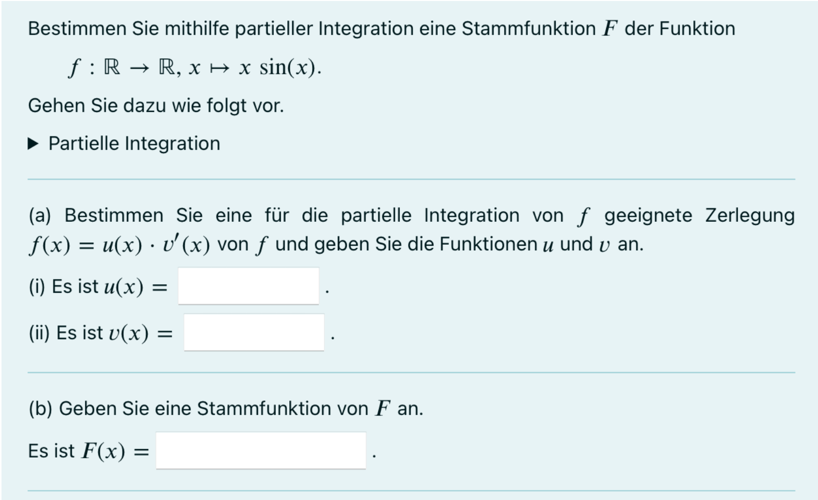
Randomisierung: Die Funktionen u und v werden randomisiert aus einer Liste von differenzierbaren Funktionen gewählt.

Anpassung: Die Liste der Funktionen für u und v kann angepasst werden.

Sonderoption: Feedback unterdrücken: ja

3.5.3.4 Bestimmung von Stammfunktionen mit partieller Integration (1)

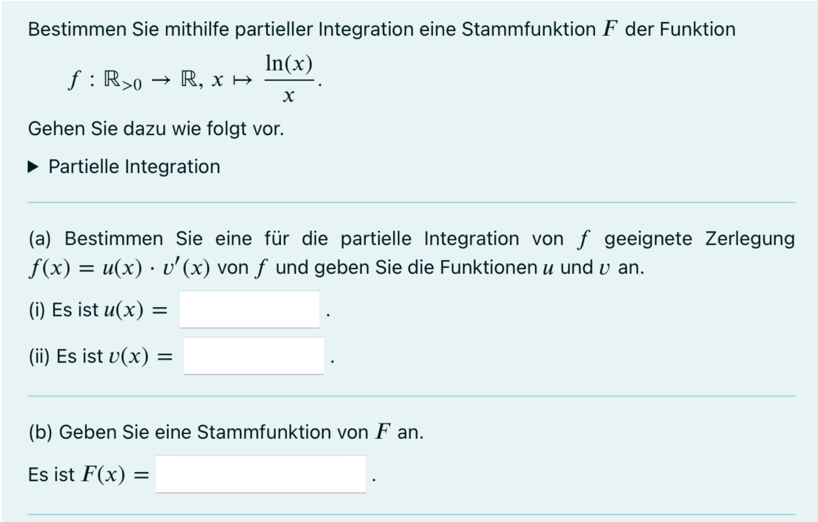
Tags	Partielle Integration, trigonimetrische Funktionen
Screenshot	(Stand 03.09.2024)



Autor	Emma van der Smagt (RUB)
Idee	Emma van der Smagt
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll mithilfe partieller Integration die Stammfunktion der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\, x \mapsto x^k T(a\,x)$ bestimmt werden. Dabei sind $T \in \{\sin, \cos\}$, $a \in \{0, 1, 2, ..., 6\}$ und $k \in \{1, 2\}$. In Aufgabenteil (a) sollen Funktionen u und v angegeben werden, die eine Zerlegung $f(x) = u(x)\, v'(x)$ von f erlauben. In Aufgabenteil (b) soll mithilfe der Zerlegung aus Aufgabenteil (a) eine Stammfunktion von f angegeben werden.
Verbotene Wörter	int, limit
Vorkenntnisse	partielle Integration
Randomisierung	Die zu integrierende Funktion f wird zufällig aus einer Liste von Funktionen ausgewählt.
Anpassung	Die Liste der zu integrierenden Funktionen kann um weitere Funktionen ergänzt werden. Da die Zerlegung von f in u und v' nicht automatisiert vorgenommen wird, müssen Sie die entsprechenden Listen um eine geeignete Zerlegung ergänzen.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

3.5.3.5 Bestimmung von Stammfunktionen mit partieller Integration (2)

Tags	Partielle Integration, e-Funktion, ln-Funktion
Screenshot	(Stand 03.09.2024)



Bestimmen Sie mithilfe partieller Integration eine Stammfunktion F der Funktion

$$f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R},\, x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}.$$

Gehen Sie dazu wie folgt vor.

▶ Partielle Integration

(a) Bestimmen Sie eine für die partielle Integration von f geeignete Zerlegung $f(x) = u(x) \cdot v'(x)$ von f und geben Sie die Funktionen u und v an.

(i) Es ist $u(x) =$.

(ii) Es ist $v(x) =$.

(b) Geben Sie eine Stammfunktion von F an.

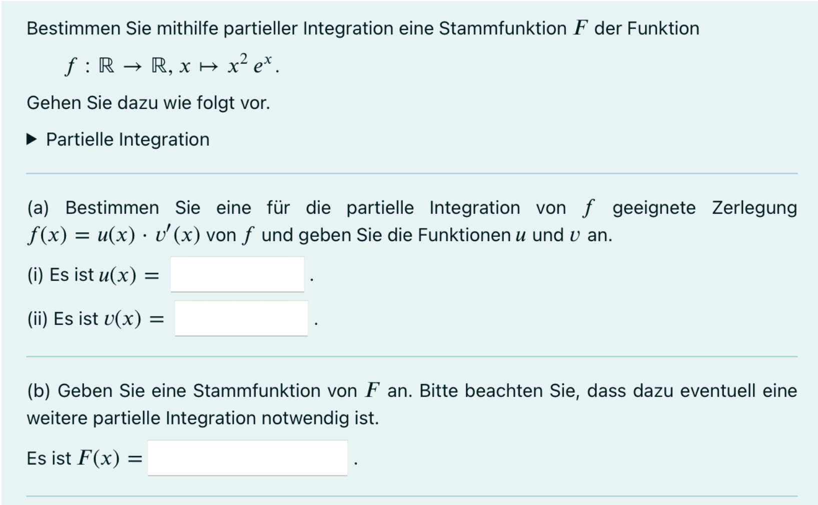
Es ist $F(x) =$.

Autor	Emma van der Smagt (RUB)
Idee	Emma van der Smagt
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll mithilfe partieller Integration die Stammfunktion der Funktion $$f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R},\, a\,x^n\, \ln(x)^m$$ bestimmt werden. Dabei sind $a \in 1, 2$ und $(n, m) \in \{(2,1), (0,2), (-1,1), (3,1), (4,1), (5,1)\}$. In Aufgabenteil (a) sollen Funktionen u und v angegeben werden, die eine Zerlegung $f(x) = u(x)\,v'(x)$ von f erlauben. In Aufgabenteil (b) soll mithilfe der Zerlegung aus Aufgabenteil (a) eine Stammfunktion von f angegeben werden.
Verbotene Wörter	int, limit
Vorkenntnisse	partielle Integration
Randomisierung	Die zu integrierende Funktion f wird zufällig aus einer Liste von Funktionen ausgewählt.
Anpassung	Die Liste der zu integrierenden Funktionen kann um weitere Funktionen ergänzt werden. Da die Zerlegung von f in u und v' nicht automatisiert vorgenommen wird, müssen Sie die entsprechenden Listen um eine geeignete Zerlegung ergänzen.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

3.5.3.6 Bestimmung von Stammfunktionen mit partieller Integration (3)

Tags — Partielle Integration, doppelte Partielle Integration

Screenshot — (Stand 16.09.2024)



Bestimmen Sie mithilfe partieller Integration eine Stammfunktion F der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\, x \mapsto x^2\, e^x\,.$$

Gehen Sie dazu wie folgt vor.

▶ Partielle Integration

(a) Bestimmen Sie eine für die partielle Integration von f geeignete Zerlegung $f(x) = u(x) \cdot v'(x)$ von f und geben Sie die Funktionen u und v an.

(i) Es ist $u(x) =$.

(ii) Es ist $v(x) =$.

(b) Geben Sie eine Stammfunktion von F an. Bitte beachten Sie, dass dazu eventuell eine weitere partielle Integration notwendig ist.

Es ist $F(x) =$.

Autor — Emma van der Smagt (RUB)

Idee — Emma van der Smagt

Lizenz — CC BY-SA 4.0

Thema — In dieser Aufgabe soll mithilfe zweifacher partieller Integration die Stammfunktion der Funktion

$$f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R},\, x^k\, e^{mx}\, T(x)^n$$

bestimmt werden. Dabei sind $T \in \{\sin, \cos\}$ und $(k, m, n) \in \{(2, 1, 0), (0, 1, 1), (2, 0, 1)\}$. In Aufgabenteil (a) sollen Funktionen u und v angegeben werden, die eine Zerlegung $f(x) = u(x)\, v'(x)$ von f erlauben. In Aufgabenteil (b) soll mithilfe der Zerlegung aus Aufgabenteil (a) eine Stammfunktion von f angegeben werden.

Verbotene Wörter — int, limit

Vorkenntnisse — partielle Integration

Randomisierung — Die zu integrierende Funktion f wird zufällig aus einer Liste von Funktionen ausgewählt.

Anpassung — Die Liste der zu integrierenden Funktionen kann um weitere Funktionen ergänzt werden. Da die Zerlegung von f in u und v' nicht automatisiert vorgenommen wird, müssen Sie die entsprechenden Listen um eine geeignete Zerlegung ergänzen.

Sonderoption — Feedback unterdrücken: ja

3.5.3.7 Magnetfeld Scheibe

Tags	Biot-Savart, Integral
Screenshot	(Stand 03.09.2024)

Eine Kreisscheibe mit Radius R und homogener Flächenladungsdichte σ rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um ihre Symmetrieachse. Ein um die Symmetrieachse rotierender ringförmiger Streifen mit Innenradius r, Breite d und Ladung q erzeugt auf der Scheibe den Strom

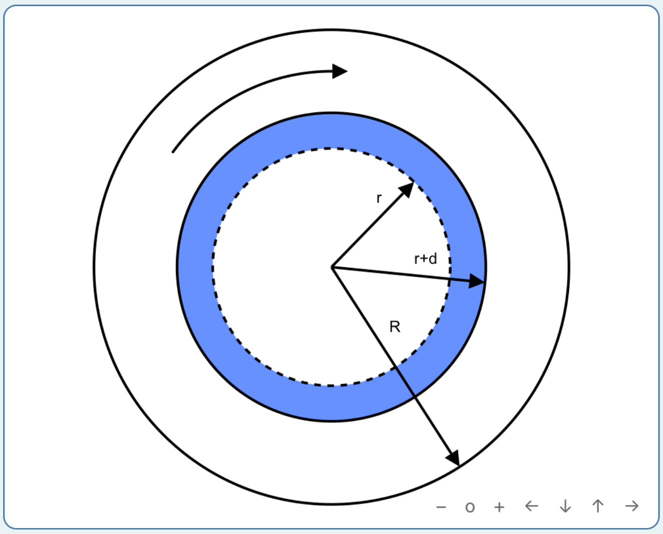
$$I = \omega \frac{q}{2\pi} = \omega \, \sigma \, r \, d$$

Der Strom erzeugt ein magnetisches Feld, das gemäß des Biot-Savart-Gesetzes an Punkten der Scheibe mit Abstand z zur Rotationsachse die magnetische Flussdichte von Betrag

$$B(z) = \frac{\mu_0 \omega \sigma}{2} \int_0^R \frac{r^3}{(z^2 + r^2)^{3/2}} \mathrm{d}r$$

besitzt.

Die folgenden Abbildung zeigt exemplarisch die Kreisscheibe und den ringförmigen Streifen.



(a) Bestimmen Sie den Betrag $B(z)$ der magnetischen Flussdichte an Punkten der Scheibe mit Abstand z zur Rotationsachse.

Es ist $B(z) = \frac{\mu_0 \omega \sigma}{2} \cdot$ ______ .

(b) Bestimmen Sie den Betrag $B(0)$ der magnetischen Flussdichte am Schnittpunkt der Scheibe und ihrer Rotationachse.

Es ist $B(0) = \frac{\mu_0 \omega \sigma}{2} \cdot$ ______ .

Autor	Emma van der Smagt (RUB)
Idee	Emma van der Smagt
Lizenz	CC BY-SA 4.0

Thema	Eine Kreisscheibe homogener Flächenladungsdichte rotiert mir konstanter Winkelgeschwindigkeit um ihre Symmetrieachse. Ein um die Symmetrieachse rotierender ringförmiger Streifen erzeugt auf der Scheibe einen Strom. Der Strom erzeugt ein magnetisches Feld. In Aufgabenteil (a) soll mithilfe des Biot-Savart-Gesetzes die magnetische Flussdichte an Punkten der Schreibe bestimmt und in Abhängigkeit des Abstands zur Rotationsachse angegeben werden. In Aufgabenteil (b) soll die magnetische Flussdichte am Schnittpunkt der Scheibe und ihrer Rotationsachse bestimmt werden.
Verbotene Wörter	int, limit
Vorkenntnisse	Integration
Randomisierung	keine
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: nein

3.5.3.8 Yukawa-Potential Ladungsdichte

Tags	Biot-Savart, Integral
Screenshot	(Stand 03.09.2024)

Das Yukawa-Potential

$$\phi(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} e^{-\frac{r}{a}}.$$

(in Kugelkoordinaten) ist eine Verallgemeinerung des Coulomb-Potentials und beschreibt das Potential von Austauschteilchen, wie sie bei der Restwechselwirkung der starken Wechselwirkung und in Supraleitern auftreten. Hervorgerufen wird das Potential durch die Yukawa-Wechselwirkung. Es bezeichne ϵ_0 die elektrische Feldkonstante, q die Ladung der Quelle, die das Potential erzeugt, und a die Abklinglänge des Potentials.

Die Ladungsdichte des Yukawa-Potentials ist für $r > 0$ gegeben als

$$\rho(r) = -\frac{q}{4\pi a^2 r} e^{-\frac{r}{a}}.$$

Bestimmen Sie die Gesamtladung

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{\infty} r^2 \, \rho(r) \, \sin\theta \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\phi,$$

die sich im gesamten Raum befindet.

Es ist $Q =$ _____ .

Autor	Emma van der Smagt (RUB)
Idee	Emma van der Smagt
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll aus dem Yukawa-Potential $\phi(r)$ und der Yukawa-Ladungsdichte $\rho(r)$ in Kugelkoordinaten die Gesamtladung Q, die sich im Raum befindet, bestimmt werden.
Verbotene Wörter	int, limit
Vorkenntnisse	Integration
Randomisierung	keine
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: nein

3.5.4 Integration durch Substitution

3.5.4.1 Integration durch Substitution (1)

Tags Partielle Integration, Substitution, Integral, Stammfunktion

Screenshot (Stand 06.10.2024)

Gegeben ist die Funktion f mit

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = -60\,x^2\,\cos\left(5\,x^3+1\right).$$

Berechnen Sie das unbestimmte Integral $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ mithilfe der Substitution. Gehen Sie dabei schrittweise vor.

▶ Integration durch Substitution

(a) Bestimmen Sie zunächst eine geeignete Zerlegung $f(x) = g'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$ des Integranden $f(x)$.

Es sind $g'(x) =$ ______ und $\varphi(x) =$ ______.

(b) Bestimmen Sie g, indem Sie g' unbestimmt integrieren.

Es ist $g(x) =$ ______.

(c) Berechnen Sie anschließend das unbestimme Integral $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

Es ist $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int -60\,x^2\,\cos\left(5\,x^3+1\right)\,\mathrm{d}x =$ ______.

Autor Tim Inoue (Uni-DUE)

Idee Tim Inoue

Lizenz CC BY-SA 4.0

Thema In dieser Aufgabe soll das unbestimmte Integral

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

mithilfe der Integration durch Substitution berechnet werden, wobei f eine Komposition von differenzierbaren Funktionen g und φ ist mit

$$f(x) = g'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x).$$

In Aufgabenteil (a) sollen zunächst geeignete Wahlen für g' und φ angegeben werden. In Aufgabenteil (b) soll dann das unbestimmte Integral über g' berechnet werden. In Aufgabenteil (c) soll schließlich das unbestimmte Integral über f mithilfe der Aufgabenteile (a) und (b) berechnet werden.

Vorkenntnisse Substitution, Integral

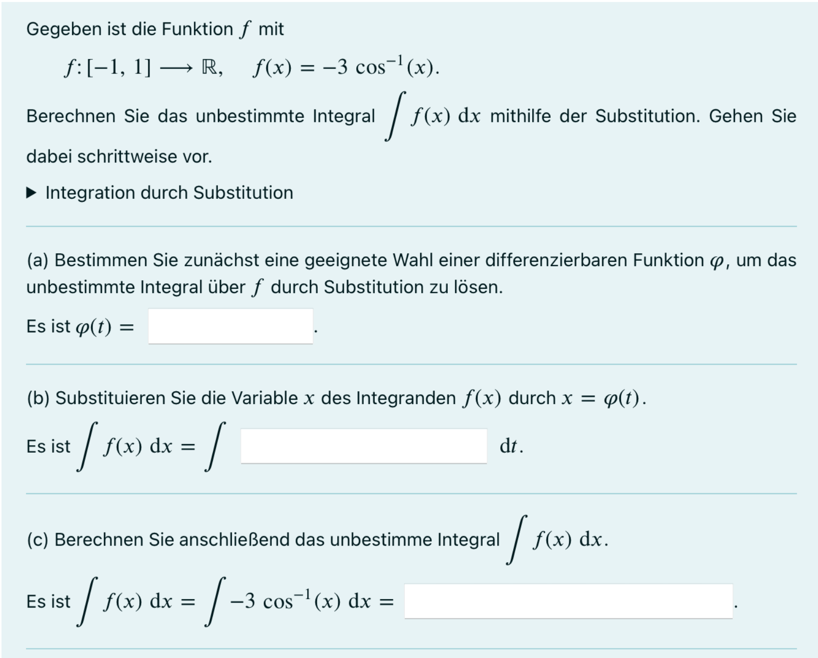
Randomisierung Die Funktionen g und φ werden randomisiert aus einer Liste von differenzierbaren Funktionen gewählt.

Anpassung Die Liste der Funktionen für g und φ kann angepasst werden.

Sonderoption Feedback unterdrücken: ja

3.5.4.2 Integration durch Substitution (2)

Tags	Partielle Integration, Substitution, Integral, Stammfunktion
Screenshot	(Stand 06.10.2024)


Gegeben ist die Funktion f mit

$$f\colon [-1,\,1] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = -3\,\cos^{-1}(x).$$

Berechnen Sie das unbestimmte Integral $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ mithilfe der Substitution. Gehen Sie dabei schrittweise vor.

▶ Integration durch Substitution

(a) Bestimmen Sie zunächst eine geeignete Wahl einer differenzierbaren Funktion φ, um das unbestimmte Integral über f durch Substitution zu lösen.

Es ist $\varphi(t) =$ ______.

(b) Substituieren Sie die Variable x des Integranden $f(x)$ durch $x = \varphi(t)$.

Es ist $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int$ ______ $\mathrm{d}t$.

(c) Berechnen Sie anschließend das unbestimme Integral $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

Es ist $\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int -3\,\cos^{-1}(x)\,\mathrm{d}x =$ ______.

Autor	Tim Inoue (Uni-DUE)
Idee	Tim Inoue
Lizenz	CC BY-SA 4.0

Thema

In dieser Aufgabe soll das unbestimmte Integral

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

mithilfe der Integration durch Substitution berechnet werden, wobei es eine injektive, differenzierbare Funktion φ gibt mit

$$x = \varphi(t).$$

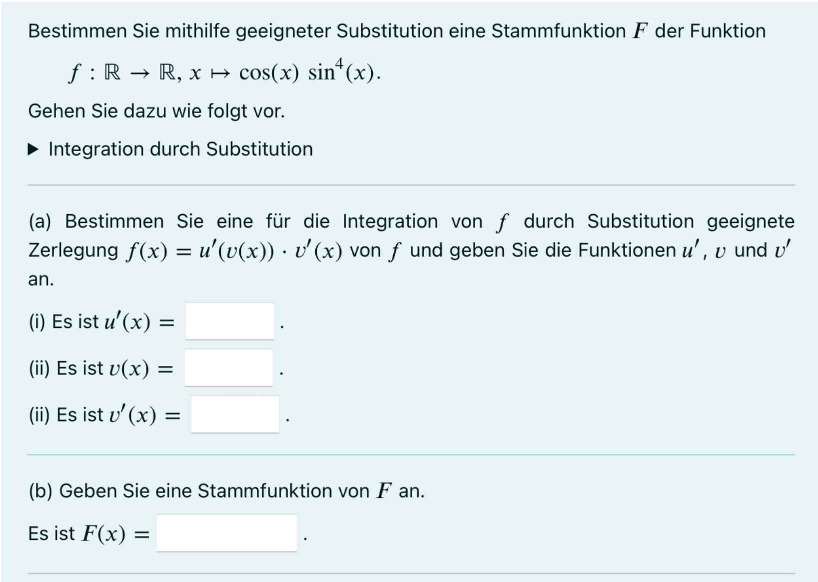
In Aufgabenteil (a) soll zunächst eine geeignete Wahl für φ angegeben werden. In Aufgabenteil (b) soll dann die Variable x des Integranden $f(x)$ durch $x = \varphi(t)$ substituiert werden. In Aufgabenteil (c) soll schließlich das unbestimmte Integral über f mithilfe der Aufgabenteile (a) und (b) berechnet werden.

Vorkenntnisse	Substitution, Integral
Randomisierung	Die Funktionen f und φ werden randomisiert aus einer Liste von (differenzierbaren) Funktionen gewählt.
Anpassung	Die Liste der Funktionen für f und φ kann angepasst werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

3.5.4.3 Bestimmung von Stammfunktionen durch Substitution (1)

Tags Substitution, Integral, Integration, trigonometrische Funktion

Screenshot (Stand 04.09.2024)


Bestimmen Sie mithilfe geeigneter Substitution eine Stammfunktion F der Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\, x \mapsto \cos(x)\, \sin^4(x).$$

Gehen Sie dazu wie folgt vor.

▶ Integration durch Substitution

(a) Bestimmen Sie eine für die Integration von f durch Substitution geeignete Zerlegung $f(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$ von f und geben Sie die Funktionen u', v und v' an.

(i) Es ist $u'(x) =$.

(ii) Es ist $v(x) =$.

(ii) Es ist $v'(x) =$.

(b) Geben Sie eine Stammfunktion von F an.

Es ist $F(x) =$.

Autor Emma van der Smagt (RUB)

Idee Emma van der Smagt

Lizenz CC BY-SA 4.0

Thema In dieser Aufgabe soll mithilfe geeigneter Substitution die Stammfunktion der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = T(x)^{k-1}\, T'(x)$$

oder

$$f(x) = T(x^k)\, x^{k-1}$$

bestimmt werden. Dabei sind $T \in \{\pm \sin, \pm \cos\}$ und $k \in \{2, 3, 4, 5\}$. In Aufgabenteil (a) sollen Funktionen u', v und v' bestimmt werden, die eine Zerlegung $f(x) = u'(v(x))\, v'(x)$ von f erlauben. In Aufgabenteil (b) soll mithilfe der Zerlegung aus Aufgabenteil (a) eine Stammfunktion von f angegeben werden.

Verbotene Wörter int, limit

Vorkenntnisse Integration durch Substitution

Randomisierung Die zu integrierende Funktion f wird zufällig aus einer Liste von Funktionen ausgewählt.

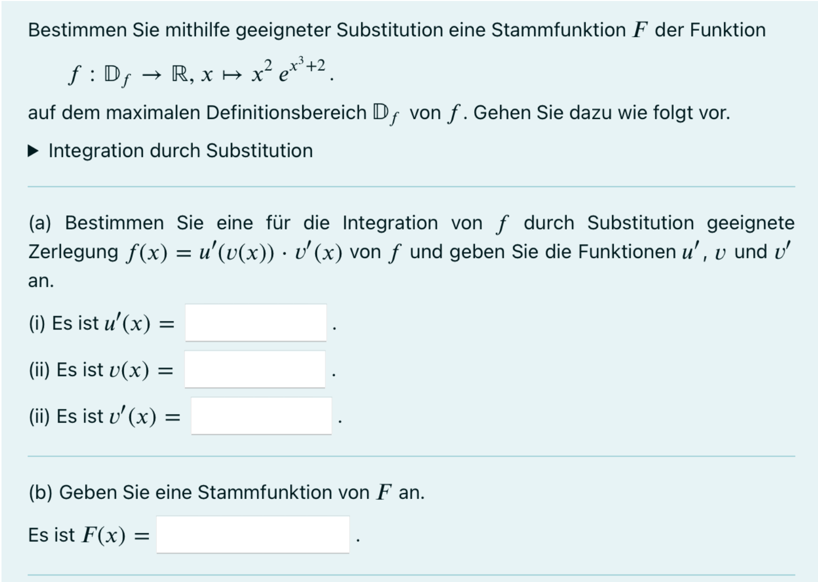
Anpassung Die Liste der zu integrierenden Funktionen kann um weitere Funktionen ergänzt werden. Da die Zerlegung von f in u', v und v' nicht automatisiert vorgenommen wird, müssen Sie die entsprechenden Listen um eine geeignete Zerlegung ergänzen.

Sonderoption Feedback unterdrücken: ja

3.5.4.4 Bestimmung von Stammfunktionen durch Substitution (2)

Tags: Substitution, Integral, Integration, e-Funktion, ln-Funktion

Screenshot: (Stand 04.09.2024)



Bestimmen Sie mithilfe geeigneter Substitution eine Stammfunktion F der Funktion

$$f : \mathbb{D}_f \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2\, e^{x^3+2}.$$

auf dem maximalen Definitionsbereich $\mathbb{D}_f$ von f. Gehen Sie dazu wie folgt vor.

▶ Integration durch Substitution

(a) Bestimmen Sie eine für die Integration von f durch Substitution geeignete Zerlegung $f(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$ von f und geben Sie die Funktionen u', v und v' an.

(i) Es ist $u'(x) =$ ____ .

(ii) Es ist $v(x) =$ ____ .

(ii) Es ist $v'(x) =$ ____ .

(b) Geben Sie eine Stammfunktion von F an.

Es ist $F(x) =$ ____ .

Autor: Emma van der Smagt (RUB)

Idee: Emma van der Smagt

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: In dieser Aufgabe soll mithilfe geeigneter Substitution die Stammfunktion der Funktion $f : \mathbb{D}_f \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{(a - e^x)}}$$

oder

$$f(x) = \phi(x^k + a)\, x^{k-1}$$

auf dem maximalen Definitionsbereich $\mathbb{D}_f$ von f bestimmt werden. Dabei sind $\phi \in \{\exp, \ln\}$ und $a, k \in \{2, 3, 5\}$. In Aufgabenteil (a) sollen Funktionen u', v und v' bestimmt werden, die eine Zerlegung $f(x) = u'(v(x))\, v'(x)$ von f erlauben. In Aufgabenteil (b) soll mithilfe der Zerlegung aus Aufgabenteil (a) eine Stammfunktion von f angegeben werden.

Verbotene Wörter: int, limit

Vorkenntnisse: Integration durch Substitution

Randomisierung: Die zu integrierende Funktion f wird zufällig aus einer Liste von Funktionen ausgewählt.

Anpassung: Die Liste der zu integrierenden Funktionen kann um weitere Funktionen ergänzt werden. Da die Zerlegung von f in u', v und v' nicht automatisiert vorgenommen wird, müssen Sie die entsprechenden Listen um eine geeignete Zerlegung ergänzen.

Sonderoption: Feedback unterdrücken: ja

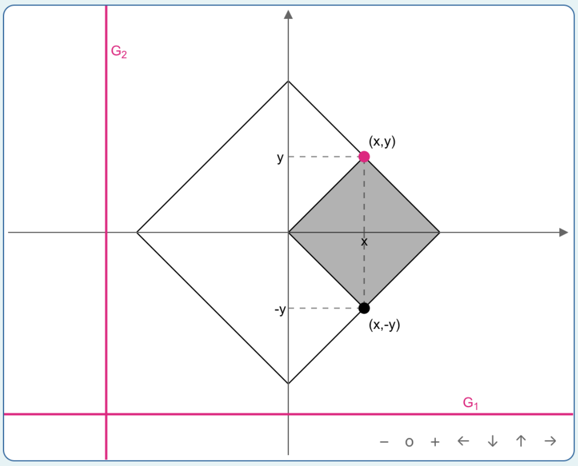
3.5.4.5 Kreissektor (1)

Tags Integration, Flächeninhalt

Screenshot (Stand 16.09.2024)

Sei (x, y) ein Punkte auf dem Einheitskreis $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| = 1\}$ der 1-Norm (oder Summennorm) in $\mathbb{R}^2$ mit $y > 0$. Untersuchen Sie den durch die Punkte (x, y) und $(x, -y)$ bestimmten Kreissektor S, der die x-Halbachse der nicht negativen reellen Zahlen schneidet. Zerlegen Sie S in geeignete Teilflächen und berechnen Sie den Flächeninhalt von S als Linearkombination der Flächeninhalte der Teilflächen. Gehen Sie dazu wie folgt vor. Beachten Sie, dass Ihre Antwort zu jedem Aufgabenteil nur dann bewertet wird, falls Sie den vorangegangenen Aufgabenteil bearbeitet haben.

Die folgende Abbildung zeigt den Kreissektor S. Der Punkt (x, y) lässt sich entlang des oberen Halbkreises verschieben. Die Gerade G_1 parallel zur x-Achse und die Gerade G_2 parallel zur y-Achse erlauben es Ihnen, S in geeignete Teilflächen zu zerlegen (siehe Aufgabenteil (a)).



(a) Wählen Sie $(x, y) \in S^1$ mit $x \neq 0$ und $y > 0$, indem Sie den Punkt (x, y) (roter Punkt) in der obigen Abbildung des Kreissektors S entlang des oberen Halbkreises verschieben. Zerlegen Sie S dann so in geeignete Teilflächen, dass sich jede der Teilflächen als die Fläche zwischen den Graphen zweier geschlossen darstellbarer Funktionen über der x-Achse beschreiben lässt. Verschieben Sie dazu die Gerade G_1 (rote Gerade parallel zur x-Achse) und die Gerade G_2 (rote Gerade parallel zur y-Achse) in der obigen Abbildung von S.

(b) Bestimmen Sie mithilfe der in Aufgabenteil (a) von Ihnen gewählten Teilflächen und deren beschreibender Funktionen zwei positive Funktionen f_1, f_2 über der x-Achse und Intervalle $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, sodass deren Integrale

$$\int_{a_i}^{b_i} f_i(t)\,\mathrm{d}t,\ i \in \{1, 2\} \quad (*)$$

mit den Flächeninhalten der Teilflächen übereinstimmen. Wählen Sie dazu f_1, um den Flächeninhalt der Teilflächen linksseitig von G_2 zu beschreiben, und wählen Sie dazu f_2, um den Flächeninhalt der Teilflächen rechtsseitig von G_2 zu beschreiben, und geben Sie f_1, f_2 in Abhängigkeit der Koordinaten des Punkts (x, y) an.

(i) Es ist $f_1(t) =$ ______ mit $a_1 =$ ______ und $b_1 =$ ______.

(ii) Es ist $f_2(t) =$ ______ mit $a_2 =$ ______ und $b_2 =$ ______.

(c) Berechnen Sie die Integrale (∗) der von Ihnen in Aufgabenteil (b) bestimmten Funktionen f_1, f_2 auf den Intervallen $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$ und geben Sie diese in Abhängigkeit der Koordinaten des Punkts (x, y) an.

(i) Es ist $\int_{a_1}^{b_1} f_1(t)\,\mathrm{d}t =$ ______.

(ii) Es ist $\int_{a_2}^{b_2} f_2(t)\,\mathrm{d}t =$ ______.

(d) Der Flächeninhalt $F(x)$ von S ist abhängig von x und definiert eine geschlossen darstellbare Funktion $F : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto F(x)$. Geben Sie den Flächeninhalt $F(x)$ mithilfe der von Ihnen in Aufgabenteil (c) angegebenen Flächeninhalte der entsprechenden Teilstücke an, indem Sie y geeignet ersetzen.

Es ist $F(x) =$ ______.

Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll ein Kreissektor der Einheitskreisscheibe bezüglich der 1-Norm (Summennorm) als Fläche zwischen Graphen von Funktionen über der x-Achse beschrieben und dessen Flächeninhalt durch Integration bestimmt werden. In Aufgabenteil (a) soll dazu zunächst ein beliebiger, den Kreissektor definierender Punkt auf dem oberen Halbkreis ausgewählt und der Kreissektor graphisch, durch Wahl geeigneter Geraden parallel zur x- und y-Achse in Teilflächen zerlegt werden. In Aufgabenteil (b) sollen geschlossen darstellbare positive Funktionen und deren Definitionsbereiche angegeben werden, sodass sie die Teilflächen des Kreissektors als Flächen zwischen ihren Graphen beschreiben. In Aufgabenteil (c) sollen die Flächeninhalte der Teilfächen durch Integration der in Aufgabenteil (b) bestimmten Funktionen berechnet werden. In Aufgabenteil (d) soll schließlich der Flächeninhalt des Kreissektors mithilfe der in Aufgabenteil (c) berechneten Flächeninhalte der Teilflächen berechnet werden.
Verbotene Wörter	int, limit
Vorkenntnisse	Integration polynomieller Funktionen
Randomisierung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

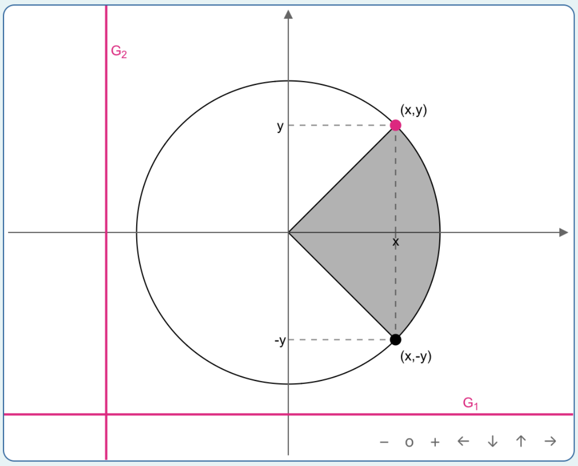
3.5.4.6 Kreissektor (2)

Tags: Integration, Flächeninhalt, partielle Integration, Substitution, trigonometrische Funktion

Screenshot: (Stand 16.09.2024)

Sei (x, y) ein Punkte auf dem Einheitskreis $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ der 2-Norm (oder euklidischen Norm) in $\mathbb{R}^2$ mit $y > 0$. Untersuchen Sie den durch die Punkte (x, y) und $(x, -y)$ bestimmten Kreissektor S, der die x-Halbachse der nicht negativen reellen Zahlen schneidet. Zerlegen Sie S in geeignete Teilflächen und berechnen Sie den Flächeninhalt von S als Linearkombination der Flächeninhalte der Teilflächen. Gehen Sie dazu wie folgt vor. Beachten Sie, dass Ihre Antwort zu jedem Aufgabenteil nur dann bewertet wird, falls Sie den vorangegangenen Aufgabenteil bearbeitet haben.

Die folgende Abbildung zeigt den Kreissektor S. Der Punkt (x, y) lässt sich entlang des oberen Halbkreises verschieben. Die Gerade G_1 parallel zur x-Achse und die Gerade G_2 parallel zur y-Achse erlauben es Ihnen, S in geeignete Teilflächen zu zerlegen (siehe Aufgabenteil (a)).



(a) Wählen Sie $(x, y) \in S^1$ mit $x \neq 0$ und $y > 0$, indem Sie den Punkt (x, y) (roter Punkt) in der obigen Abbildung des Kreissektors S entlang des oberen Halbkreises verschieben. Zerlegen Sie S dann so in geeignete Teilflächen, dass sich jede der Teilflächen als die Fläche zwischen den Graphen zweier geschlossen darstellbarer Funktionen über der x-Achse beschreiben lässt. Verschieben Sie dazu die Gerade G_1 (rote Gerade parallel zur x-Achse) und die Gerade G_2 (rote Gerade parallel zur y-Achse) in der obigen Abbildung von S.

(b) Bestimmen Sie mithilfe der in Aufgabenteil (a) von Ihnen gewählten Teilflächen und deren beschreibender Funktionen zwei positive Funktionen f_1, f_2 über der x-Achse und Intervalle $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, sodass deren Integrale

$$\int_{a_i}^{b_i} f_i(t)\,\mathrm{d}t,\ i \in \{1, 2\} \qquad (*)$$

mit den Flächeninhalten der Teilflächen übereinstimmen. Wählen Sie dazu f_1, um den Flächeninhalt der Teilflächen linksseitig von G_2 zu beschreiben, und wählen Sie dazu f_2, um den Flächeninhalt der Teilflächen rechtsseitig von G_2 zu beschreiben, und geben Sie f_1, f_2 in Abhängigkeit der Koordinaten des Punkts (x, y) an.

(i) Es ist $f_1(t) =$ ______ mit $a_1 =$ ___ und $b_1 =$ ___ .

(ii) Es ist $f_2(t) =$ ______ mit $a_2 =$ ___ und $b_2 =$ ___ .

(c) Berechnen Sie die Integrale (∗) der von Ihnen in Aufgabenteil (b) bestimmten Funktionen f_1, f_2 auf den Intervallen $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$ und geben Sie diese in Abhängigkeit der Koordinaten des Punkts (x, y) an. In Abhängigkeit der von Ihnen gewählten Teilflächen bietet sich die Substitution $t = \cos(s)$ an. Geben Sie den Arkussinus und Arkuskosinus von x als `asin(x)` bzw. `acos(x)` ein.

(i) Es ist $\int_{a_1}^{b_1} f_1(t)\,\mathrm{d}t =$ ______ .

(ii) Es ist $\int_{a_2}^{b_2} f_2(t)\,\mathrm{d}t =$ ______ .

(d) Der Flächeninhalt $F(x)$ von S ist abhängig von x und definiert eine geschlossen darstellbare Funktion $F : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto F(x)$. Geben Sie den Flächeninhalt $F(x)$ mithilfe der von Ihnen in Aufgabenteil (c) angegebenen Flächeninhalte der entsprechenden Teilstücke an, indem Sie y geeignet ersetzen.

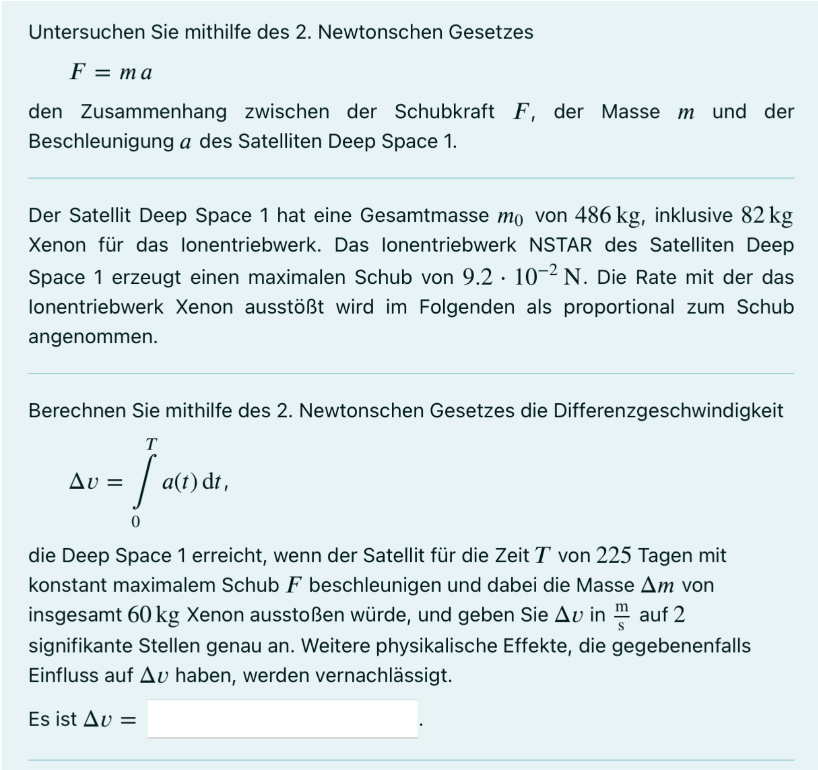
Es ist $F(x) =$ ______ .

Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll ein Kreissektor der Einheitskreisscheibe bezüglich der 2-Norm (Summennorm) als Fläche zwischen Graphen von Funktionen über der x-Achse beschrieben und dessen Flächeninhalt durch Integration bestimmt werden. In Aufgabenteil (a) soll dazu zunächst ein beliebiger, den Kreissektor definierender Punkt auf dem oberen Halbkreis ausgewählt und der Kreissektor graphisch, durch Wahl geeigneter Geraden parallel zur x- und y-Achse in Teilflächen zerlegt werden. In Aufgabenteil (b) sollen geschlossen darstellbare positive Funktionen und deren Definitionsbereiche angegeben werden, sodass sie die Teilflächen des Kreissektors als Flächen zwischen ihren Graphen beschreiben. In Aufgabenteil (c) sollen die Flächeninhalte der Teilfächen durch Integration der in Aufgabenteil (b) bestimmten Funktionen berechnet werden. In Aufgabenteil (d) soll schließlich der Flächeninhalt des Kreissektors mithilfe der in Aufgabenteil (c) berechneten Flächeninhalte der Teilflächen berechnet werden.
Verbotene Wörter	int, limit
Vorkenntnisse	Integration polynomieller Funktionen
Randomisierung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

3.5.4.7 Deep Space 1

Tags: Integral, Integration, Substitution, SI Einheiten, Signifikante Stellen

Screenshot: (Stand 03.09.2024)



Untersuchen Sie mithilfe des 2. Newtonschen Gesetzes

$$F = m\,a$$

den Zusammenhang zwischen der Schubkraft F, der Masse m und der Beschleunigung a des Satelliten Deep Space 1.

Der Satellit Deep Space 1 hat eine Gesamtmasse m_0 von $486\,\mathrm{kg}$, inklusive $82\,\mathrm{kg}$ Xenon für das Ionentriebwerk. Das Ionentriebwerk NSTAR des Satelliten Deep Space 1 erzeugt einen maximalen Schub von $9.2 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{N}$. Die Rate mit der das Ionentriebwerk Xenon ausstößt wird im Folgenden als proportional zum Schub angenommen.

Berechnen Sie mithilfe des 2. Newtonschen Gesetzes die Differenzgeschwindigkeit

$$\Delta v = \int_0^T a(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

die Deep Space 1 erreicht, wenn der Satellit für die Zeit T von 225 Tagen mit konstant maximalem Schub F beschleunigen und dabei die Masse Δm von insgesamt $60\,\mathrm{kg}$ Xenon ausstoßen würde, und geben Sie Δv in $\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ auf 2 signifikante Stellen genau an. Weitere physikalische Effekte, die gegebenenfalls Einfluss auf Δv haben, werden vernachlässigt.

Es ist $\Delta v =$ ______ .

Autor: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: In dieser Aufgabe soll mithilfe des 2. Newtonsches Gesetzes (siehe auch Aufgabe 1.1.2.1) die Geschwindigkeitsänderung

$$\Delta v = \int_0^T \frac{F}{m(t)}\,\mathrm{d}t$$

des Satelliten Deep Space 1 angegeben werden, wenn dieser mit gegebenem konstanten Schub F und veränderlicher Masse m für die Zeit T beschleunigt wird. Die Rate, mit der der Satellit Masse ausstößt, wird dabei proportional zum Schub und damit als konstant angenommen. Die Geschwindigkeitsänderung soll dabei mit Einheit bis auf eine vorgegebene Zahl signifikanter Stellen genau angegeben werden.

Verbotene Wörter: int, limit

Vorkenntnisse: Begriffe zur Charakterisierung reeller Funktionen (Proportionalität, Rate), Integration durch Substitution

Randomisierung: Die ausgestoßene Masse und die Zeit der Beschleunigung werden als Produkt eines zufällig als 2, 3 oder 4 gewählten Faktors und den Basiswerten $20\,\mathrm{kg}$ bzw. 75 Tagen gewählt.

Anpassung: keine

Sonderoption: Feedback unterdrücken: ja

3.5.4.8 Elektrisches Radialfeld

Tags Integral, Integration, Substitution, Kurvenintegral, Skalarprodukt

Screenshot (Stand 03.09.2024)

Das Coulombsche Gesetz

$$\vec{F} = \frac{Q\,q}{4\,\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{1}{|\vec{x}_q - \vec{x}_Q|^2}\,\frac{\vec{x}_q - \vec{x}_Q}{|\vec{x}_q - \vec{x}_Q|}$$

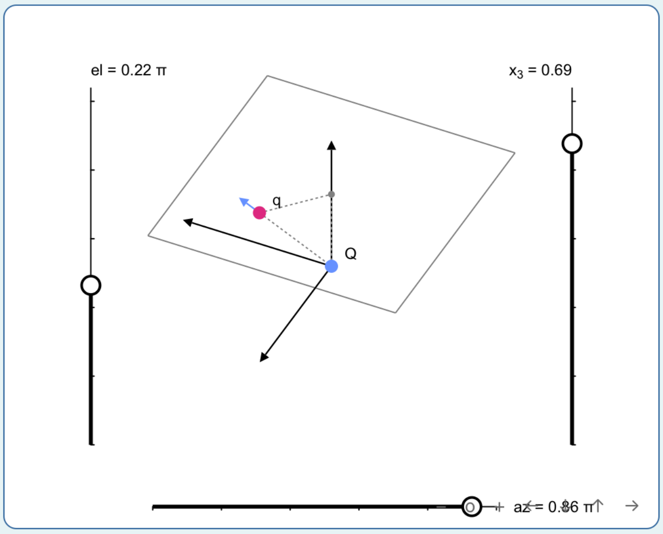
beschreibt die Kraft $\vec{F}$, die eine kugelsymmetrische Probeladung q im elektrischen Feld einer kugelsymmetrischen Ladung Q erfährt. Dabei bezeichne $\vec{x}_q$ die Postion der Probeladung q, $\vec{x}_Q$ die Position der Ladung Q und $\varepsilon_0 > 0$ die elektrische Feldkonstante. Im Folgenden wird angenommen, dass sich die Ladung Q am Koordinatenursprung befindet und damit $\vec{x}_Q = \vec{0}$ ist.

Zeigen Sie, dass die elektrische Arbeit

$$W = \int_0^1 \dot{\vec{c}}(t) \cdot \vec{F}(\vec{c}(t))\,\mathrm{d}t,$$

die aufgewendet werden muss, um die Probeladung q entlang einer auf dem Interval $[0,1]$ definierten Kurve $\vec{c}$ im elektrischen Feld zu verschieben, von dem Anfangspunkt $\vec{c}(0)$ und dem Endpunkt $\vec{c}(1)$, nicht aber von der Kurve $\vec{c}$ (bzw. deren Spur) abhängt. Gehen Sie dazu wie folgt vor.

Die folgende Abbildung zeigt die Probeladung q (Punkt ●), die Ladung Q (Punkt ●) und die auf q wirkende elektrische Feldkraft $\vec{F}$ als Vektorpfeil (Pfeil →) angeheftet an q in einem dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystem. Die Ladungen werden als gleichnamig angenommen, sodass $q\,Q > 0$ ist. Die Koordinatenachsen werden durch drei paarweise senkrechte Vektorpfeile angeheftet an Q dargestellt (Pfeile →).



(a) Bestimmen Sie das Skalarprodukt $\dot{\vec{c}}(t) \cdot \vec{F}(\vec{c}(t))$ und geben Sie es als Vielfaches von $\frac{Q\,q}{4\,\pi\,\varepsilon_0}$ in Abhängigkeit des euklidischen Abstands $r(t) = |\vec{c}(t)|$ von q und Q an. Geben Sie dazu gegebenenfalls $r(t)$ und $r'(t)$ als `r(t)` bzw. `diff(r(t),t)` ein.

Es ist $\dot{\vec{c}}(t) \cdot \vec{F}(\vec{c}(t)) = \frac{Q\,q}{4\,\pi\,\varepsilon_0}$ ______ .

(b) Bestimmen Sie die elektrische Arbeit W und geben Sie sie als Vielfaches von $\frac{Q\,q}{4\,\pi\,\varepsilon_0}$ in Abhängigkeit von $r(0)$ und $r(1)$ an.

Es ist $W = \frac{Q\,q}{4\,\pi\varepsilon_0}$ ______ .

Autor Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

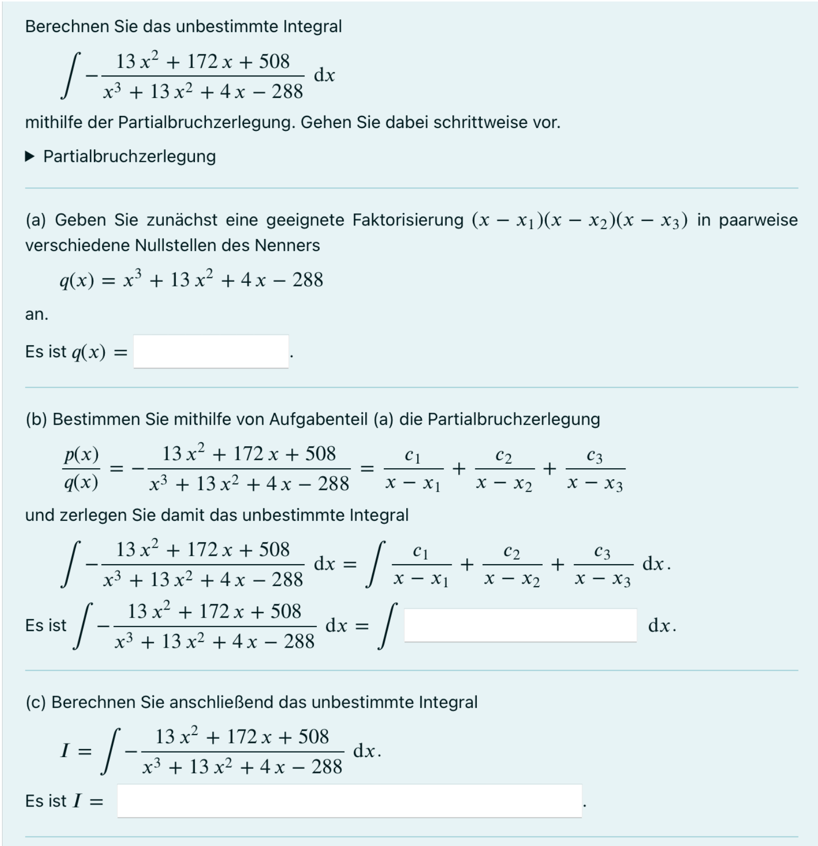
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll gezeigt werden, dass die elektrische Arbeit $$W = \int_0^1 \dot{c}(t) \cdot F(c(t))\, dt,$$ die aufgewendet wird, um eine Probeladung q entlang einer Kurve c in dem elektrischen Radialfeld einer Ladung Q zu verschieben, unabhängig von der Spur von $c([0,1])$ ist. In Aufgabenteil (a) soll dazu mithilfe des Coulomb-Gesetzes der Integrand $\dot{c}(t) \cdot F(c(t))$ in Abhängigkeit des Abstands von q und Q angegeben werden. In Aufgabenteil (b) soll das Integral bestimmt werden.
Verbotene Wörter	int, limit
Vorkenntnisse	Kurvenintegrale, Integration durch Substitution, Differential bilinearer Abbildungen
Randomisierung	keine
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

3.5.5 Integration durch Partialbruchzerlegung

3.5.5.1 Partialbruchzerlegung

Tags: Integral, Stammfunktion, Partialbruchzerlegung

Screenshot: (Stand 06.10.2024)



Berechnen Sie das unbestimmte Integral

$$\int -\frac{13\,x^2 + 172\,x + 508}{x^3 + 13\,x^2 + 4\,x - 288}\,\mathrm{d}x$$

mithilfe der Partialbruchzerlegung. Gehen Sie dabei schrittweise vor.

▶ Partialbruchzerlegung

(a) Geben Sie zunächst eine geeignete Faktorisierung $(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$ in paarweise verschiedene Nullstellen des Nenners

$$q(x) = x^3 + 13\,x^2 + 4\,x - 288$$

an.

Es ist $q(x) =$ ______ .

(b) Bestimmen Sie mithilfe von Aufgabenteil (a) die Partialbruchzerlegung

$$\frac{p(x)}{q(x)} = -\frac{13\,x^2 + 172\,x + 508}{x^3 + 13\,x^2 + 4\,x - 288} = \frac{c_1}{x - x_1} + \frac{c_2}{x - x_2} + \frac{c_3}{x - x_3}$$

und zerlegen Sie damit das unbestimmte Integral

$$\int -\frac{13\,x^2 + 172\,x + 508}{x^3 + 13\,x^2 + 4\,x - 288}\,\mathrm{d}x = \int \frac{c_1}{x - x_1} + \frac{c_2}{x - x_2} + \frac{c_3}{x - x_3}\,\mathrm{d}x.$$

Es ist $\int -\frac{13\,x^2 + 172\,x + 508}{x^3 + 13\,x^2 + 4\,x - 288}\,\mathrm{d}x = \int$ ______ $\mathrm{d}x$.

(c) Berechnen Sie anschließend das unbestimmte Integral

$$I = \int -\frac{13\,x^2 + 172\,x + 508}{x^3 + 13\,x^2 + 4\,x - 288}\,\mathrm{d}x.$$

Es ist $I =$ ______ .

Autor: Tim Inoue (Uni-DUE)

Idee: Tim Inoue

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: In dieser Aufgabe soll das unbestimmte Integral

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\,\mathrm{d}x$$

mithilfe der Partialbruchzerlegung bestimmt werden, wobei p und q Polynomfunktionen mit $\deg(p) < \deg(q)$ sind. In Aufgabenteil (a) soll zunächst der Nenner $q(x)$ geeignet in paarweise Nullstellen von q faktorisiert werden. In Aufgabenteil (b) soll das unbestimmte Integral anschließend mithilfe der Partialbruchzerlegung zerlegt werden. In Aufgabenteil (c) soll schließlich das unbestimmte Integral über $\frac{p}{q}$ anhand von (b) berechnet werden.

Vorkenntnisse: Partialbruchzerlegung, unbestimmte Integrale

Randomisierung: Die Polynomfunktionen p und q sind Produkte von Linearfaktoren mit randomisierten, ganzzahligen Nullstellen, sodass p und q teilerfremd sind.

Anpassung	Die Partialbruchzerlegung kann für eine erhöhte Schwierigkeit angepasst werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

3.5.6 Uneigentliche Integrale

3.5.6.1 Uneigentliches Integral (1)

Tags	Uneigentliches Integral, Stammfunktion, Parameter, Integral
Screenshot	(Stand 06.10.2024)

Gegeben ist die Funktion f mit

$$f\colon (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x^p}$$

wobei $p > 0$ anzunehmen ist. Bestimmen Sie, für welche $p \in \mathbb{R}$ das Integral

$$\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$$

existiert. Gehen Sie dazu wie folgt vor.

(a) Bestimmen Sie zunächst eine Stammfunktion F zu f, indem Sie das unbestimmte Integral

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

berechnen. Nehmen Sie dazu an, dass $p \neq 1$ gilt. Sie dürfen die Integrationskonstante C vernachlässigen.

Es ist $F(x) =$ ________.

(b) Geben Sie nun eine Stammfunktion F an, wenn $p = 1$ gilt. Sie dürfen erneut die Integrationskonstante C vernachlässigen.

Es ist $F(x) =$ ________.

(c) Für welche $p \in \mathbb{R}$ hat dann das uneigentliche Integral

$$I = \int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$$

einen endlichen Wert? Markieren Sie die richtige Antwort.

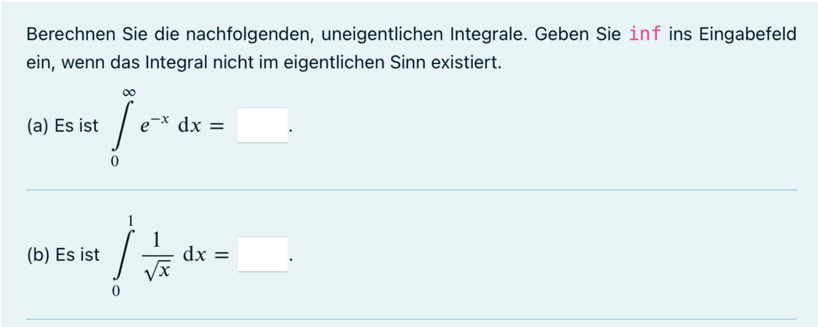
- Das uneigentliche Integral I hat für $p < 0$ einen endlichen Wert.
- Das uneigentliche Integral I hat für $p > 0$ einen endlichen Wert.
- Das uneigentliche Integral I hat für $p > 1$ einen endlichen Wert.
- Das uneigentliche Integral I hat für $p < 1$ einen endlichen Wert.
- Das uneigentliche Integral I hat für kein reelles p einen endlichen Wert.

Autor	Tim Inoue (Uni-DUE)
Idee	Tim Inoue
Lizenz	CC BY-SA 4.0

Thema	In dieser Aufgabe ist die Funktion f mit $$f\colon (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x^p}$$ für $p > 0$ gegeben. Es soll bestimmt werden, für welche $p \in \mathbb{R}$ das uneigentliche Integral $$\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$$ existiert. In Aufgabenteil (a) soll zunächst eine Stammfunktion F zu f für den Fall $p \neq 1$ berechnet werden. In Aufgabenteil (b) soll dann eine Stammfunktion F zu f für den Fall $p = 1$ angegeben werden. In Aufgabenteil (c) soll schließlich entschieden werden, für welche reelle Zahlen p dann das uneigentliche Integral $\int_1^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ einen endlichen Wert hat.
Vorkenntnisse	Uneigentliche Integrale, Grenzwerte
Randomisierung	keine
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

3.5.6.2 Uneigentliches Integral (2)

Tags	Uneigentliches Integral, Stammfunktion, Integral
Screenshot	(Stand 06.10.2024)


Berechnen Sie die nachfolgenden, uneigentlichen Integrale. Geben Sie inf ins Eingabefeld ein, wenn das Integral nicht im eigentlichen Sinn existiert.

(a) Es ist $\int\limits_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x =$.

(b) Es ist $\int\limits_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x =$.

Autor	Tim Inoue (Uni-DUE)
Idee	Tim Inoue
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In Aufgabenteil (a) soll das uneigentliche Integral $\int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x$ berechnet werden. In Aufgabenteil (b) soll das uneigentliche Integral $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ berechnet werden.
Vorkenntnisse	Uneigentliche Integrale, Grenzwerte
Randomisierung	keine
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

3.6 Gewöhnliche Differentialgleichungen

Die Aufgaben dieses Themenbereichs behandeln Grundlagen der gewöhnlichen Differentialgleichungen. Schwerpunkte der Aufgaben sind die Lösung elementarer linearer und nicht linearer Differentialgleichungen bis zu dritter Ordnung unter Anwendung von Lösungsmethoden, wie die Wahl geeigneter Ansätze und die Trennung der Variablen. Praxisnahe Aufgaben demonstrieren die Anwendung dieser Methoden auf physikalische und technische Problemstellungen.

Inhaltsverzeichnis

◀ ▲ ▶

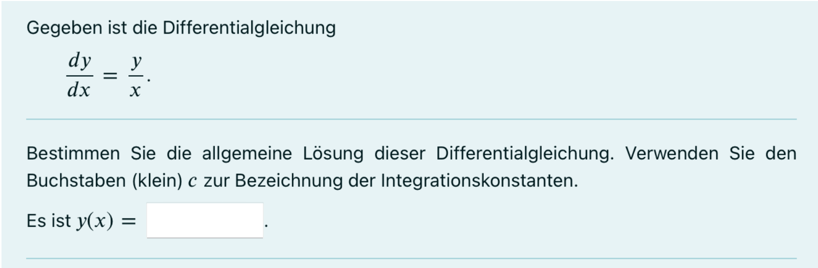
3.6.1 Lineare Differentialgleichungen

3.6.1.1 Lineare DGL 3. Ordnung

Tags	Differentialgleichung, DGL, linear, homogen, 3. Ordnung
Screenshot	(Stand 16.09.2024) Gegeben ist die lineare homogene Differentialgleichung 3. Ordnung $\left(\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3} y(x)\right) + 3\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} y(x)\right) - \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} y(x)\right) - 3\,y(x) = 0.$ Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung. Verwenden Sie dabei gegebenenfalls A, B und C als Vorfaktoren. Es ist $y(x) =$ ______ .
Autor	Emma van der Smagt (RUB)
Idee	Emma van der Smagt
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll die allgemeine Lösung $y(x)$ der Differentialgleichungen $$c_1\left(\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}x^3} y(x)\right) + c_2\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} y(x)\right) - c_1\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} y(x)\right) - c_2 y(x) = 0$$ bestimmt werden.
Verbotene Wörter	ode, desolve, atvalue, integrate
Vorkenntnisse	Lösen von linearen Differentialgleichungen mithilfe eines geeigneten Ansatzes
Randomisierung	Die Faktoren c_1 und c_2 mit $c_1 \in \{1,2\}$ und $c_2 \in \{1,2,...,5\}$ werden zufällig gewählt.
Anpassung	Die Faktoren c_1 und c_2 können als ganze Zahlen gewählt werden.
Sonderoption	Abzüge: 0 Feedback unterdrücken: nein

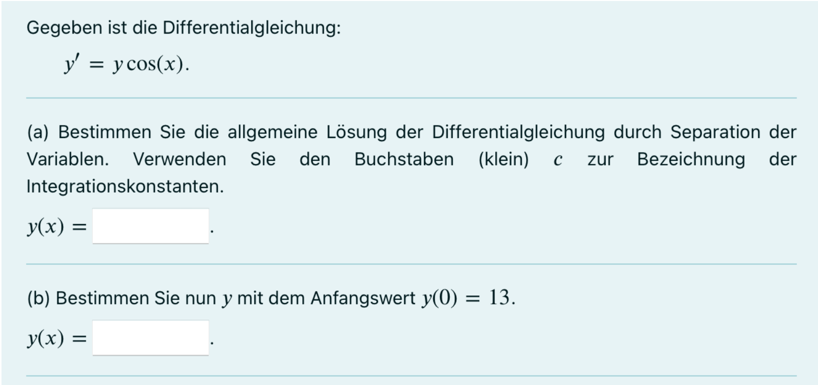
3.6.1.2 Lineare DGL 1. Ordnung mit Rationalem Koeffizienten

Tags	Differentialgleichung, DGL, linear, homogen, 1. Ordnung
Screenshot	(Stand 04.09.2024)



Autor	Emma van der Smagt (RUB)
Idee	Emma van der Smagt
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll die allgemeine Lösung $y(x)$ der Differentialgleichungen $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x}$$ bestimmt werden.
Verbotene Wörter	ode, desolve, atvalue, integrate
Vorkenntnisse	Lösen von linearen Differentialgleichungen durch geeignete Separation der Variablen
Randomisierung	keine
Anpassung	keine
Sonderoption	Abzüge: 0 Feedback unterdrücken: nein

3.6.1.3 Lineare DGL 1. Ordnung mit Trigonometrischem Koeffizienten

Tags	Differentialgleichung, DGL, linear, homogen, 1. Ordnung, Anfangsbedingung, Trennung der Variablen
Screenshot	(Stand 04.09.2024) 
Autor	Emma van der Smagt (RUB)
Idee	Emma van der Smagt
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll in Aufgabenteil (a) die allgemeine Lösung $y(x)$ der Differentialgleichung $$y' = y\cos(x)$$ bestimmt werden. In Aufgabenteil (b) soll dann $y(x)$ bei gegebenem Anfangswert von $y(0) = a$ bestimmt werden.
Verbotene Wörter	ode, desolve, atvalue, integrate
Vorkenntnisse	Lösen von linearen Differentialgleichungen durch geeignete Separation der Variablen
Randomisierung	Der Anfangswert a mit $a \in \{1, 2, ..., 19\}$ wird zufällig gewählt.
Anpassung	Der Anfangswert kann angepasst werden.
Sonderoption	Abzüge: 0 Feedback unterdrücken: nein

3.6.1.4 Lineare DGL 1. Ordnung mit Logarithmischem Koeffizienten

Tags	Differentialgleichungen, DGL, linear, homogen, 1. Ordnung, Trennung der Variablen.
Screenshot	(Stand 01.09.2024)

Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem:

$$x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y(x) = 2\ln(x)\,y(x) \quad \text{mit} \quad y(5) = 4 \quad \text{und} \quad x > 1.$$

Verwenden Sie `log(x)` für den natürlichen Logarithmus $\ln(x)$ und `%e^x` für die e-Funktion im Ergebnisfeld. Des Weiteren, geben Sie Brüche nicht in Dezimalform an.

(a) Berechnen Sie zuerst die allgemeine Lösungsfunktion $y(x)$. Verwenden Sie Großbuchstaben $A, B, \ldots$ für die in der Lösungsfunktion auftretende/n Konstante/n.

Es ist $y(x) =$ ______.

(b) Geben Sie nun die Lösungsfunktion $y_A(x)$ für das Anfangswertproblem an.

Es ist $y_A(x) =$ ______.

Autor	Michael Kubocz (RWTH)
Idee	Michael Kubocz
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll eine lineare homogene Differentialgleichung 1. Ordnung mit Anfangswert gelöst werden. In Aufgabenteil (a) wird die allgemeine Lösungsfunktion $y(x)$ berechnet und angegeben. In Aufgabenteil (b) wird mit Hilfe des Anfangswertes die Lösungsfunktion $y_A(x)$ berechnet und angegeben.
Verbotene Wörter	ode2, ic1.
Vorkenntnisse	Lösen von Differentialgleichungen
Randomisierung	Die Anfangswerte x_0, y_0 sind randomisiert.
Anpassung	Die Anfangswerte x_0, y_0 können angepasst werden.
Sonderoption	Abzüge: 0
	Feedback unterdrücken: ja

3.6.1.5 Seilrolle

Tags: Differentialgleichung, DGL, linear, homogen, 2. Ordnung

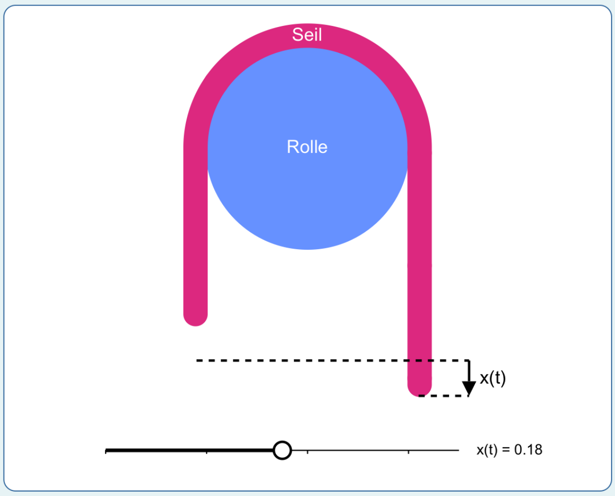
Screenshot: (Stand 16.09.2024)

Ein Seil der Masse m und Länge L rutscht nach rechts über eine Rolle zu Boden. Solange sich das Seil nicht von der Rolle gelöst hat, lässt sich die Position des Seils mithilfe der Auslenkung $x(t) > 0$ des rechten Seilendes gegenüber der Gleichgewichtslage mit $x(t) = 0$ beschreiben. Auf das Seil wirkt neben der Schwerkraft eine Reibungskraft an der Rolle, sodass die Bewegung durch

$$m\ddot{x} = mg\frac{2x}{L} - k\dot{x}$$

beschrieben werden kann. Dabei gilt für Schwerebeschleunigung $g > 0$ und für den Reibungskoeffizienten $k > 0$.

Die folgende Abbildung zeigt die beschriebene Situation. Mithilfe des Schieberegler lässt sich die Auslenkung $x(t)$ des rechten Seilendes gegenüber der Gleichgewichtslage variieren.



(a) Geben Sie die Dimension des Reibungskoeffizienten λ der Bewegungsgleichung an.

Es ist $[\lambda] =$ ____.

(b) Geben Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung an und benutzen Sie für die Vorfaktoren A und B.

Es ist $x(t) =$ ____.

Autor: Emma van der Smagt (RUB)

Idee: Emma van der Smagt

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: Die Bewegung eines Seils der Masse m und Länge L, das über eine Rolle rutscht, kann durch die Differentialgleichung

$$m\ddot{x} = mg\frac{2x}{L} - k\dot{x}$$

für die Auslenkung x des Seils gegenüber der Gleichgewichtslage beschrieben werden. In Aufgabenteil (a) soll die Dimension des Reibungskoeffizienten λ angegeben werden. In Aufgabenteil (b) soll die allgemeine Lösung der obigen Differentialgleichung bestimmt werden.

Verbotene Wörter: ode, desolve, atvalue, integrate

Vorkenntnisse	Lösen von linearen Differentialgleichungen mithilfe eines geeigneten Ansatzes
Randomisierung	keine
Anpassung	keine
Sonderoption	Abzüge: 0 Feedback unterdrücken: nein

3.6.1.6 Blutdruck

Tags: Differentialgleichung, DGL, linear, homogen, 1. Ordnung

Screenshot: (Stand 04.09.2024)

> Die Pumpbewegung des menschlichen Herzens lässt sich in zwei Phasen aufteilen, die abwechselnd stattfinden: Während der Systole, also der Herzkontraktion, wird Blut aus dem Herz über die Aorta in die Arterien gedrückt. Während der Diastole, also der Herzerweiterung, fließt das Blut zum Herz zurück.
>
> Wenn $V(t)$ das Volumen und $P(t)$ den Druck des Blutes in der Aorta zum Zeitpunkt t beschreibt, kann angenommen werden, dass für die diastolische Phase
>
> $$P(t) = \alpha V(t)$$
>
> mit $\alpha = \text{const}$ gilt und, dass die Volumenänderung durch
>
> $$\dot{V}(t) = -\frac{P(t)}{\rho}$$
>
> beschrieben werden kann. Hierbei ist ρ eine positive Konstante, die den Strömungswiderstand des Blutes beschreibt.
>
> ---
>
> Bestimmen Sie den zeitlichen Druckverlauf $P(t)$ während der diastolischen Phase, wenn zur Zeit $t = 0$
>
> $$P(0) = P_0$$
>
> gilt. Geben Sie dabei α, ρ und P_0 als `alpha`, `rho` und `P_0` ein.
>
> Es ist $P(t) =$ ______ .

Autor: Emma van der Smagt (RUB)

Idee: Emma van der Smagt

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: Während der diastolischen Phase der Pumpbewegung des menschlichen Herzens kann werden das Volumen $V(t)$ und der Druck $P(t)$ in der Aorta zum Zeitpunkt t beschrieben werden durch $P(t) = \alpha V(t)$ mit konstantem α und $\dot{V}(t) = -\frac{P(t)}{\rho}$. In dieser Aufgabe soll die durch diese Bedingungen beschriebene Differentialgleichung für den Druckverlauf $P(t)$ gelöst und eine allgemeine Lösung angegeben werden.

Verbotene Wörter: ode, desolve, atvalue, integrate

Vorkenntnisse: Lösen von linearen Differentialgleichungen mithilfe eines geeigneten Ansatzes

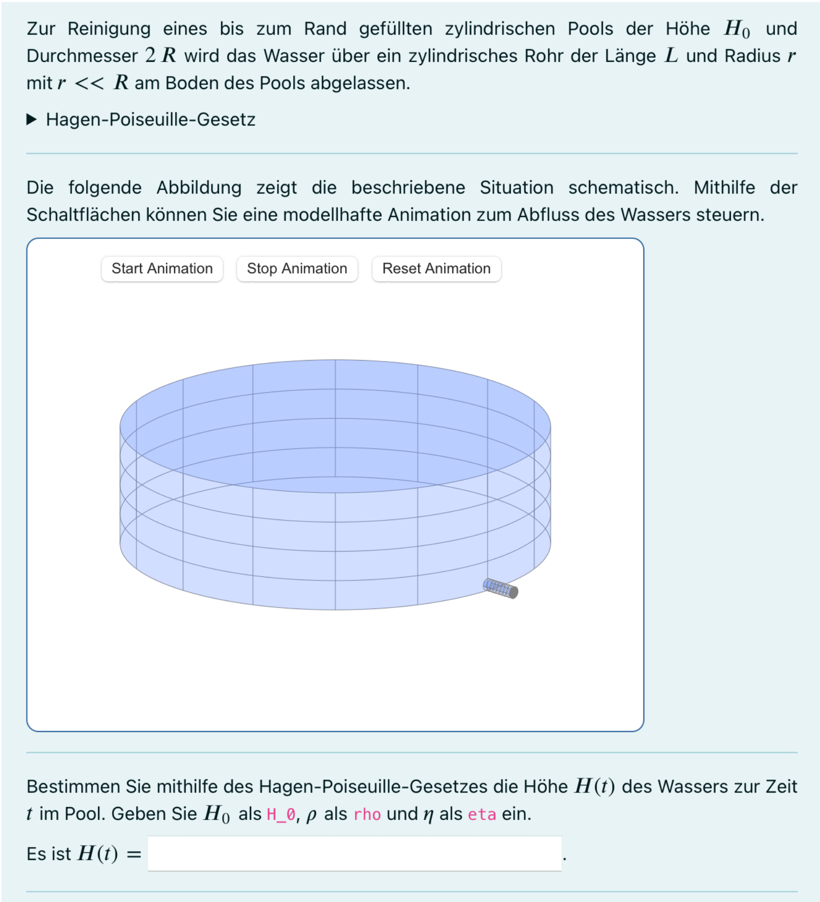
Randomisierung: keine

Anpassung: keine

Sonderoption: Abzüge: 0
Feedback unterdrücken: nein

3.6.1.7 Hagen-Poiseuille Gesetz (2)

Tags	Differentialgleichung, DGL, linear, homogen, 1. Ordnung
Screenshot	(Stand 04.09.2024)



Autor	Emma van der Smagt (RUB)
Idee	Emma van der Smagt
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	Zur Reinigung eines zylindrischen Pools wird das Wasser durch ein zylindrisches Rohr am Boden des Pools abgelassen. Der Volumenstrom V' des Wassers durch das Rohr und damit die dazu antiproportionale Volumenänderung $V'_{\text{Pool}} = -V'$ des Wassers im Pool lassen sich mithilfe des Hagen-Poiseuille-Gesetzes $$V' = \frac{\pi r^4}{8\eta L}\Delta p$$ beschreiben. Die den Volumenstrom V' bestimmende Druckdifferenz Δp zwischen Eingang und Ausgang des Rohrs hängt von der Füllhöhe H des Wassers im Pool ab. In dieser Aufgabe soll die durch das Hagen-Poiseuille-Gesetz gegebene Differentialgleichung für die Füllhöhe $H(t)$ gelöst und eine allgemeine Lösung angegeben werden.
Verbotene Wörter	ode, desolve, atvalue, integrate
Vorkenntnisse	Lösen von linearen Differentialgleichungen mithilfe eines geeigneten Ansatzes

Randomisierung	keine
Anpassung	keine
Sonderoption	Abzüge: 0
	Feedback unterdrücken: nein

3.6.2 Nichtlineare Differentialgleichungen

3.6.2.1 Homogene DGL 1. Ordnung mit Trigonometrischer Störung (1)

Tags: Differentialgleichungen, DGL, nichtlinear, 1. Ordnung, Trennung der Variablen

Screenshot: (Stand 01.09.2024)

Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y(x) = \frac{3\sin(x)}{y(x)} \quad \text{mit} \quad y(-\pi) = 4 \quad \text{und} \quad y(x) > 0.$$

Verwenden Sie `sqrt(x)` für $\sqrt{x}$ und `sin(x)` bzw. `cos(x)` für die trigonometrischen Funktionen im Ergebnisfeld. Des Weiteren, geben Sie Brüche nicht in Dezimalform an.

(a) Berechnen Sie zuerst die allgemeine Lösungsfunktion $y(x)$. Verwenden Sie Großbuchstaben $A, B, \dots$ für die in der Lösungsfunktion auftretende/n Konstante/n.

Es ist $y(x) =$ ______.

(b) Geben Sie nun die Lösungsfunktion $y_A(x)$ für das Anfangswertproblem an.

Es ist $y_A(x) =$ ______.

Autor: Michael Kubocz (RWTH)

Idee: Michael Kubocz

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: In dieser Aufgabe soll eine nichtlineare Differentialgleichung 1. Ordnung mit Anfangswert gelöst werden. In Aufgabenteil (a) wird die allgemeine Lösungsfunktion $y(x)$ berechnet und angegeben. In Aufgabenteil (b) wird mit Hilfe des Anfangswertes die Lösungsfunktion $y_A(x)$ berechnet und angegeben.

Verbotene Wörter: ode2, ic1.

Vorkenntnisse: Lösen von Differentialgleichungen

Randomisierung: Die Anfangswerte x_0, y_0 und der Vorfaktor des Bruchs auf der rechten Seite der DGL sind randomisiert.

Anpassung: Die Anfangswerte x_0, y_0 und der Vorfaktor des Bruchs auf der rechten Seite der DGL können angepasst werden.

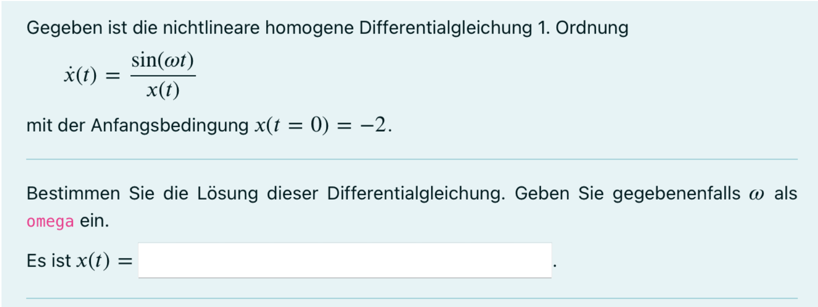
Sonderoption: Abzüge: 0

Feedback unterdrücken: ja

3.6.2.2 Homogene DGL 1. Ordnung mit Trigonometrischer Störung (2)

Tags: Differentialgleichung, DGL, nichtlinear, 1. Ordnung, Anfangsbedingung, Trennung der Variablen

Screenshot: (Stand 04.09.2024)



Autor: Emma van der Smagt (RUB)

Idee: Emma van der Smagt

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: In dieser Aufgabe soll die Lösung $x(t)$ der Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = \frac{\sin(\omega t)}{x(t)}$$

zu der Anfangsbedingung $x(t = 0) = -a$ bestimmt werden.

Verbotene Wörter: ode, desolve, atvalue, integrate

Vorkenntnisse: Lösen von nichtlinearen Differentialgleichungen mit Anfangswerten durch geeignete Separation der Variablen

Randomisierung: Der Anfangswert a mit $a \in \{-4, -3, -2, -1\}$ wird zufällig gewählt.

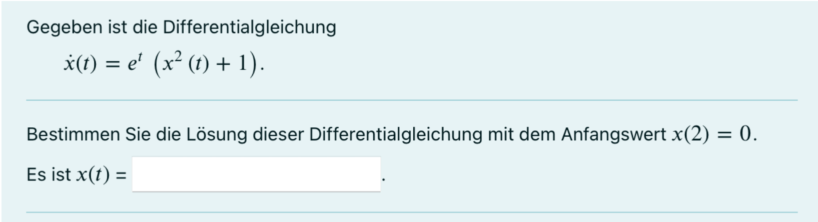
Anpassung: Der Anfangswert a kann als ganze Zahl gewählt werden.

Sonderoption: Abzüge: 0
Feedback unterdrücken: nein

3.6.2.3 DGL 1. Ordnung mit Quadratischen Term

Tags: Differentialgleichungen, DGL, nichtlinear, inhomogen, 1. Ordnung, Anfangsbedingung, Trennung der Variablen

Screenshot: (Stand 18.10.2023)



Autor: Emma van der Smagt (RUB)

Idee: Emma van der Smagt

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: In dieser Aufgabe soll die allgemeine Lösung $x(t)$ der Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = (t + 3)/x^2(t) + 1)$$

zu der Anfangsbedingung $x(t_0) = x_0$ bestimmt werden.

Verbotene Wörter: ode, desolve, atvalue, integrate

Vorkenntnisse: Lösen von nichtlinearen Differentialgleichungen durch geeignete Separation der Variablen

Randomisierung: Die Anfangswerte t_0 mit $t_0 \in \{1, 2, 3\}$ und x_0 mit $x_0 \in \{-1, 0, 1\}$ werden zufällig gewählt.

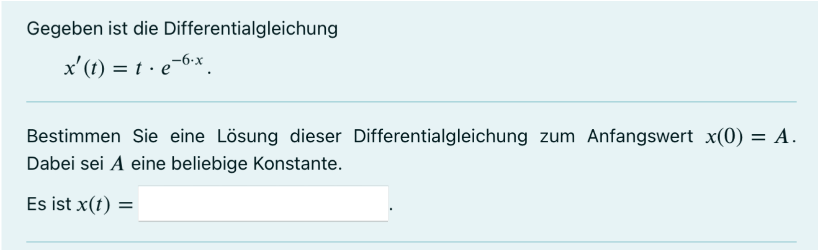
Anpassung: Die Anfangswert t_0 und x_0 können als ganze Zahlen gewählt werden.

Sonderoption: Abzüge: 0
Feedback unterdrücken: nein

3.6.2.4 DGL 1. Ordnung mit Exponentiellem Term

Tags: Differentialgleichung, DGL, nichtlinear, 1. Ordnung, Anfangsbedingung, Trennung der Variablen

Screenshot: (Stand 16.09.2024)


Gegeben ist die Differentialgleichung

$$x'(t) = t \cdot e^{-6 \cdot x}.$$

Bestimmen Sie eine Lösung dieser Differentialgleichung zum Anfangswert $x(0) = A$. Dabei sei A eine beliebige Konstante.

Es ist $x(t) =$.

Autor Jörg Härterich (RUB)
Emma van der Smagt (RUB)

Idee: Jörg Härterich
Emma van der Smagt

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: In dieser Aufgabe soll die Lösung $x(t)$ der Differentialgleichung

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x\, e^{-a\, y}$$

zu der Anfangsbedingung $y(x_0) = A$ bestimmt werden. Dabei ist a eine Konstante.

Verbotene Wörter: ode, desolve, atvalue, integrate

Vorkenntnisse: Lösen von nichtlinearen Differentialgleichungen mit Anfangswerten durch geeignete Separation der Variablen

Randomisierung: Der Anfangswert x_0 und die Konstante a werden zufällig gewählt mit $x_0 \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ und $a \in \{2, 4, 6\}$.

Anpassung: Der Anfangswert x_0 kann angepasst werden.

Sonderoption: Abzüge: 0
Feedback unterdrücken: nein

3.7 Taylor und Approximation von Funktionen

Die Aufgaben dieses Themenbereichs behandeln die Taylorreihe und die Approximation von Funktionen durch Taylorpolynome. Die Aufgaben umfassen neben der Bestimmung von Taylorreihen und -polynomen den Zusammenhang zwischen Restgliedern als Maß für die Genauigkeit einer Approximation.

Inhaltsverzeichnis

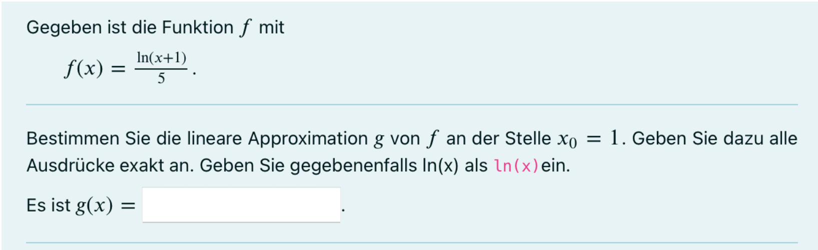
◄ ▲ ►

3.7.1 Lineare und Quadratische Approximationen

3.7.1.1 Lineare Approximation einer Logarithmischen Funktion

Tags — Funktionsbegriff, lineare Funktionen, Approximation

Screenshot — (Stand 06.10.2024)



Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = \frac{\ln(x+1)}{5}.$$

Bestimmen Sie die lineare Approximation g von f an der Stelle $x_0 = 1$. Geben Sie dazu alle Ausdrücke exakt an. Geben Sie gegebenenfalls ln(x) als `ln(x)` ein.

Es ist $g(x) =$ ______ .

Autor — Hakim Günther (WH)

Idee — Hakim Günther

Lizenz — CC BY-SA 4.0

Thema — In dieser Aufgabe soll die lineare Approximation für eine der Funktionen $\dfrac{\ln(x+p)}{q}$ oder $p \cdot \ln(x+q)$ aufgestellt werden.

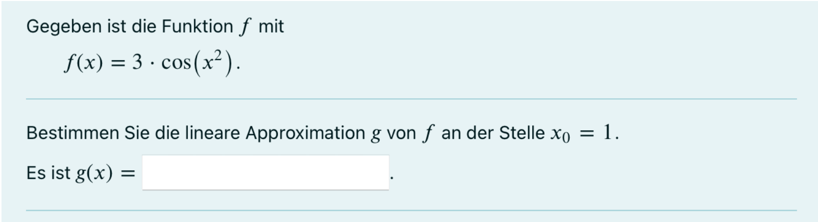
Vorkenntnisse — Funktionsbegriff, quadratische Funktionen, Termumformungen, Differentialrechnung

Randomisierung — Die zu approximierende Funktion wird zufällig ausgewählt. Hierbei sind jeweils zwei Parameter vorhanden die randomisiert werden. Dies hat keinen inhaltlichen Einfluss auf die Aufgabe.

Anpassung — keine

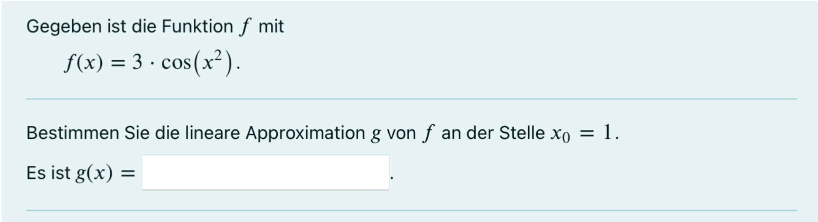
Sonderoption — Feedback unterdrücken: nein

3.7.1.2 Lineare Approximation einer Exponentiellen Funktion

Tags	Funktionsbegriff, lineare Funktionen, Approximation
Screenshot	(Stand 06.10.2024) 
Autor	Hakim Günther (WH)
Idee	Hakim Günther
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll die lineare Approximation für eine der Funktionen $p \cdot e^{q \cdot x}$ aufgestellt werden.
Vorkenntnisse	Funktionsbegriff, quadratische Funktionen, Termumformungen, Differentialrechnung
Randomisierung	Die zu approximierende Funktion wird zufällig ausgewählt. Hierbei sind jeweils zwei Parameter vorhanden die randomisiert werden. Dies hat keinen inhaltlichen Einfluss auf die Aufgabe.
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: nein

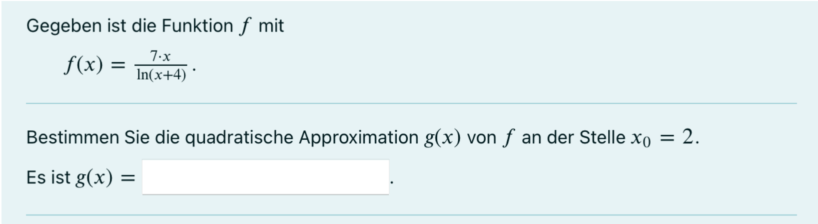
3.7.1.3 Lineare Approximation einer Trigonometrischen Funktion

Tags	Funktionsbegriff, lineare Funktionen, Approximation
Screenshot	(Stand 06.10.2024)



Autor	Hakim Günther (WH)
Idee	Hakim Günther
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll die lineare Approximation für eine der Funktionen $p \cdot \cos\left(x^2\right)$ aufgestellt werden.
Vorkenntnisse	Funktionsbegriff, quadratische Funktionen, Termumformungen, Differentialrechnung
Randomisierung	Die zu approximierende Funktion wird zufällig ausgewählt. Hierbei sind jeweils zwei Parameter vorhanden die randomisiert werden. Dies hat keinen inhaltlichen Einfluss auf die Aufgabe.
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: nein

3.7.1.4 Quadratische Approximation einer Logarithmischen Funktion

Tags	Funktionsbegriff, quadratische Funktionen, Approximation
Screenshot	(Stand 06.10.2024) 
Autor	Hakim Günther (WH)
Idee	Hakim Günther
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll die quadratische Approximation für eine der Funktionen $\frac{\ln(x)}{p} + \frac{x^3}{q}$ oder $\frac{p \cdot x}{\ln(q+x)}$ aufgestellt werden.
Vorkenntnisse	Funktionsbegriff, quadratische Funktionen, Termumformungen, Differentialrechnung
Randomisierung	Die zu approximierende Funktion wird zufällig ausgewählt. Hierbei sind jeweils zwei Parameter vorhanden die randomisiert werden. Dies hat keinen inhaltlichen Einfluss auf die Aufgabe.
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: nein

3.7.1.5 Lineare / Quadratische Approximation

Tags: Funktionsbegriff, quadratische Funktionen, Approximation

Screenshot: (Stand 06.10.2024)

> Gegeben ist die Funktion f mit
>
> $f(x) = \frac{x^3 \cdot \sin(x)}{18}$.
>
> (a) Bestimmen Sie die lineare Approximation g von f an der Stelle $x_0 = 1$. Geben Sie dazu alle Ausdrücke exakt an.
>
> Es ist $g(x) =$ ______ .
>
> (b) Bestimmen Sie die quadratische Approximation $h(x)$ von f an der Stelle $x_0 = 1$. Geben Sie dazu alle Ausdrücke exakt an.
>
> Es ist $h(x) =$ ______ .

Autor: Hakim Günther (WH)

Idee: Hakim Günther

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: In dieser Aufgabe soll die lineare und quadratische Approximation für die Funktion $\frac{\sin(x) \cdot x^3}{p \cdot q}$ aufgestellt werden.

Vorkenntnisse: Funktionsbegriff, quadratische Funktionen, Termumformungen, Differentialrechnung

Randomisierung: Die zu approximierende Funktion wird zufällig ausgewählt. Hierbei sind zwei Parameter vorhanden die randomisiert werden. Dies hat keinen inhaltlichen Einfluss auf die Aufgabe.

Anpassung: keine

Sonderoption: Feedback unterdrücken: nein

3.7.1.6 Lineare / Quadratische Approximation anhand von Funktionswerten

Tags: Funktionsbegriff, quadratische Funktionen

Screenshot: (Stand 06.10.2024)

Sei f eine zweimal differenzierbare Funktion mit

$f(2) = 5,$

$f'(2) = 8,$

$f''(2) = 8.$

(a) Bestimmen Sie für f und quadratische Approximation h an der Stelle $x_0 = 2$.

Es ist $g(x) =$ ______ .

(b) Bestimmen Sie für f eine quadratische Approximation h an der Stelle $x_0 = 2$.

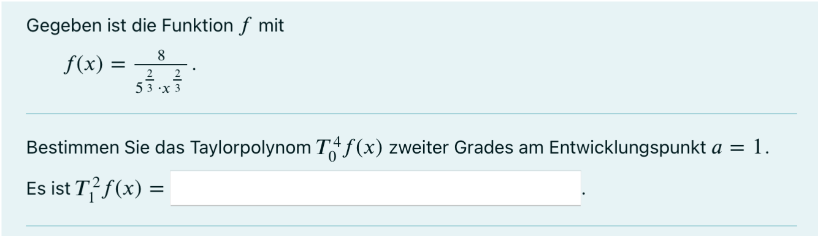
Es ist $h(x) =$ ______ .

Autor	Hakim Günther (WH)
Idee	Hakim Günther
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll die quadratische Approximation für eine gegebene Funktionswerte aufgestellt werden.
Vorkenntnisse	Funktionsbegriff, quadratische Funktionen, Termumformungen, Differentialrechnung
Randomisierung	Die zu Funktionswerte, der zu approximierenden Funktion, werden randomisiert. Dies hat keinen inhaltlichen Einfluss auf die Aufgabe.
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: nein

3.7.2 Taylorpolynom

3.7.2.1 Taylorpolynome 2. Grades

Tags	Funktionsbegriff, Approximation, Taylor, Taylorpolynom
Screenshot	(Stand 06.10.2024)



Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = \frac{8}{5^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{2}{3}}}.$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_0^4 f(x)$ zweiter Grades am Entwicklungspunkt $a = 1$.

Es ist $T_1^2 f(x) =$ ______ .

Autor	Hakim Günther (WH)
Idee	Hakim Günther
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll das Taylorpolynom zweiten Grades für die Funktion $\dfrac{p}{q \cdot x^{2/3}}$ aufgestellt werden.
Vorkenntnisse	Funktionsbegriff, Termumformungen, Differentialrechnung
Randomisierung	Zwei Parameter der Funktion werden randomisiert. Dies hat keinen inhaltlichen Einfluss auf die Aufgabe.
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: nein

3.7.2.2 Taylorpolynome 3. Grades (1)

Tags	Taylorpolynome.
Screenshot	(Stand 05.09.2024)

Bestimmen Sie das Taylorpolynom dritten Grades $T_3 f(x; x_0)$ der Funktion

$$f(x) = x^2 \exp\left\{\frac{1}{5}x^3\right\}$$

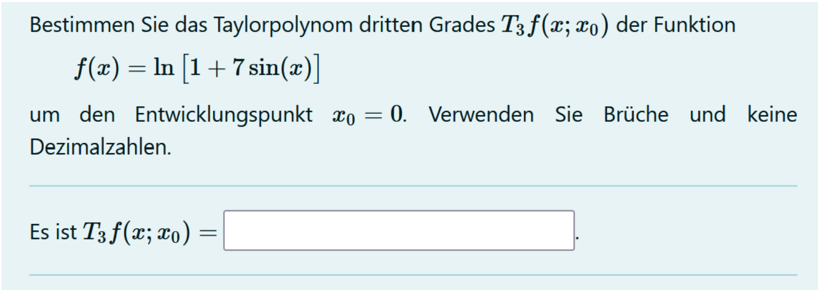
um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Verwenden Sie Brüche und keine Dezimalzahlen.

Es ist $T_3 f(x; x_0) =$ ______.

Autor	Michael Kubocz (RWTH)
Idee	Michael Kubocz
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	Die gegebene Funktion ist ein Produkt eines quadratischen Monoms mit einer e-Funktion. Es soll das Taylorpolynom dritten Grades $T_3 f(x; x_0)$ um den Entwicklungspunkt x_0 bestimmt werden.
Verbotene Wörter	powerseries, taylor.
Vorkenntnisse	Differentialrechnung, Produktregel, Taylorentwicklung, Taylorreihe, Landausymbole.
Randomisierung	Das Argument der e-Funktion wird randomisiert.
Anpassung	Vorfaktor des quadratischen Monoms kann randomisiert werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja.

3.7.2.3 Taylorpolynome 3. Grades (2)

Tags	Taylorpolynome.
Screenshot	(Stand 05.09.2024)



Autor	Michael Kubocz (RWTH)
Idee	Michael Kubocz
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	Die gegebene Funktion ist eine Komposition aus $\ln(x)$ und $\sin(x)$. Es soll das Taylorpolynom dritten Grades $T_3 f(x; x_0)$ um den Entwicklungspunkt x_0 bestimmt werden.
Verbotene Wörter	powerseries, taylor.
Vorkenntnisse	Differentialrechnung, Produktregel, Kettenregel, Taylorentwicklung, Taylorreihe, Landausymbole.
Randomisierung	Der Vorfaktor der Sinus-Funktion wird zufällig und als ganzzahlig gewählt.
Anpassung	Keine.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja.

3.7.2.4 Taylorpolynome 3. Grades (3)

Tags	Taylorpolynome.
Screenshot	(Stand 05.09.2024) Bestimmen Sie das Taylorpolynom dritten Grades $T_3 f(x; x_0)$ der Funktion $f(x) = \cos(x)\ \sin(4x)$ um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Verwenden Sie Brüche und keine Dezimalzahlen. Es ist $T_3 f(x; x_0) =$.
Autor	Michael Kubocz (RWTH)
Idee	Michael Kubocz
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	Die gegebene Funktion ist ein Produkt aus $\cos(x)$ und $\sin(x)$. Es soll das Taylorpolynom dritten Grades $T_3 f(x; x_0)$ um den Entwicklungspunkt x_0 bestimmt werden.
Verbotene Wörter	powerseries, taylor.
Vorkenntnisse	Differentialrechnung, Produktregel, Kettenregel, Taylorentwicklung, Taylorreihe.
Randomisierung	Der Vorfaktor des Arguments der Sinus-Funktion wird zufällig und als ganzzahlig gewählt.
Anpassung	Keine.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja.

3.7.2.5 Taylorpolynome 3. Grades (4)

Tags — Taylorpolynome.

Screenshot — (Stand 05.09.2024)

Bestimmen Sie das Taylorpolynom dritten Grades $T_3 f(x; x_0)$ der Funktion

$$f(x) = \sqrt{\frac{3}{4} + x^2}$$

um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Verwenden Sie `sqrt(x)` für $\sqrt{x}$ und geben Sie Brüche nicht in Dezimalform an.

Es ist $T_3 f(x; x_0) =$ __________.

Autor — Michael Kubocz (RWTH)

Idee — Michael Kubocz

Lizenz — CC BY-SA 4.0

Thema — Die gegebene Funktion ist eine Komposition aus $\sqrt{x}$ und einem Polynom zweiten Grades. Es soll das Taylorpolynom dritten Grades $T_3 f(x; x_0)$ um den Entwicklungspunkt x_0 bestimmt werden.

Verbotene Wörter — powerseries, taylor.

Vorkenntnisse — Differentialrechnung, Produktregel, Kettenregel, Taylorentwicklung, Taylorreihe.

Randomisierung — Das Monom nullten Grades wird zufällig gewählt.

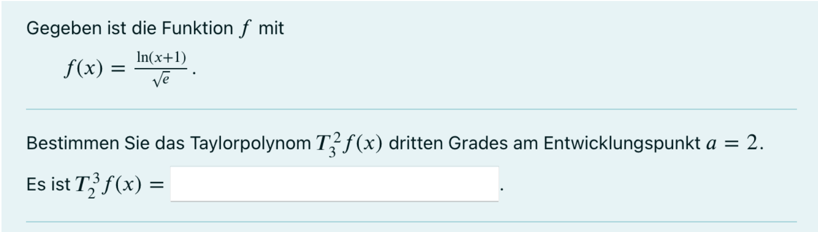
Anpassung — Keine.

Sonderoption — Feedback unterdrücken: ja.

3.7.2.6 Taylorpolynome 3. Grades (5)

Tags — Funktionsbegriff, Approximation, Taylor, Taylorpolynom

Screenshot — (Stand 06.10.2024)



Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{e}}.$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_3^2 f(x)$ dritten Grades am Entwicklungspunkt $a = 2$.

Es ist $T_2^3 f(x) =$ ______ .

Autor — Hakim Günther (WH)

Idee — Hakim Günther

Lizenz — CC BY-SA 4.0

Thema — In dieser Aufgabe soll das Taylorpolynom dritten Grades für die Funktion $\dfrac{\ln(x+q)}{e^{1/2}}$ aufgestellt werden.

Vorkenntnisse — Funktionsbegriff, Termumformungen, Differentialrechnung

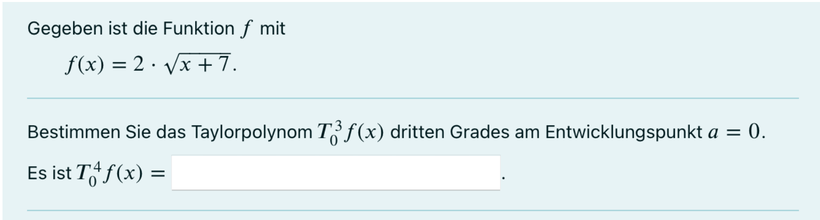
Randomisierung — Zwei Parameter der Funktion werden randomisiert. Dies hat keinen inhaltlichen Einfluss auf die Aufgabe.

Anpassung — keine

Sonderoption — Feedback unterdrücken: nein

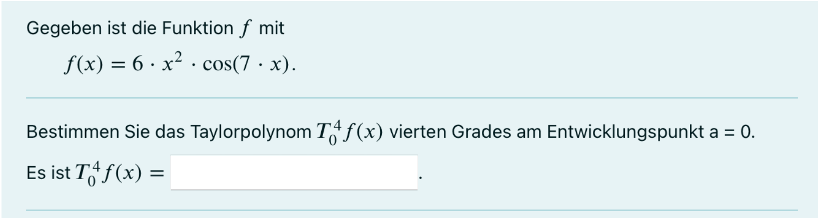
3.7.2.7 Taylorpolynome 3. Grades (6)

Tags	Funktionsbegriff, Approximation, Taylor, Taylorpolynom
Screenshot	(Stand 06.10.2024)



Autor	Hakim Günther (WH)
Idee	Hakim Günther
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll das Taylorpolynom dritten Grades für die Funktion $q \cdot \sqrt{(p+x)}$ aufgestellt werden.
Vorkenntnisse	Funktionsbegriff, Termumformungen, Differentialrechnung
Randomisierung	Zwei Parameter der Funktion werden randomisiert. Dies hat keinen inhaltlichen Einfluss auf die Aufgabe.
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: nein

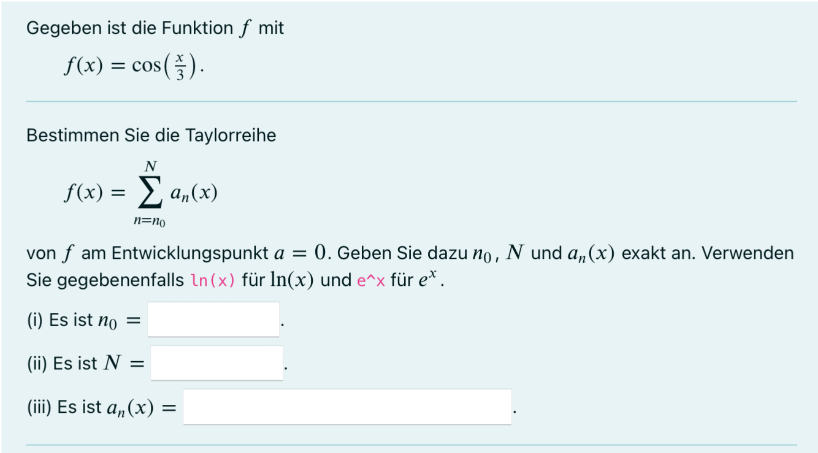
3.7.2.8 Taylorpolynome 4. Grades

Tags	Funktionsbegriff, Approximation, Taylor, Taylorpolynom
Screenshot	(Stand 06.10.2024) 
Autor	Hakim Günther (WH)
Idee	Hakim Günther
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll das Taylorpolynom vierter Grades für die Funktion $p \cdot x^2 \cdot \cos(q \cdot x)$ aufgestellt werden.
Vorkenntnisse	Funktionsbegriff, Termumformungen, Differentialrechnung
Randomisierung	Zwei Parameter der Funktion werden randomisiert. Dies hat keinen inhaltlichen Einfluss auf die Aufgabe.
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: nein

3.7.3 Taylorreihen

3.7.3.1 Taylorreihe (1)

Tags	Taylorreihe , Taylor, Reihen
Screenshot	(Stand 06.10.2024)


Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = \cos\left(\frac{x}{3}\right).$$

Bestimmen Sie die Taylorreihe

$$f(x) = \sum_{n=n_0}^{N} a_n(x)$$

von f am Entwicklungspunkt $a = 0$. Geben Sie dazu n_0, N und $a_n(x)$ exakt an. Verwenden Sie gegebenenfalls `ln(x)` für $\ln(x)$ und `e^x` für e^x.

(i) Es ist n_0 = .

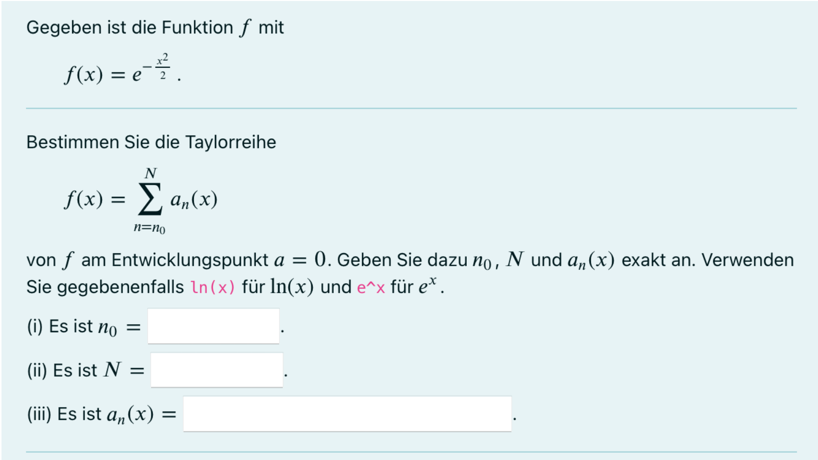
(ii) Es ist N = .

(iii) Es ist $a_n(x)$ = .

Autor	Hakim Günther (WH)
Idee	Hakim Günther
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll die Taylorreihe für die Funktion $\cos(x/p)$ bestimmt werden.
Vorkenntnisse	Funktionsbegriff, Termumformungen, Taylorpolynom, Differentialrechnung
Randomisierung	Der Parameter p, der Funktion wird randomisiert. Dies hat keinen inhaltlichen Einfluss auf die Aufgabe.
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: nein

3.7.3.2 Taylorreihe (2)

Tags	Taylorreihe , Taylor, Reihen
Screenshot	(Stand 06.10.2024)



Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}\,.$$

Bestimmen Sie die Taylorreihe

$$f(x) = \sum_{n=n_0}^{N} a_n(x)$$

von f am Entwicklungspunkt $a = 0$. Geben Sie dazu n_0, N und $a_n(x)$ exakt an. Verwenden Sie gegebenenfalls `ln(x)` für $\ln(x)$ und `e^x` für e^x.

(i) Es ist $n_0 =$ ______ .

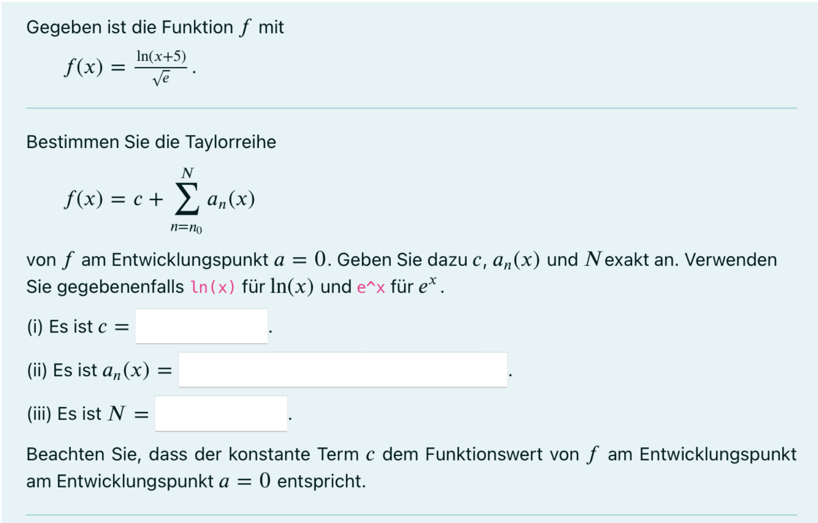
(ii) Es ist $N =$ ______ .

(iii) Es ist $a_n(x) =$ ______ .

Autor	Hakim Günther (WH)
Idee	Hakim Günther
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll die Taylorreihe für die Funktion $e^{-x^2/2}$ bestimmt werden.
Vorkenntnisse	Funktionsbegriff, Termumformungen, Taylorpolynom, Differentialrechnung
Randomisierung	keine
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: nein

3.7.3.3 Taylorreihe (3)

Tags	Taylorreihe , Taylor, Reihen
Screenshot	(Stand 06.10.2024)


Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = \frac{\ln(x+5)}{\sqrt{e}}.$$

Bestimmen Sie die Taylorreihe

$$f(x) = c + \sum_{n=n_0}^{N} a_n(x)$$

von f am Entwicklungspunkt $a = 0$. Geben Sie dazu c, $a_n(x)$ und N exakt an. Verwenden Sie gegebenenfalls `ln(x)` für $\ln(x)$ und `e^x` für e^x.

(i) Es ist $c =$.

(ii) Es ist $a_n(x) =$.

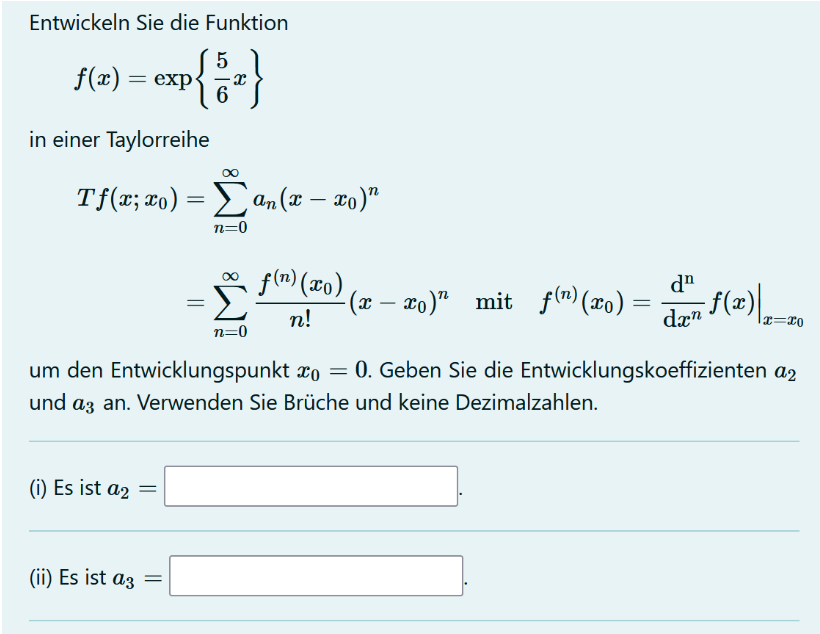
(iii) Es ist $N =$.

Beachten Sie, dass der konstante Term c dem Funktionswert von f am Entwicklungspunkt am Entwicklungspunkt $a = 0$ entspricht.

Autor	Hakim Günther (WH)
Idee	Hakim Günther
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll die Taylorreihe für die Funktion $\dfrac{\ln(x+q)}{e^{1/2}}$ bestimmt werden.
Vorkenntnisse	Funktionsbegriff, Termumformungen, Taylorpolynom, Differentialrechnung
Randomisierung	Der Parameter q, der Funktion wird randomisiert. Dies hat keinen inhaltlichen Einfluss auf die Aufgabe.
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: nein

3.7.3.4 Taylorreihe (4)

Tags	Taylorreihe, Entwicklungskoeffizienten.
Screenshot	(Stand 05.09.2024)



Entwickeln Sie die Funktion

$$f(x) = \exp\left\{\frac{5}{6}x\right\}$$

in einer Taylorreihe

$$Tf(x;x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n \quad \text{mit} \quad f^{(n)}(x_0) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} f(x)\Big|_{x=x_0}$$

um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Geben Sie die Entwicklungskoeffizienten a_2 und a_3 an. Verwenden Sie Brüche und keine Dezimalzahlen.

(i) Es ist $a_2 =$ ____.

(ii) Es ist $a_3 =$ ____.

Autor	Michael Kubocz (RWTH)
Idee	Michael Kubocz
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	Gegeben ist eine e-Funktion. Die Funktion soll in einer Taylorreihe entwickelt und Entwicklungskoeffizienten a_2 und a_3 berechnet und angegeben werden.
Verbotene Wörter	powerseries, taylor.
Vorkenntnisse	Differentialrechnung, Kettenregel, Taylorentwicklung, Taylorreihe.
Randomisierung	Das Argument der e-Funktion wird zufällig gewählt.
Anpassung	Keine.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja.

3.7.3.5 Taylorreihe (5)

Tags	Taylorreihe, Entwicklungskoeffizienten.
Screenshot	(Stand 05.09.2024)

Entwickeln Sie die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}x}$$

in einer Taylorreihe

$$Tf(x; x_0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n \quad \text{mit} \quad f^{(n)}(x_0) = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} f(x)\Big|_{x=x_0}$$

um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Geben Sie die Entwicklungskoeffizienten a_2 und a_3 an. Verwenden Sie Brüche und keine Dezimalzahlen.

(i) Es ist $a_2 =$ ______.

(ii) Es ist $a_3 =$ ______.

Autor	Michael Kubocz (RWTH)
Idee	Michael Kubocz
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	Gegeben ist eine einfache echt gebrochenrationale Funktion (Limes der endlichen geom. Reihe). Die Funktion soll in einer Taylorreihe entwickelt und Entwicklungskoeffizienten a_2 und a_3 berechnet und angegeben werden.
Verbotene Wörter	powerseries, taylor.
Vorkenntnisse	Differentialrechnung, Kettenregel, Taylorentwicklung, Taylorreihe.
Randomisierung	Der Vorfaktor des Monoms ersten Grades im Nenner wird zufällig gewählt.
Anpassung	Keine.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja.

3.7.4 Restgliedabschätzung

3.7.4.1 Restgliedabschätzung (1)

Tags	Taylorreihe , Taylor, Reihen
Screenshot	(Stand 23.03.2024)

Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = \frac{1}{x+7}.$$

Bestimmen Sie das Taylopolynom $T_0^3 f(x)$ dritten Grades von f am Entwicklungspunkt $a = 0$.

Es ist $T_0^3 f(x) =$ ____ .

Bestimmen Sie den maximalen Fehler $R(x_0; 0)$, den das Taylorpolynom $T_0^3 f(x)$ dritten Grades von f am Entwicklungspunkt $a = 0$ auf dem Intervall $[0; 1]$ annimmt.

Es ist $R(x_0; 0) =$ ____ .

Autor	Hakim Günther (WH)
Idee	Hakim Günther
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll das Taylorpolynom dritten Grades für die Funktion $\frac{1}{p+x}$ berechnet werden. Danach soll eine Restwertabschätzung auf dem Interval $[0; 1]$ gemacht werden.
Vorkenntnisse	Funktionsbegriff, Termumformungen, Taylorpolynom, Differentialrechnung
Randomisierung	Der Parameter p, der Funktion wird randomisiert. Dies hat keinen inhaltlichen Einfluss auf die Aufgabe.
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: nein

3.7.4.2 Restgliedabschätzung (2)

Tags: Taylorreihe , Taylor, Reihen

Screenshot: (Stand 23.03.2024)

Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = 8 \cdot e^{\frac{x}{2}}.$$

Bestimmen Sie das Taylopolynom $T_0^3 f(x)$ dritten Grades von f am Entwicklungspunkt $a = 0$.

Es ist $T_0^3 f(x) =$ ______.

Bestimmen Sie den maximalen Fehler $R(x_0; 0)$, den das Taylorpolynom $T_0^3 f(x)$ dritten Grades von f am Entwicklungspunkt $a = 0$ auf dem Intervall $[-1; 1]$ annimmt.

Es ist $R(x_0; 0) =$ ______.

Autor: Hakim Günther (WH)

Idee: Hakim Günther

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: In dieser Aufgabe soll das Taylorpolynom dritten Grades für die Funktion $p \cdot e^{\frac{1}{2x}}$ berechnet werden. Danach soll eine Restwertabschätzung auf dem Interval $[-1; 1]$ gemacht werden.

Vorkenntnisse: Funktionsbegriff, Termumformungen, Taylorpolynom, Differentialrechnung

Randomisierung: Der Parameter p, der Funktion wird randomisiert. Dies hat keinen inhaltlichen Einfluss auf die Aufgabe.

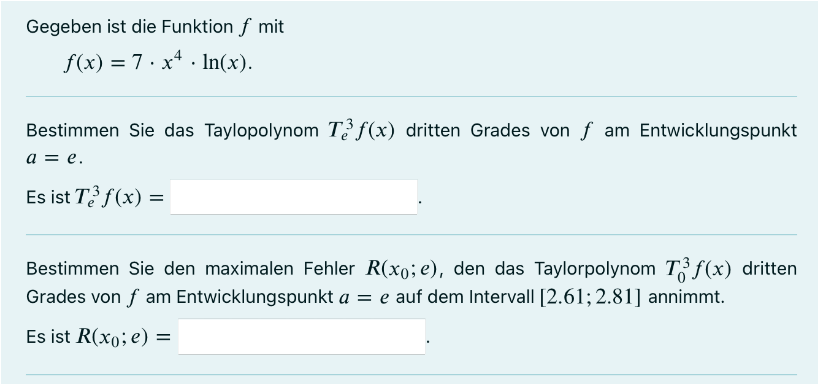
Anpassung: keine

Sonderoption: Feedback unterdrücken: nein

3.7.4.3 Restgliedabschätzung (3)

Tags Taylorreihe , Taylor, Reihen

Screenshot (Stand 23.03.2024)



Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = 7 \cdot x^4 \cdot \ln(x).$$

Bestimmen Sie das Taylopolynom $T_e^3 f(x)$ dritten Grades von f am Entwicklungspunkt $a = e$.

Es ist $T_e^3 f(x) =$.

Bestimmen Sie den maximalen Fehler $R(x_0; e)$, den das Taylorpolynom $T_0^3 f(x)$ dritten Grades von f am Entwicklungspunkt $a = e$ auf dem Intervall $[2.61; 2.81]$ annimmt.

Es ist $R(x_0; e) =$.

Autor Hakim Günther (WH)

Idee Hakim Günther

Lizenz CC BY-SA 4.0

Thema In dieser Aufgabe soll das Taylorpolynom dritten Grades für die Funktion $\ln(x) \cdot (px^4)$ berechnet werden. Danach soll eine Restwertabschätzung auf dem Interval $[2,61; 2,81]$ gemacht werden.

Vorkenntnisse Funktionsbegriff, Termumformungen, Taylorpolynom, Differentialrechnung

Randomisierung Der Parameter p, der Funktion wird randomisiert. Dies hat keinen inhaltlichen Einfluss auf die Aufgabe.

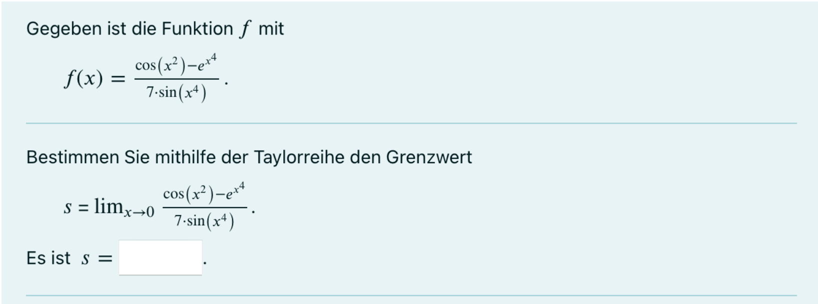
Anpassung keine

Sonderoption Feedback unterdrücken: nein

3.7.5 Grenzwerte und Taylorreihen

3.7.5.1 Grenzwerte (1)

Tags	Taylorreihe , Taylor, Reihen
Screenshot	(Stand 23.03.2024)



Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = \frac{\cos\left(x^2\right)-e^{x^4}}{7\cdot\sin\left(x^4\right)}.$$

Bestimmen Sie mithilfe der Taylorreihe den Grenzwert

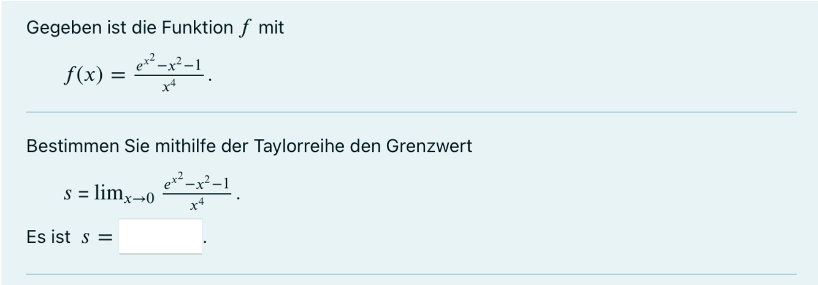
$$s = \lim_{x\to 0} \frac{\cos\left(x^2\right)-e^{x^4}}{7\cdot\sin\left(x^4\right)}.$$

Es ist $s =$.

Autor	Hakim Günther (WH)
Idee	Hakim Günther
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll der Grenzwert für die Funktion $\dfrac{\cos\left(x^2\right)e^{x^4}}{q\cdot\sin\left(x^4\right)}$ berechnet werden. Hierbei sollen die Studierende eine Taylorreihen verwenden.
Vorkenntnisse	Funktionsbegriff, Termumformungen, Taylorpolynom, Differentialrechnung
Randomisierung	Der Parameter q, der Funktion wird randomisiert. Dies hat keinen inhaltlichen Einfluss auf die Aufgabe.
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: nein

3.7.5.2 Grenzwerte (2)

Tags	Taylorreihe , Taylor, Reihen
Screenshot	(Stand 23.03.2024)


Gegeben ist die Funktion f mit

$$f(x) = \frac{e^{x^2} - x^2 - 1}{x^4}.$$

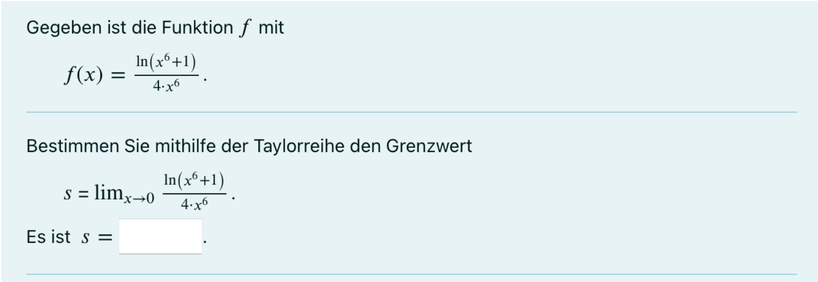
Bestimmen Sie mithilfe der Taylorreihe den Grenzwert

$$s = \lim_{x \to 0} \frac{e^{x^2} - x^2 - 1}{x^4}.$$

Es ist $s =$.

Autor	Hakim Günther (WH)
Idee	Hakim Günther
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll der Grenzwert für die Funktion $\frac{e^{x^q} - 1 - x^q}{x^{2q}}$ berechnet werden. Hierbei sollen die Studierende eine Taylorreihen verwenden.
Vorkenntnisse	Funktionsbegriff, Termumformungen, Taylorpolynom, Differentialrechnung
Randomisierung	Der Parameter q, der Funktion wird randomisiert. Dies hat keinen inhaltlichen Einfluss auf die Aufgabe.
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: nein

3.7.5.3 Grenzwerte (3)

Tags	Taylorreihe , Taylor, Reihen
Screenshot	(Stand 23.03.2024) 
Autor	Hakim Günther (WH)
Idee	Hakim Günther
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll der Grenzwert für die Funktion $\frac{\ln(1+x^p)}{q \cdot x^p}$ berechnet werden. Hierbei sollen die Studierende eine Taylorreihen verwenden.
Vorkenntnisse	Funktionsbegriff, Termumformungen, Taylorpolynom, Differentialrechnung
Randomisierung	Die Parameter q und p, der Funktion wird randomisiert. Dies hat keinen inhaltlichen Einfluss auf die Aufgabe.
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: nein

4 Grundlagen der Mehrdimensionalen Analysis

4.1 Grundbegriffe und Eigenschaften von Abbildungen

Die Aufgaben in diesem Themenbereich behandeln grundlegende Begriffe zu und Eigenschaften von mehrdimensionalen Abbildungen. Schwerpunkte sind die Angabe von Bildern und Urbildern von Mengen mithilfe von bestimmenden (Un-) Gleichungen und der Bestimmung des des maximalen Definitionsbereich unter anderem gebrochen rationaler Funktionen.

Inhaltsverzeichnis

◄ ▲ ►

4.1.1 Definitionsbereich

4.1.1.1 Definitionsbereich 1

Tags Definitionsbereich

Screenshot (Stand 24.03.2024)

Geben Sie bei den folgenden mehrdimensionalen Funktionen die Bedingungen für den maximalen Definitionsbereich an.

(a) Für die Funktion f mit,

$$f(x, y) = \frac{1}{5 - (2 \cdot x^2 + 1 \cdot y^2)}$$

geben Sie die Bedingung an, unter der ein Paar reeller Zahlen (x, y) im Definitionsbereich $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$ liegt. Geben Sie die Bedingung in der Form einer Ungleichung an.

$f(x, y) = \frac{1}{5 - (2 \cdot x^2 + 1 \cdot y^2)}$;

(b) Für die Funktion g mit,

$$g(x, y, z) = \sqrt{5 + 1 \cdot x - 1 \cdot y^2 - 1 \cdot z^2}$$

geben Sie die Bedingung an, die die untere Grenze von x im Definitionsbereich $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^3$ bestimmt, sodass der Ausdruck unter der Wurzel immer nicht-negativ ist.

$g(x, y, z) = \sqrt{5 + 1 \cdot x - 1 \cdot y^2 - 1 \cdot z^2}$;

(c) Für die Funktion h mit,

$$(x, y) = \ln(9 \cdot x - 4)$$

geben Sie die Bedingungen an, unter denen (x, y) im Definitionsbereich $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$ liegt, unter Berücksichtigung der Bedingungen für den Logarithmus.

$h(x, y) = \ln(9 \cdot x - 4) \cdot y$;

Bitte geben Sie Ihre Antworten in der Form von Ungleichungen an. Beachten Sie alle mathematischen Einschränkungen wie die Nichtnegativität unter der Wurzel, den Nenner ungleich Null und die Gültigkeit des Arguments für den Logarithmus. Brüche können in der Form a/b angegeben werden. Vermeiden Sie Fließkommazahlen.

Autor Hakim Günther (WH)

Idee Hakim Günther

Lizenz CC BY-SA 4.0

Thema In dieser Aufgaben soll die Bedingung für den Definitionsbereich für folgende Funktionen aufgestellt werden: $f(x, y) = \frac{1}{a - (b \cdot x^2 + c \cdot y^2)}$, $g(x, y, z) = \sqrt{d + e \cdot x - f \cdot y^2 - g \cdot z^2}$, und $h(x, y) = \ln(j \cdot x - h) \cdot y$.

Vorkenntnisse Funktionen

Randomisierung Die Parameter a, b, c, d, e, f, g, h und j werden randomisiert.

Anpassung Wertebereich der Randomisierung kann bedingt angepasst werden.

Sonderoption Feedback unterdrücken: ja

4.1.1.2 Definitionsbereich 2

Tags: Definitionsbereich

Screenshot: (Stand 23.03.2024)

> Geben Sie bei den folgenden mehrdimensionalen Funktionen die Bedingungen für den maximalen Definitionsbereich an:
>
> (a) Für die Funktion f mit,
>
> $$f(x, y, z) = \ln\left(\frac{8+3\cdot x^2}{3\cdot y^2+18\cdot\sqrt{z}} - 1\right)$$
>
> geben Sie die Bedingung an, die den Definitionsbereich $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^3$ bestimmt, sodass der Ausdruck im Logarithmus immer größer als 0 ist
>
> $f(x, y, z) = \ln\left(\frac{8+3\cdot x^2}{3\cdot y^2+18\cdot\sqrt{z}} - 1\right)$;
>
> (b) Für die Funktion g mit,
>
> $$g(x, y) = \frac{1}{|1\cdot x^3-2\cdot y^2|+2}$$
>
> bestimmen Sie die Bedingung, unter der ein Paar reeller Zahlen (x, y) im Definitionsbereich $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$ liegt. Berücksichtigen Sie dabei die Eigenschaften der absoluten Wertfunktion und den Nenner der Funktion, um zu gewährleisten, dass der Ausdruck immer positiv und nicht gleich null ist.
>
> $g(x, y) = \frac{1}{|1\cdot x^3-2\cdot y^2|+2}$;
>
> Bitte geben Sie Ihre Antworten in der Form von Ungleichungen an.

Autor	Hakim Günther (WH)
Idee	Hakim Günther
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgaben soll die Bedingung für den Definitionsbereich für folgende Funktionen aufgestellt werden: $f(x,y,z) = \ln\left(\frac{m+n\cdot x^2}{o\cdot y^2+p\cdot\sqrt{z}} - 1\right)$ und $g(x,y) = \frac{1}{\lvert q\cdot x^3-r\cdot y^2\rvert+s}$.
Vorkenntnisse	Funktionen
Randomisierung	Die Parameter $m, n.o, p, q, r$ und s werden randomisiert.
Anpassung	Wertebereich der Randomisierung kann angepasst werden.
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

4.2 Partielle und totale Ableitung

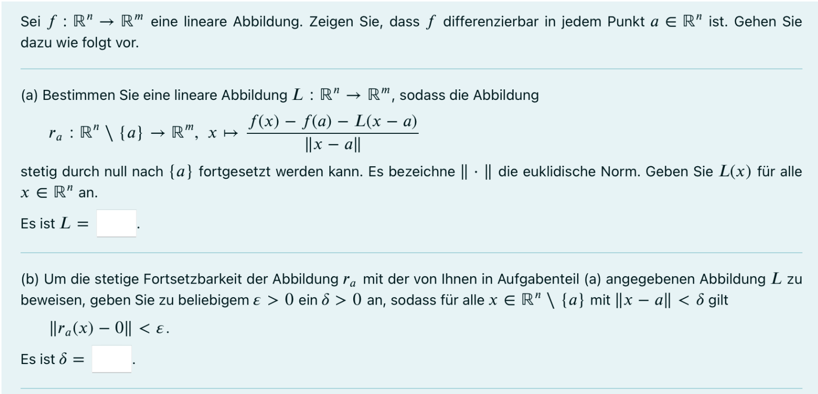
Die Aufgaben dieses Themenbereichs behandeln die grundlegenden Begriffe, Eigenschaften und Charakterisierungen der Differenzierbarkeit mehrdimensionaler Abbildungen. Zentrale Themen sind die partielle und totale Differenzierbarkeit, Richtungsableitungen, partielle Ableitungen, das Differential und dessen lokale Darstellung als Jacobimatrix, sowie der Gradient und die Divergenz von Vektorfeldern. Beispiele umfassen komponentenweise polynomielle, exponentielle, trigonometrische und logarithmische Abbildungen, iterierte Kompositionen und Parametrisierungen wie Zylinder- und Kugelkoordinaten.

Inhaltsverzeichnis

4.2.1 Differenzierbarkeit elementarer Abbildungen

4.2.1.1 Differenzierbarkeit linearer Abbildungen

Tags	Differential, Differenzierbarkeit, Lineare Abbildung
Screenshot	(Stand 29.07.2024)



Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass f differenzierbar in jedem Punkt $a \in \mathbb{R}^n$ ist. Gehen Sie dazu wie folgt vor.

(a) Bestimmen Sie eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, sodass die Abbildung

$$r_a : \mathbb{R}^n \setminus \{a\} \to \mathbb{R}^m,\ x \mapsto \frac{f(x) - f(a) - L(x-a)}{\|x-a\|}$$

stetig durch null nach $\{a\}$ fortgesetzt werden kann. Es bezeichne $\|\cdot\|$ die euklidische Norm. Geben Sie $L(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ an.

Es ist $L =$ ____.

(b) Um die stetige Fortsetzbarkeit der Abbildung r_a mit der von Ihnen in Aufgabenteil (a) angegebenen Abbildung L zu beweisen, geben Sie zu beliebigem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ an, sodass für alle $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{a\}$ mit $\|x - a\| < \delta$ gilt

$$\|r_a(x) - 0\| < \varepsilon.$$

Es ist $\delta =$ ____.

Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe soll die Differenzierbarkeit einer linearen Abbildung gezeigt und deren Differential bestimmt werden.
Vorkenntnisse	Kenntnis der Definition und der Charakterisierung der Differenzierbarkeit mehrdimensionaler Abbildungen
Randomisierung	keine
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

4.2.1.2 Differenzierbarkeit bilinearer Abbildungen

Tags Differential, Differenzierbarkeit, Bilineare Abbildung

Screenshot (Stand 29.07.2024)

Sei $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ eine bilineare Abbildung. Da f insbesondere stetig ist, existiert eine Konstante $c > 0$, sodass

$$\|f(x, y)\| \leq c \cdot \|(x, y)\|^2$$

für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ ist. Dabei bezeichne $\|\cdot\|$ die euklidische Norm. Zeigen Sie, dass f differenzierbar in jedem Punkt $(a, b) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ ist. Gehen Sie dazu wie folgt vor.

(a) Bestimmen Sie dazu eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$, sodass die Abbildung

$$r_{(a,b)} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \setminus \{(a, b)\} \to \mathbb{R}^l,\ (x, y) \mapsto \frac{f(x, y) - f(a, b) - L((x, y) - (a, b))}{\|(x, y) - (a, b)\|}$$

stetig durch null nach $\{(a, b)\}$ fortgesetzt werden kann. Geben Sie $L(x, y)$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ an.

Es ist $L(x, y) =$ ______ .

(b) Um die stetige Fortsetzbarkeit der Abbildung $r_{(a,b)}$ mit der von Ihnen in Aufgabenteil (a) angegebenen Abbildung L zu beweisen, geben Sie zu beliebigem $\varepsilon > 0$ ein und falls möglich das größte $\delta > 0$ an, sodass für alle $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \setminus \{(a, b)\}$ mit $\|(x, y) - (a, b)\| < \delta$ die Ungleichung

$$\|r_{(a,b)}(x, y) - 0\| < \varepsilon.$$

erfüllt ist. Geben Sie dabei ε als `epsilon` ein.

Es ist $\delta =$ ______ .

▸ Zur Forderung eines, falls möglich, größten $\delta > 0$

Autor Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz CC BY-SA 4.0

Thema In dieser Aufgabe soll die Differenzierbarkeit einer bilinearen Abbildung gezeigt und deren Differential bestimmt werden.

Vorkenntnisse Kenntnis der Definition und der Charakterisierung der Differenzierbarkeit mehrdimensionaler Abbildungen

Randomisierung keine

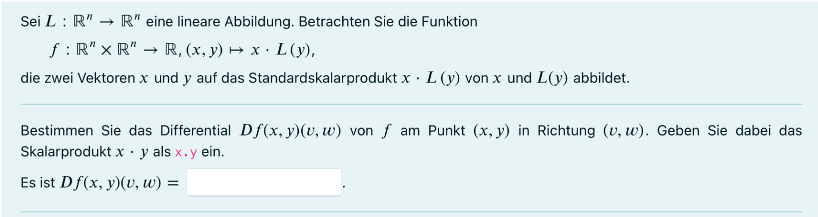
Anpassung keine

Sonderoption Feedback unterdrücken: ja

4.2.2 Differential elementarer Abbildungen

4.2.2.1 Differential einer bilinearen Abbildung (1)

Tags	Differential, Bilineare Abbildung
Screenshot	(Stand 29.07.2024)



Sei $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine lineare Abbildung. Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x \cdot L(y),$$

die zwei Vektoren x und y auf das Standardskalarprodukt $x \cdot L(y)$ von x und $L(y)$ abbildet.

Bestimmen Sie das Differential $Df(x, y)(v, w)$ von f am Punkt (x, y) in Richtung (v, w). Geben Sie dabei das Skalarprodukt $x \cdot y$ als `x.y` ein.

Es ist $Df(x, y)(v, w) =$ ______.

Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe wird das Differential einer bilinearen Abbildung $$f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \to (x, y) \mapsto x \cdot L(y)\,,$$ die den Punkt (x, y) auf das Standardskalarprodukt von x und $L(y)$ abbildet, bestimmt. Dabei ist $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine allgemeine lineare Abbildung.
Vorkenntnisse	Differential mehrdimensionaler Abbildungen, Differential bilinearer Abbildungen
Randomisierung	keine
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

4.2.2.2 Differential einer bilinearen Abbildung (2)

Tags: Differential, Bilineare Abbildung

Screenshot: (Stand 29.07.2024)

Sei $\{b_1, b_2\}$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^2$ bezüglich des Standardskalarprodukts und sei $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung mit

$$L(b_1) = 8\,b_2 + 7\,b_1,\quad L(b_2) = 9\,b_2 + 3\,b_1 .$$

Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x \cdot L(y),$$

die zwei Vektoren x und y auf das Standardskalarprodukt $x \cdot L(y)$ von x und $L(y)$ abbildet.

Bestimmen Sie das Differential $Df(b_1, b_2)(b_1, b_2)$ von f am Punkt (b_1, b_2) in Richtung (b_1, b_2).

Es ist $Df(b_1, b_2)(b_1, b_2) =$ ______ .

Autor: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: In dieser Aufgabe soll das Differential der bilinearen Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2, \to (x, y) \mapsto x \cdot L(y)\,,$$

bestimmt werden, die den Punkt (x, y) auf das Standardskalarprodukt von x und $L(y)$ abbildet. Die lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ist durch Angabe des Bildes einer bezüglich des Standardskalarprodukts orthonormalen Basis $\{b_1, b_2\}$ definiert. Die Koeffizienten a_{11}, a_{12}, a_{21} und a_{22} in den Linearkombinationen

$$L(b_1) = a_{11}\, b_1 + a_{21}\, b_2, \quad L(b_2) = a_{12}\, b_1 + a_{22}\, b_2$$

werden als paarweise verschiedene ganze Zahlen zwischen -9 und 9 gewählt. Das Differential von f soll ausgewertet an Punkten (b_i, b_j) in Richtung (b_k, b_l) mit $i \neq l$ und $j \neq k$ angegeben werden.

Vorkenntnisse: Differential mehrdimensionaler Abbildungen, Differential bilinearer Abbildungen

Randomisierung: Die Wahl der Koeffizienten a_{11}, a_{12}, a_{21} und a_{22} ist zufällig. Die Auswahl der Basisvektoren in den Argumenten des Differetials von f ist zufällig.

Anpassung: keine

Sonderoption: Feedback unterdrücken: ja

4.2.2.3 Differential einer quadratischen Abbildung

Tags	Differential, Gradient, quadratische Form
Screenshot	(Stand 29.07.2024) Sei $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine bezüglich des Standardskalarprodukts selbstadjungierte lineare Abbildung. Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto x \cdot L(x)$, die einen Vektor x auf das Standardskalarprodukt $x \cdot L(x)$ von x und $L(x)$ abbildet. (a) Bestimmen Sie das Differential $Df(x)(v)$ von f am Punkt x in Richtung v. Geben Sie dabei das Skalarprodukt $x \cdot y$ als `x.y` ein. Es ist $Df(x)(v) =$ ____ . (b) Bestimmen Sie den Gradienten $\operatorname{grad} f(x)$ von f am Punkt x. Es ist $\operatorname{grad} f(x) =$ ____ .
Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe wird das Differential einer quadratischen Abbildung bestimmt.
Vorkenntnisse	Differential mehrdimensionaler Abbildungen, Differential bilinearer Abbildungen
Randomisierung	keine
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

4.2.2.4 Differential der Matrixmultiplikation

Tags	Differential, Matrixmultiplikation
Screenshot	(Stand 29.07.2024)

Betrachten Sie die Abbildung

$f : \mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}, (A, B) \mapsto A \cdot B,$

die zwei $(n \times n)$-Matrizen A und B auf deren Matrixprodukt $A \cdot B$ abbildet. Bestimmen Sie das Differential $Df(A, B)(X, Y)$ von f am Punkt (A, B) in Richtung (X, Y). Geben Sie dabei das Matrixprodukt $A \cdot B$ als `A.B` ein.

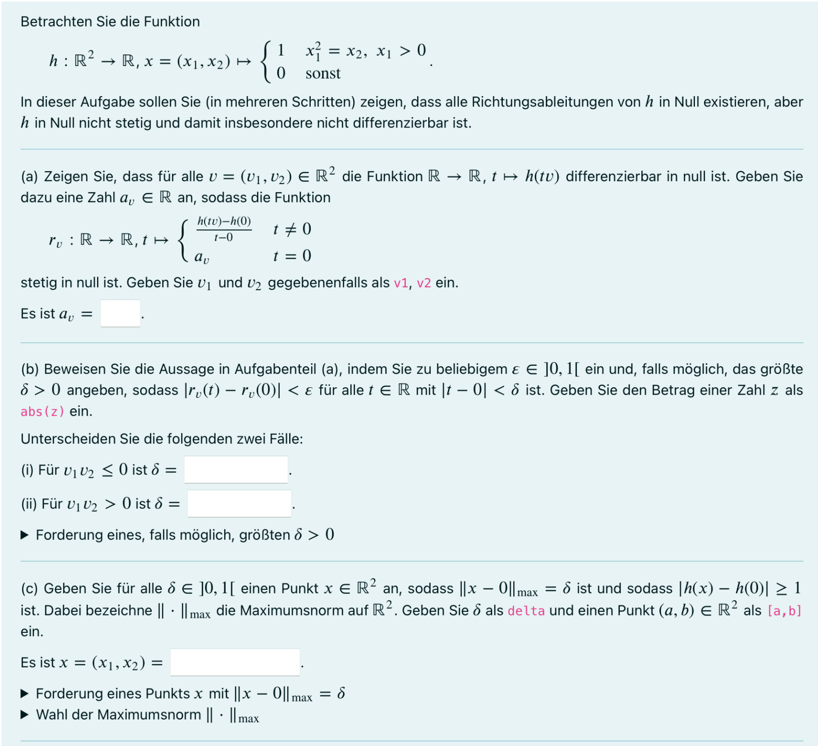
Es ist $Df(A, B)(X, Y) =$.

Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe wird das Differential der Matrixmultiplikation bestimmt.
Vorkenntnisse	Differentials mehrdimensionaler Abbildungen, Differential bilinearer Abbildungen
Randomisierung	keine
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

4.2.3 Richtungsableitung, Stetigkeit und Differenzierbarkeit

4.2.3.1 Richtungsableitung und Stetigkeit

Tags	Richtungsableitung, Stetigkeit
Screenshot	(Stand 29.07.2024)



Betrachten Sie die Funktion

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\, x = (x_1, x_2) \mapsto \begin{cases} 1 & x_1^2 = x_2,\; x_1 > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

In dieser Aufgabe sollen Sie (in mehreren Schritten) zeigen, dass alle Richtungsableitungen von h in Null existieren, aber h in Null nicht stetig und damit insbesondere nicht differenzierbar ist.

(a) Zeigen Sie, dass für alle $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R},\, t \mapsto h(tv)$ differenzierbar in null ist. Geben Sie dazu eine Zahl $a_v \in \mathbb{R}$ an, sodass die Funktion

$$r_v : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\, t \mapsto \begin{cases} \frac{h(tv)-h(0)}{t-0} & t \neq 0 \\ a_v & t = 0 \end{cases}$$

stetig in null ist. Geben Sie v_1 und v_2 gegebenenfalls als `v1`, `v2` ein.

Es ist $a_v =$ ___.

(b) Beweisen Sie die Aussage in Aufgabenteil (a), indem Sie zu beliebigem $\varepsilon \in \,]0,1[$ ein und, falls möglich, das größte $\delta > 0$ angeben, sodass $|r_v(t) - r_v(0)| < \varepsilon$ für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $|t - 0| < \delta$ ist. Geben Sie den Betrag einer Zahl z als `abs(z)` ein.

Unterscheiden Sie die folgenden zwei Fälle:

(i) Für $v_1 v_2 \leq 0$ ist $\delta =$ ___.

(ii) Für $v_1 v_2 > 0$ ist $\delta =$ ___.

▸ Forderung eines, falls möglich, größten $\delta > 0$

(c) Geben Sie für alle $\delta \in \,]0,1[$ einen Punkt $x \in \mathbb{R}^2$ an, sodass $\|x - 0\|_{\max} = \delta$ ist und sodass $|h(x) - h(0)| \geq 1$ ist. Dabei bezeichne $\|\cdot\|_{\max}$ die Maximumsnorm auf $\mathbb{R}^2$. Geben Sie δ als `delta` und einen Punkt $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ als `[a,b]` ein.

Es ist $x = (x_1, x_2) =$ ___.

▸ Forderung eines Punkts x mit $\|x - 0\|_{\max} = \delta$

▸ Wahl der Maximumsnorm $\|\cdot\|_{\max}$

Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe wird die Existenz aller Richtungsableitungen der Funktion $$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\; x = (x_1, x_2) \mapsto \begin{cases} 1 & x_1^2 = x_2,\, x_1 > 0 \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$ bewiesen. Weiterhin soll gezeigt werden, dass die Funktion nicht stetig in null ist.
Vorkenntnisse	Definition und Charakterisierung von Richtungsableitung, Stetigkeit bezüglich der euklidischen Norm und der Maximumsnorm
Randomisierung	Der Bezeichner der Funktion wird zufällig aus einer Liste von drei Bezeichnern ausgewählt. Dies hat keinen inhaltlichen Einfluss auf die Aufgabe.
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

4.2.3.2 Richtungsableitung und Differenzierbarkeit

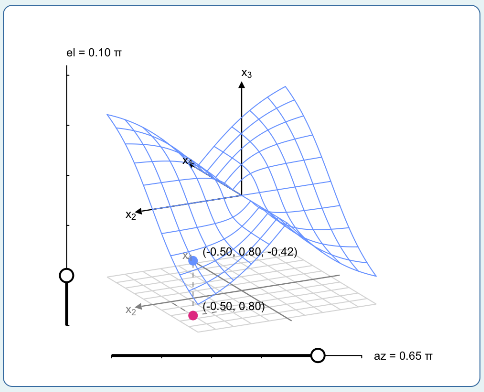
Tags	Richtungsableitung, Differenzierbarkeit
Screenshot	(Stand 29.07.2024)

Betrachten Sie die Funktion

$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, x = (x_1, x_2) \mapsto \begin{cases} \frac{x_1 |x_2|}{\|x\|} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$$

Dabei bezeichne $\|\cdot\|$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass alle Richtungsableitung von h in null existieren, obwohl h in null nicht differenzierbar ist.

Die folgende Abbildung zeigt den Graphen von h auf dem Einheitsquadrat $[-1, 1]^2$ in der x_1x_2-Ebene von $\mathbb{R}^3$ aufgezeichnet gegen die x_3-Achse (Graph ☐). Sie können das Funktionsargument in der x_1x_2-Ebene verschieben (Punkt ●). Der zugehörige Funktionswert unter h wird Ihnen durch Angabe des zugehörigen Punkts auf dem Graphen angezeigt (Punkt ●).



(a) Zeigen Sie, dass für alle $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto h(tv)$ differenzierbar in null ist. Geben Sie dazu eine Zahl $a_v \in \mathbb{R}$ an, sodass die Funktion

$$r_v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \begin{cases} \frac{h(tv)-h(0)}{t-0} & t \neq 0 \\ a_v & t = 0 \end{cases}$$

stetig in null ist. Geben Sie v_1 und v_2 als `v1`, `v2` und den Absolutbetrag einer Zahl z als `abs(z)` ein. Unterscheiden Sie dazu die folgenden beiden Fälle.

(ii) Für $v = 0$ ist $a_v =$ ______.

(ii) Für $v \neq 0$ ist $a_v =$ ______.

(b) Beweisen Sie die Aussagen in Aufgabenteil (a), indem Sie zu beliebigem $\varepsilon \in]0, 1[$ ein und, falls möglich, das größte $\delta > 0$ angeben, sodass $|r_v(t) - r_v(0)| < \varepsilon$ für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $|t - 0| < \delta$ ist. Unterscheiden Sie dazu die folgenden beiden Fälle.

(i) Für $v = 0$ ist $\delta =$ ______.

(ii) Für $v \neq 0$ ist $\delta =$ ______.

▶ Forderung eines, falls möglich, größten $\delta > 0$

(c) Beweisen oder widerlegen Sie mithilfe von Aufgabenteil (a), dass h differenzierbar in null ist. Vervollständigen Sie dazu den folgenden Lückentext.

Die Funktion h ist ______ differenzierbar in null, da die Funktion

$$\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, v \mapsto a_v$$

______ ______ ist.

Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0

Thema	In dieser Aufgabe wird die Existenz aller Richtungsableitungen der Funktion $$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ x = (x_1, x_2) \mapsto \begin{cases} \frac{x_1 \lvert x_2 \rvert}{\lVert x \rVert} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$ bewiesen. Anschließend wird mithilfe eines Lückentextes bewiesen, dass f in null nicht differenzierbar ist.
Vorkenntnisse	Definition und Charakterisierung von Richtungsableitung, Stetigkeit bezüglich der euklidischen Norm, Differential als lineare Approximation
Randomisierung	Der Bezeichner der Funktion wird zufällig aus einer Liste von drei Bezeichnern ausgewählt. Dies hat keinen Einfluss auf den Schwierigkeitsgrad der Aufgabe.
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

4.2.4 Partielle Ableitungen und Differenzierbarkeit

4.2.4.1 Partielle Ableitungen und Differenzierbarkeit (1/3)

Tags Differential, Richtungsableitung, partielle Ableitung

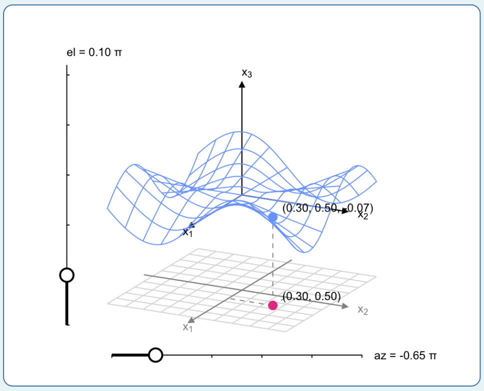
Screenshot (Stand 29.07.2024)

Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, x = (x_1, x_2) \mapsto \begin{cases} \frac{x_1^3 x_2 - x_1 x_2^3}{x_2^2 + x_1^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$$

Bestimmen Sie alle partiellen Ableitungen erster Ordnung von f. Gehen Sie dabei wie folgt vor.

Die folgende Abbildung zeigt den Graphen von f auf dem Einheitsquadrat $[-1,1]^2$ in der x_1x_2-Ebene von $\mathbb{R}^3$ aufgezeichnet gegen die x_3-Achse (Graph ▢). Sie können das Funktionsargument in der x_1x_2-Ebene verschieben (Punkt ●). Der zugehörige Funktionswert unter f wird Ihnen durch Angabe des zugehörigen Punkts auf dem Graphen angezeigt (Punkt ●).



(a) Zeigen Sie, dass für alle $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ die Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto f(tv)$ differenzierbar in null ist. Geben Sie dazu eine Zahl $a_v \in \mathbb{R}$ an, sodass die Funktion

$$r_v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, t \mapsto \begin{cases} \frac{f(tv) - f(0)}{t - 0} & t \neq 0 \\ a_v & t = 0 \end{cases}$$

stetig in null ist.

Es ist $a_v =$ ______ .

(b) Beweisen Sie die Aussage in Aufgabenteil (a), indem Sie zu beliebigem $\varepsilon \in]0,1[$ ein und, falls möglich, das größte $\delta > 0$ angeben, sodass $|r_v(t) - r_v(0)| < \varepsilon$ für alle $t \in \mathbb{R}$ mit $|t - 0| < \delta$ ist. Geben Sie ε als `epsilon` und ein die Komponenten v_1, v_2 von v als `v1`, `v2` ein.

(i) Für $v_1^3 v_2 = v_1 v_2^3$ ist $\delta =$ ______ .

(ii) Für $v_1^3 v_2 \neq v_1 v_2^3$ ist $\delta =$ ______ .

▶ Forderung eines, falls möglich, größten $\delta > 0$

(c) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen erster Ordnung von f am Punkt $x = (0,0) \in \mathbb{R}^2$.

Unterscheiden Sie die folgenden Fälle:

(i) Für $x = 0$ ist $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) =$ ______ .

(ii) Für $x = 0$ ist $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x) =$ ______ .

(d) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen erster Ordnung von f an Punkten $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

(i) Für $x \neq 0$ ist $\frac{\partial f}{\partial x_1}(x) =$ ______ .

(ii) Für $x \neq 0$ ist $\frac{\partial f}{\partial x_2}(x) =$ ______ .

Autor Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

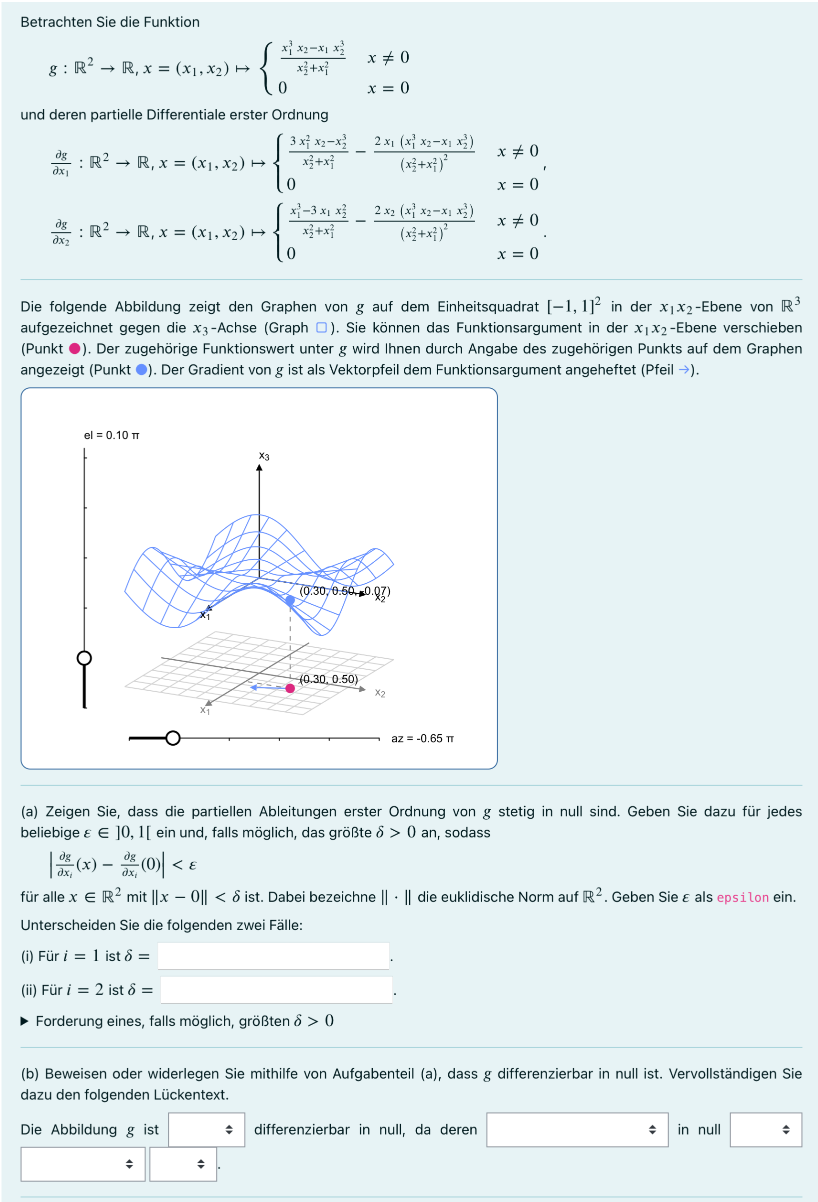
Idee Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz CC BY-SA 4.0

Thema	In dieser Aufgabe wird die Existenz aller Richtungsableitungen der Funktion $$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ x(x_1,x_2)\mapsto\begin{cases}\frac{x_1^3x_2-x_1y_2}{x_1^2+x_2^2} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$ in null bewiesen. Anschließend werden die partiellen Ableitungen in null und allen anderen Punkten mithilfe der Rechenregeln für partielle Ableitungen bestimmt.
Vorkenntnisse	Richtungsableitung, Kettenregel, Produktregel
Randomisierung	Der Bezeichner der Funktion f wird zufällig aus einer Liste von drei Bezeichnern ausgewählt. Dies hat keinen Einfluss auf den Schwierigkeitsgrad der Aufgabe.
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

4.2.4.2 Partielle Ableitungen und Differenzierbarkeit (2/3)

Tags	Differential, partielle Ableitung
Screenshot	(Stand 29.07.2024)



Betrachten Sie die Funktion

$$g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ x=(x_1,x_2)\mapsto\begin{cases}\frac{x_1^3\,x_2-x_1\,x_2^3}{x_2^2+x_1^2} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

und deren partielle Differentiale erster Ordnung

$$\frac{\partial g}{\partial x_1}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ x=(x_1,x_2)\mapsto\begin{cases}\frac{3\,x_1^2\,x_2-x_2^3}{x_2^2+x_1^2}-\frac{2\,x_1\,(x_1^3\,x_2-x_1\,x_2^3)}{(x_2^2+x_1^2)^2} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases},$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_2}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ x=(x_1,x_2)\mapsto\begin{cases}\frac{x_1^3-3\,x_1\,x_2^2}{x_2^2+x_1^2}-\frac{2\,x_2\,(x_1^3\,x_2-x_1\,x_2^3)}{(x_2^2+x_1^2)^2} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}.$$

Die folgende Abbildung zeigt den Graphen von g auf dem Einheitsquadrat $[-1,1]^2$ in der x_1x_2-Ebene von $\mathbb{R}^3$ aufgezeichnet gegen die x_3-Achse (Graph ☐). Sie können das Funktionsargument in der x_1x_2-Ebene verschieben (Punkt ●). Der zugehörige Funktionswert unter g wird Ihnen durch Angabe des zugehörigen Punkts auf dem Graphen angezeigt (Punkt ●). Der Gradient von g ist als Vektorpfeil dem Funktionsargument angeheftet (Pfeil →).

(a) Zeigen Sie, dass die partiellen Ableitungen erster Ordnung von g stetig in null sind. Geben Sie dazu für jedes beliebige $\varepsilon\in\,]0,1[$ ein und, falls möglich, das größte $\delta>0$ an, sodass

$$\left|\frac{\partial g}{\partial x_i}(x)-\frac{\partial g}{\partial x_i}(0)\right|<\varepsilon$$

für alle $x\in\mathbb{R}^2$ mit $\|x-0\|<\delta$ ist. Dabei bezeichne $\|\cdot\|$ die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^2$. Geben Sie ε als `epsilon` ein.

Unterscheiden Sie die folgenden zwei Fälle:

(i) Für $i=1$ ist $\delta=$ ________.

(ii) Für $i=2$ ist $\delta=$ ________.

▸ Forderung eines, falls möglich, größten $\delta>0$

(b) Beweisen oder widerlegen Sie mithilfe von Aufgabenteil (a), dass g differenzierbar in null ist. Vervollständigen Sie dazu den folgenden Lückentext.

Die Abbildung g ist ☐ differenzierbar in null, da deren ☐ in null ☐ ☐ ☐.

Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe wird die Stetigkeit aller Richtungsableitungen der Funktion

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ x(x_1,x_2)\mapsto\begin{cases}\frac{x_1^3x_2-x_1y_2}{x_1^2+x_2^2} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

in null bewiesen. Anschließend wird mithilfe eines Lückentextes bewiesen, dass f in null (stetig) differenzierbar ist.

Vorkenntnisse	Stetigkeit, Kriterium für Differenzierbarkeit in Abhängigkeit der Stetigkeit aller partiellen Ableitungen, ebene Polarkoordinaten
Randomisierung	Der Bezeichner der Funktion f wird zufällig aus einer Liste von drei Bezeichnern ausgewählt. Dies hat keinen Einfluss auf den Schwierigkeitsgrad der Aufgabe.
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

4.2.4.3 Partielle Ableitungen und Differenzierbarkeit (3/3)

Tags Differential, partielle Ableitung

Screenshot (Stand 29.07.2024)

Betrachten Sie die Funktion

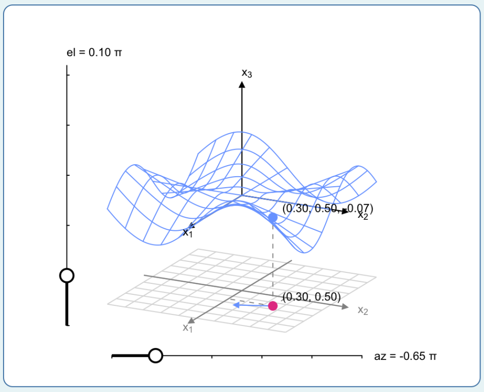
$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, x = (x_1, x_2) \mapsto \begin{cases} \frac{x_1^3\, x_2 - x_1\, x_2^3}{x_2^2 + x_1^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

und deren partielle Differentiale erster Ordnung

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, x = (x_1, x_2) \mapsto \begin{cases} \frac{3\, x_1^2\, x_2 - x_2^3}{x_2^2 + x_1^2} - \frac{2\, x_1\, \left(x_1^3\, x_2 - x_1\, x_2^3\right)}{\left(x_2^2 + x_1^2\right)^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, x = (x_1, x_2) \mapsto \begin{cases} \frac{x_1^3 - 3\, x_1\, x_2^2}{x_2^2 + x_1^2} - \frac{2\, x_2\, \left(x_1^3\, x_2 - x_1\, x_2^3\right)}{\left(x_2^2 + x_1^2\right)^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}.$$

Die folgende Abbildung zeigt den Graphen von f auf dem Einheitsquadrat $[-1, 1]^2$ in der $x_1 x_2$-Ebene von $\mathbb{R}^3$ aufgezeichnet gegen die x_3-Achse (Graph □). Sie können das Funktionsargument in der $x_1 x_2$-Ebene verschieben (Punkt ●). Der zugehörige Funktionswert unter f wird Ihnen durch Angabe des zugehörigen Punkts auf dem Graphen angezeigt (Punkt ●). Der Gradient von f ist als Vektorpfeil dem Funktionsargument angeheftet (Pfeil →).



(a) Bestimmen Sie die Komposition der partiellen Ableitung erster Ordnung von f in x_j mit der Kurve $c_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto te_i$ am Punkt $t \in \mathbb{R}$. Dabei bezeichne e_i den i-ten Standardbasisvektor von $\mathbb{R}^2$.

Unterscheiden Sie die folgenden vier Fälle:

(i) Es ist $\frac{\partial f}{\partial x_1} \circ c_1(t) =$ _____.

(ii) Es ist $\frac{\partial f}{\partial x_1} \circ c_2(t) =$ _____.

(iii) Es ist $\frac{\partial f}{\partial x_2} \circ c_1(t) =$ _____.

(iv) Es ist $\frac{\partial f}{\partial x_2} \circ c_2(t) =$ _____.

(b) Bestimmen Sie mithilfe von Aufgabenteil (a) die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von f an null.

Unterscheiden Sie die folgenden vier Fälle:

(i) Es ist $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(0, 0) =$ _____.

(ii) Es ist $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(0, 0) =$ _____.

(iii) Es ist $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(0, 0) =$ _____.

(iv) Es ist $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(0, 0) =$ _____.

(c) Beweisen oder widerlegen Sie mithilfe von Aufgabenteil (b), dass f zweimal differenzierbar in null ist. Vervollständigen Sie dazu den folgenden Lückentext.

Die Abbildung f ist _____ zweimal differenzierbar in null, da deren _____ in null _____ _____ _____.

Autor Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz CC BY-SA 4.0

Thema	In dieser Aufgabe werden die zweiten partiellen Ableitungen der Funktion $$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ x(x_1, x_2) \mapsto \begin{cases} \frac{x_1^3 x_2 - x_1 y_2}{x_1^2 + x_2^2} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$ in null als Richtungsableitungen der ersten partiellen Ableitung bestimmt. Anschließend wird mithilfe eines Lückentextes widerlegt, dass f in null zweimal differenzierbar ist.
Vorkenntnisse	Satz von Schwarz, Eigenschaften der Hessematrix, partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung, Richtungsableitung
Randomisierung	Der Bezeichner der Funktion f wird zufällig aus einer Liste von drei Bezeichnern ausgewählt. Dies hat keinen Einfluss auf den Schwierigkeitsgrad der Aufgabe.
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

4.2.4.4 Allgemeine Gasgleichung 2

Tags: Differenzierbarkeit, partielle Ableitung

Screenshot: (Stand 29.07.2024)

Die Allgemeine Gasgleichung (oder Zustandsgleichung idealer Gase)

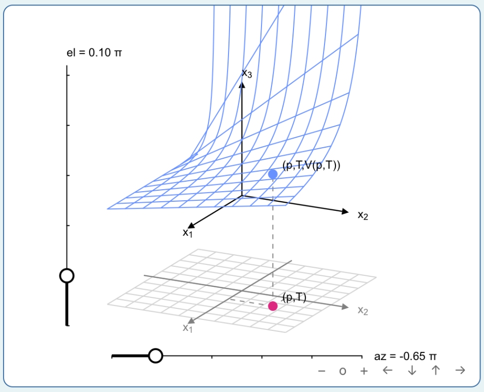
$$V = \frac{R\,T\,n}{p}$$

beschreibt, welches Volumen V ein ideales Gas der Stoffmenge n bei einer Temperatur T und einem Druck p einnimmt. Dabei bezeichne R die allgemeine Gaskonstante. Untersuchen Sie V als Funktion

$$V : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R},\, (p, T) \mapsto \frac{R\,T\,n}{p}$$

von p und T für Konstanten $n,\ R > 0$.

Die folgende Abbildung zeigt exemplarisch den Graphen von V (Graph □) über einem Quadrat des Definitionsbereichs als Teilmenge der x_1x_2-Ebene von $\mathbb{R}^3$ aufgezeichnet gegen die x_3-Achse. Sie können das Funktionsargument in der x_1x_2-Ebene verschieben (Punkt ●). Der zugehörige Funktionswert unter V wird Ihnen durch Angabe des zugehörigen Punkts auf dem Graphen angezeigt (Punkt ●).



(a) Es ist V partiell differenzierbar. Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen erster Ordnung von V an dem Punkt $(p, T) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$.

(i) Es ist $\frac{\partial V}{\partial p}(p, T) =$

(ii) Es ist $\frac{\partial V}{\partial T}(p, T) =$

(c) Begründen Sie mithilfe von Aufgabenteil (a), dass V differenzierbar in jedem Punkt $(p, T) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ ist. Vervollständigen Sie dazu den folgenden Satz, indem Sie einen geeigneten Satzteil aus den vier angegebenen Satzteilen auswählen.

Es ist V differenzierbar in jedem Punkt $(p, T) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, denn alle partiellen Ableitungen erster Ordnung von V existieren und sind ...

- symmetrisch.
- positiv homogen von Ordnung 1.
- stetig.
- antisymmetrisch.

Autor: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: In dieser Aufgabe wird das durch die Allgemeine Gasgleichung

$$V = \frac{R\,T\,n}{p}$$

beschriebene Volumen V als Funktion von Druck p und Temperatur T untersucht. In Aufgabenteil (a) sollen die partiellen Ableitungen erster Ordnung bestimmt werden. In Aufgabenteil (b) soll durch Ergänzen eines Lückentextes begründet werden, dass V stetig differenzierbar in jedem Punkt des Definitionsbereichs ist.

Vorkenntnisse: Richtungsableitungen, Kriterium für die Differenzierbarkeit einer Abbildung

Randomisierung	keine
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja
Bemerkung	Aufgabe 1.1.2.2 behandelt ebenfalls die Allgemeine Gasgleichung im Themenfeld von Äquivalenzumformungen von Gleichungen.

4.2.5 Berechnung von partiellen Ableitungen

4.2.5.1 Partielle Ableitungen 1. und 2. Ordnung (1)

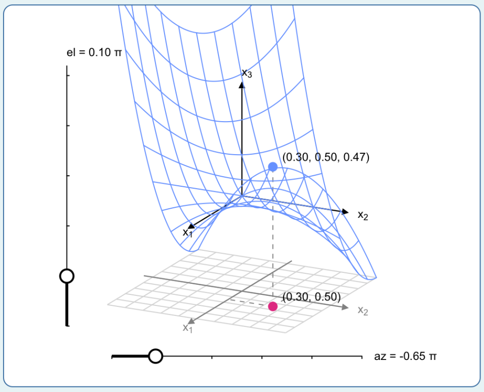
Tags — Richtungsableitung, partielle Ableitung

Screenshot — (Stand 29.07.2024)

Betrachten Sie die Funktion

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x\,y^2 + x^2 + x.$

Die folgende Abbildung zeigt den Graphen von f auf dem Einheitsquadrat $[-1, 1]^2$ in der x_1x_2-Ebene von $\mathbb{R}^3$ aufgezeichnet gegen die x_3-Achse (Graph ▢). Sie können das Funktionsargument in der x_1x_2-Ebene verschieben (Punkt ●). Der zugehörige Funktionswert unter f wird Ihnen durch Angabe des zugehörigen Punkts auf dem Graphen angezeigt (Punkt ●).



(a) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen erster Ordnung von f an allen Punkten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, an denen sie existieren.

(i) Es ist $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) =$ ________ .

(ii) Es ist $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) =$ ________ .

(b) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von f an allen Punkten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, an denen sie existieren.

(i) Es ist $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) =$ ________ .

(ii) Es ist $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) =$ ________ .

(iii) Es ist $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) =$ ________ .

Autor — Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee — Jörg Härterich
Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz — CC BY-SA 4.0

Thema — In dieser Aufgabe sollen die partiellen Ableitungen der ersten und zweiten Ordnung einer reellen rationale Funktion f dritter Ordnung in zwei Veränderlichen x und y mithilfe der Produkt- und Kettenregel bestimmt werden. Die Funktion f ist von der Form

$$f(x, y) = a_3\,x^{b_1}\,y^{b_2} + a_2\,x^{c_{21}}\,y^{c_{22}} + a_1\,x^{c_{11}}\,y^{c_{12}},$$

wobei $a_i \in \{-1, +1\}$, $b_j \in \mathbb{N}$ und $c_{ij} \in \mathbb{N}_0$ mit

$$b_1 + b_2 = 3 \quad \text{und} \quad c_{i1} + c_{i2} = i$$

für alle $i \in \{1, 2, 3\}$ und alle $j \in \{1, 2\}$ gewählt werden. Aufgrund der Wahl von b_1 und b_2 ist das Monom dritten Grades stets bivariat.

Vorkenntnisse — Partielle Ableitung, Ableiten von rationalen Funktionen

Randomisierung	Die Koeffizienten a_1, a_2, a_3 und die Exponenten b_1, b_2, $c_{11}, c_2 12, c_{21}, c_{22}$ werden zufällig ausgewählt.
Anpassung	Die Koeffizienten und Exponenten können angepasst werden. Überprüfen Sie gegebenenfalls die Darstellung des zugehörigen Funktionsgraphen. Bitte verwenden Sie für die Anpassung dieser Aufgabe nur den Moodle-Texteditor (siehe Empfohlener Editor).
Verbotene Wörter	diff, diffx
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

4.2.5.2 Partielle Ableitungen 1. und 2. Ordnung (2)

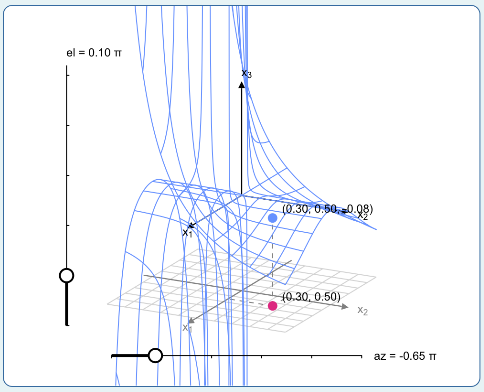
Tags	Richtungsableitung, partielle Ableitung
Screenshot	(Stand 29.07.2024)

Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{D}_f \to \mathbb{R},\, (x, y) \mapsto -\frac{x^2\, y}{y+x^2}$$

auf ihrem maximalen Definitionsbereich $\mathbb{D}_f \subset \mathbb{R}^2$.

Die folgende Abbildung zeigt den Graphen von f auf dem Einheitsquadrat $[-1, 1]^2$ in der x_1x_2-Ebene von $\mathbb{R}^3$ aufgezeichnet gegen die x_3-Achse (Graph □). Sie können das Funktionsargument in der x_1x_2-Ebene verschieben (Punkt ●). Der zugehörige Funktionswert unter f wird Ihnen durch Angabe des zugehörigen Punkts auf dem Graphen angezeigt (Punkt ●).



(a) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen erster Ordnung von f an allen Punkten $(x, y) \in \mathbb{D}_f$, an denen sie existieren.

(i) Es ist $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) =$ ______.

(ii) Es ist $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) =$ ______.

(b) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von f an allen Punkten $(x, y) \in \mathbb{D}_f$, an denen sie existieren.

(i) Es ist $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) =$ ______.

(ii) Es ist $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) =$ ______.

(iii) Es ist $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) =$ ______.

Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Jörg Härterich
	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0

Thema	In dieser Aufgabe sollen die partiellen Ableitungen der ersten und zweiten Ordnung einer reellen gebrochen-rationalen Funktion f in zwei Veränderlichen x und y auf ihrem Definitionsbereich mithilfe der Produkt- und Kettenregel bestimmt werden. Die Funktion f ist von der Form $$f(x,y) = \frac{a_3\,x^{b_1}\,y^{b_2}}{a_2\,x^{c_{21}}\,y^{c_{22}} + a_1\,x^{c_{11}}\,y^{c_{12}}},$$ wobei $a_i \in \{-1,+1\}$, $b_j \in \mathbb{N}$ und $c_{ij} \in \mathbb{N}_0$ mit $$b_1 + b_2 = 3 \quad \text{und} \quad c_{i1} + c_{i2} = i$$ für alle $i \in \{1,2,3\}$ und alle $j \in \{1,2\}$ gewählt werden. Aufgrund der Wahl von b_1 und b_2 ist das Zählerpolynom ein bivariates Monom dritten Grades.
Vorkenntnisse	Partielle Ableitung, Ableiten von gebrochen-rationalen Funktionen
Randomisierung	Die Koeffizienten a_1, a_2, a_3 und die Exponenten b_1, b_2, $c_{11}, c_2 12, c_{21}, c_{22}$ werden zufällig ausgewählt.
Anpassung	Die Koeffizienten und Exponenten können angepasst werden. Überprüfen Sie gegebenenfalls die Darstellung des zugehörigen Funktionsgraphen. Bitte verwenden Sie für die Anpassung dieser Aufgabe nur den Moodle-Texteditor (siehe Empfohlener Editor).
Verbotene Wörter	diff, diffx
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

4.2.5.3 Partielle Ableitungen 1. und 2. Ordnung (3)

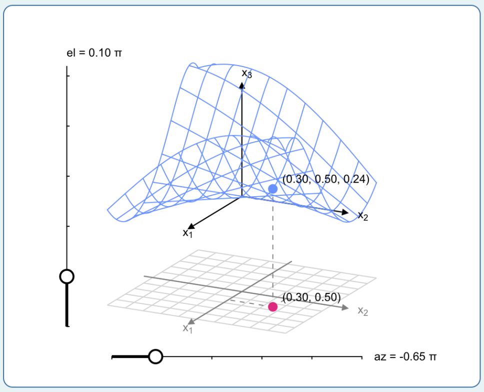
Tags Richtungsableitung, partielle Ableitung

Screenshot (Stand 29.07.2024)

Betrachten Sie die Funktion

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \sin(x\,y + x^2)$.

Die folgende Abbildung zeigt den Graphen von f auf dem Einheitsquadrat $[-1, 1]^2$ in der x_1x_2-Ebene von $\mathbb{R}^3$ aufgezeichnet gegen die x_3-Achse (Graph ◻). Sie können das Funktionsargument in der x_1x_2-Ebene verschieben (Punkt ●). Der zugehörige Funktionswert unter f wird Ihnen durch Angabe des zugehörigen Punkts auf dem Graphen angezeigt (Punkt ●).



(a) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen erster Ordnung von f an allen Punkten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, an denen sie existieren.

(i) Es ist $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) =$ ____.

(ii) Es ist $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) =$ ____.

(b) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von f an allen Punkten $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, an denen sie existieren.

(i) Es ist $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) =$ ____.

(ii) Es ist $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) =$ ____.

(iii) Es ist $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) =$ ____.

Autor Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee Jörg Härterich
Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz CC BY-SA 4.0

Thema In dieser Aufgabe sollen die partiellen Ableitungen der ersten und zweiten Ordnung einer reellen Funktion f in zwei Veränderlichen x und y mithilfe der Produkt- und Kettenregel bestimmt werden. Die Funktion f ist von der Form

$$f(x, y) = g(a_2\, x^{b_1}\, y^{b_2} + a_1\, x^{c_1}\, y^{c_2}),$$

wobei $g \in \{\cos, \sin\}$, $a_i \in \{-1, +1\}$ und $b_j, c_j \in \mathbb{N}_0$ mit

$$b_1 + b_2 = 2 = c_1 + c_2 \quad \text{und} \quad b_j \neq c_j$$

für alle $i \in \{1, 2, 3\}$ und alle $j \in \{1, 2\}$ gewählt werden.

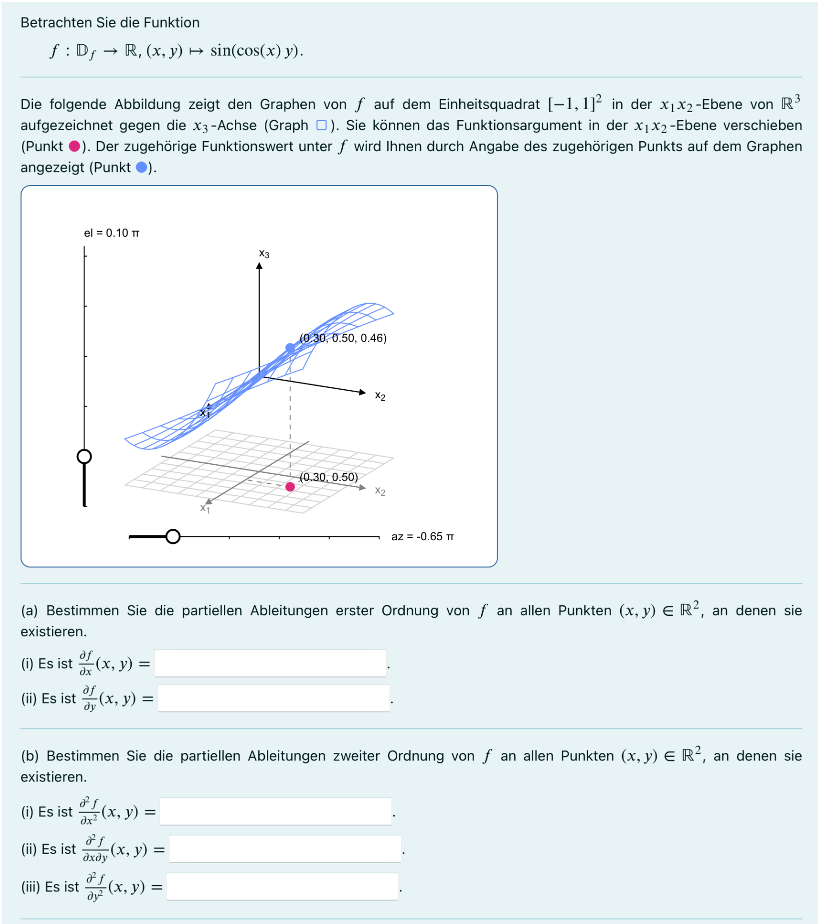
Vorkenntnisse Partielle Ableitung, Ableiten von rationalen und trigonometrischen Funktionen

Randomisierung Die Koeffizienten a_1, a_2, a_3 und die Exponenten b_1, b_2, c_1, c_2 werden zufällig ausgewählt.

Anpassung	Die Koeffizienten und Exponenten können angepasst werden. Überprüfen Sie gegebenenfalls die Darstellung des zugehörigen Funktionsgraphen. Bitte verwenden Sie für die Anpassung dieser Aufgabe nur den Moodle-Texteditor (siehe Empfohlener Editor).
Verbotene Wörter	diff, diffx
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

4.2.5.4 Partielle Ableitungen 1. und 2. Ordnung (4)

Tags	Richtungsableitung, partielle Ableitung
Screenshot	(Stand 29.07.2024)



Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Jörg Härterich Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe sollen die partiellen Ableitungen der ersten und zweiten Ordnung einer reellen Funktion f in zwei Veränderlichen x und y auf ihrem Definitionsbereich mithilfe der Produkt- und Kettenregel bestimmt werden. Die Funktion f ist von der Form $$f(x, y) = a_3\, g(a_2\, x^{b_1}\, y^{b_2}\, h(a_1\, x^{b_2}\, y^{b_1})),$$ wobei $g, h \in \{\cos, \sin\}$, $a_i \in \{-1, +1\}$ und $b_j \in \mathbb{N}_0$ mit $b_1 + b_2 = 1$ für alle $i \in \{1, 2, 3\}$ und alle $j \in \{1, 2\}$ gewählt werden.
Vorkenntnisse	Partielle Ableitung, Ableiten von trigonometrischen Funktionen
Randomisierung	Die Koeffizienten a_1, a_2, a_3 und die Exponenten b_1, b_2 werden zufällig ausgewählt.

Anpassung	Die Koeffizienten und Exponenten können angepasst werden. Überprüfen Sie gegebenenfalls die Darstellung des zugehörigen Funktionsgraphen. Bitte verwenden Sie für die Anpassung dieser Aufgabe nur den Moodle-Texteditor (siehe Empfohlener Editor).
Verbotene Wörter	diff, diffx
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

4.2.5.5 Partielle Ableitungen 1. und 2. Ordnung (5)

Tags Richtungsableitung, partielle Ableitung

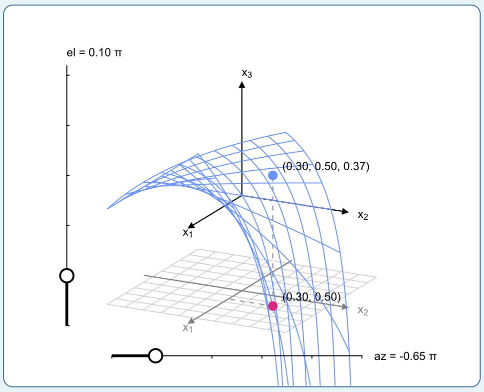
Screenshot (Stand 29.07.2024)

Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{D}_f \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \ln(x\,y + x + 1)$$

auf ihrem maximalen Definitionsbereich $\mathbb{D}_f \subset \mathbb{R}^2$.

Die folgende Abbildung zeigt den Graphen von f auf dem Einheitsquadrat $[-1, 1]^2$ in der x_1x_2-Ebene von $\mathbb{R}^3$ aufgezeichnet gegen die x_3-Achse (Graph ◻). Sie können das Funktionsargument in der x_1x_2-Ebene verschieben (Punkt ●). Der zugehörige Funktionswert unter f wird Ihnen durch Angabe des zugehörigen Punkts auf dem Graphen angezeigt (Punkt ●).



(a) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen erster Ordnung von f an allen Punkten $(x, y) \in \mathbb{D}_f$, an denen sie existieren.

(i) Es ist $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) =$ ______ .

(ii) Es ist $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) =$ ______ .

(b) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von f an allen Punkten $(x, y) \in \mathbb{D}_f$, an denen sie existieren.

(i) Es ist $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) =$ ______ .

(ii) Es ist $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) =$ ______ .

(iii) Es ist $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) =$ ______ .

Autor Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee Jörg Härterich
Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz CC BY-SA 4.0

Thema In dieser Aufgabe sollen die partiellen Ableitungen der ersten und zweiten Ordnung einer reellen Funktion f in zwei Veränderlichen x und y auf ihrem Definitionsbereich mithilfe der Produkt- und Kettenregel bestimmt werden. Die Funktion f ist von der Form

$$f(x, y) = a_2 \ln\big(a_1\, x^{b_1}\, y^{b_2} - a_1\, x^{c_1}\, y^{c_2}\big),$$

wobei $a_i \in \{-1, +1\}$ und $b_j, c_j \in \mathbb{N}_0$ mit

$$b_1 + b_2 = 2 = c_1 + c_2 \quad \text{und} \quad b_j \neq c_j$$

für alle $i, j \in \{1, 2\}$ gewählt werden.

Vorkenntnisse Partielle Ableitung, Ableiten von rationalen und logarithmischen Funktionen

Randomisierung	Die Koeffizienten a_1, a_2 und die Exponenten b_1, b_2, c_1, c_2 werden zufällig ausgewählt.
Anpassung	Die Koeffizienten und Exponenten können angepasst werden. Überprüfen Sie gegebenenfalls die Darstellung des zugehörigen Funktionsgraphen. Bitte verwenden Sie für die Anpassung dieser Aufgabe nur den Moodle-Texteditor (siehe Empfohlener Editor).
Verbotene Wörter	diff, diffx
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

4.2.5.6 Partielle Ableitungen 1. und 2. Ordnung (6)

Tags — Richtungsableitung, partielle Ableitung

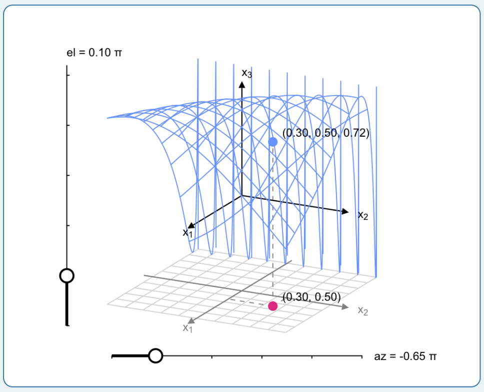
Screenshot — (Stand 29.07.2024)

Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{D}_f \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \cos(y + \ln(x + 1))$$

auf ihrem maximalen Definitionsbereich $\mathbb{D}_f \subset \mathbb{R}^2$.

Die folgende Abbildung zeigt den Graphen von f auf dem Einheitsquadrat $[-1, 1]^2$ in der x_1x_2-Ebene von $\mathbb{R}^3$ aufgezeichnet gegen die x_3-Achse (Graph ☐). Sie können das Funktionsargument in der x_1x_2-Ebene verschieben (Punkt ●). Der zugehörige Funktionswert unter f wird Ihnen durch Angabe des zugehörigen Punkts auf dem Graphen angezeigt (Punkt ●).



(a) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen erster Ordnung von f an allen Punkten $(x, y) \in \mathbb{D}_f$, an denen sie existieren. Gegen Sie dazu gegebenenfalls $\sin(x)$ als `sin(x)`, $\cos(x)$ als `cos(x)` und $\ln(x)$ als `ln(x)` ein.

(i) Es ist $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) =$ ______.

(ii) Es ist $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) =$ ______.

(b) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von f an allen Punkten $(x, y) \in \mathbb{D}_f$, an denen sie existieren.

(i) Es ist $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) =$ ______.

(ii) Es ist $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) =$ ______.

(iii) Es ist $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) =$ ______.

Autor — Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee — Jörg Härterich
Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz — CC BY-SA 4.0

Thema — In dieser Aufgabe sollen die partiellen Ableitungen der ersten und zweiten Ordnung einer reellen Funktion f in zwei Veränderlichen x und y auf ihrem Definitionsbereich mithilfe der Produkt- und Kettenregel bestimmt werden. Die Funktion f ist von der Form

$$f(x, y) = a_1\, g_1(h_2(x^{b_2}\, y^{b_2}) + a_2\, x^{b_2}\, y^{b_1}),$$

wobei $g \in \{\cos, \sin\}$, $h_1, h_2 \in \{\ln, g\}$ mit $h_1 \neq h_2$, $a_i \in \{-1, +1\}$ und $b_j \in \mathbb{N}_0$ mit $b_1 + b_2 = 1$ für alle $i, j \in \{1, 2, 3\}$ gewählt werden.

Vorkenntnisse — Partielle Ableitung, Ableiten von trigonometrischen Funktionen

Randomisierung — Die Koeffizienten a_1, a_2 und die Exponenten b_1, b_2 werden zufällig ausgewählt.

Anpassung	Die Koeffizienten und Exponenten können angepasst werden. Überprüfen Sie gegebenenfalls die Darstellung des zugehörigen Funktionsgraphen. Bitte verwenden Sie für die Anpassung dieser Aufgabe nur den Moodle-Texteditor (siehe Empfohlener Editor).
Verbotene Wörter	diff, diffx
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

4.2.6 Berechnung von Differential und Jacobimatrix

4.2.6.1 Differential einer komponentenweise definierten Abbildung (1)

Tags Differential, Exponentialfunktion, Trigonometrische Funktionen

Screenshot (Stand 29.07.2024)

Betrachten Sie die Abbildung

$$g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto \left(z + y^2 + x^2, \cos(z) + \cos\left(y^3\right) + \cos\left(x^3\right)\right).$$

Die Abbildung g ist insbesondere differenzierbar. Bestimmen Sie das Differential $Dg(x, y, z) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ von g an (x, y, z), indem Sie im Folgenden das Bild der Standardbasis $\{e_1, e_2, e_3\}$ von $\mathbb{R}^3$ unter $Dg(x, z, y)$ berechnen. Geben Sie dabei einen Vektor $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ als `[a,b]` und die Sinus-, Cosinus- und Exponentialfunktion an x als `sin(x)`, `cos(x)` bzw. `exp(x)` oder `%e^x` ein.

(a) Geben Sie $Dg(x, y, z)(e_1)$ an.

Es ist $Dg(x, y, z)(e_1) =$ ______ .

(b) Geben Sie $Dg(x, y, z)(e_2)$ an.

Es ist $Dg(x, y, z)(e_2) =$ ______ .

(c) Geben Sie $Dg(x, y, z)(e_3)$ an.

Es ist $Dg(x, y, z)(e_3) =$ ______ .

Autor Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz CC BY-SA 4.0

Thema In dieser Aufgabe wird das Differential einer komponentenweise definierten Funktion $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \to F(x, y, z)$ vermöge der Ketten- und Produktregel berechnet. Die Komponenten von F sind Summen polynomieller, trigonometrischer und exponentieller Funktionen. Jeder Summand ist von der Form

$$w^a, \quad \cos(w^a), \quad \sin(w^a), \quad \text{oder} \quad \exp(w),$$

wobei $w \in \{x, y, z\}$ und $a \in \{1, 2, 3\}$ für jeden Summand paarweise verschieden von den übrigen Summanden gewählt werden.

Vorkenntnisse Differential mehrdimensionaler Abbildungen

Randomisierung Der Bezeichner der Funktion wird zufällig aus einer Liste von drei Bezeichnern ausgewählt. Der Grad a der polynomiellen Anteile wird zufällig aus einer Liste ausgewählt. Die polynomiellen, trigonometrischen und exponentiellen Anteile der Funktionskomponenten werden mithilfe einer Liste zufällig ausgewählt. Dies hat gegebenenfalls Einfluss auf den Schwierigkeitsgrad der Aufgabe.

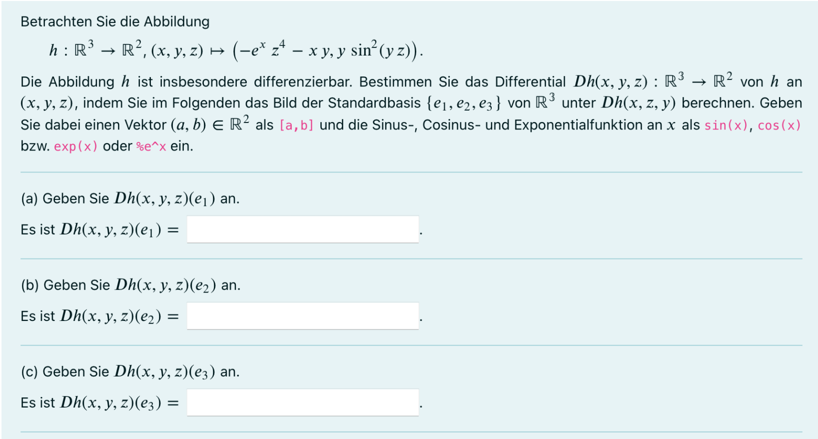
Anpassung Die Liste der Bezeichner und der Exponenten kann beliebig geändert oder ergänzt werden.

Verbotene Wörter diff, diffx

Sonderoption Feedback unterdrücken: ja

4.2.6.2 Differential einer komponentenweise definierten Abbildung (2)

Tags	Differential, Exponentialfunktion, Trigonometrische Funktionen
Screenshot	(Stand 29.07.2024)



Betrachten Sie die Abbildung

$$h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, (x, y, z) \mapsto \left(-e^x z^4 - x\, y, y \sin^2(y\, z)\right).$$

Die Abbildung h ist insbesondere differenzierbar. Bestimmen Sie das Differential $Dh(x, y, z) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ von h an (x, y, z), indem Sie im Folgenden das Bild der Standardbasis $\{e_1, e_2, e_3\}$ von $\mathbb{R}^3$ unter $Dh(x, z, y)$ berechnen. Geben Sie dabei einen Vektor $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ als `[a,b]` und die Sinus-, Cosinus- und Exponentialfunktion an x als `sin(x)`, `cos(x)` bzw. `exp(x)` oder `%e^x` ein.

(a) Geben Sie $Dh(x, y, z)(e_1)$ an.

Es ist $Dh(x, y, z)(e_1) =$ ______ .

(b) Geben Sie $Dh(x, y, z)(e_2)$ an.

Es ist $Dh(x, y, z)(e_2) =$ ______ .

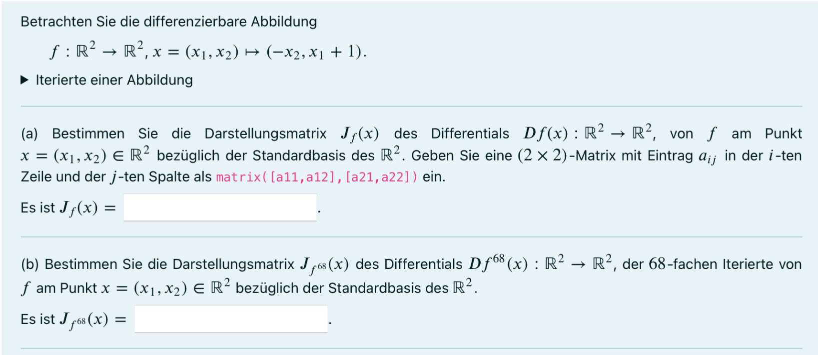
(c) Geben Sie $Dh(x, y, z)(e_3)$ an.

Es ist $Dh(x, y, z)(e_3) =$ ______ .

Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe wird das Differential einer komponentenweise definierten Funktion $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \to F(x, y, z)$ vermöge der Ketten- und Produktregel berechnet. Die Komponenten von F sind Summen polynomieller, trigonometrischer und exponentieller Funktionen. Jeder Summand ist von der Form $$\pm u^a\, f(\pm v), \quad \pm w\, (g(\pm w\, u))^b, \quad \pm h(\pm v^c\, w), \quad \text{oder} \quad \pm\, (\pm w)^d,$$ wobei $u, v, w \in \{x, y, z\}$, $a, b, c \in \{1, 2, 3, 4\}$ und $f, g, h \in \{\cos, \sin, \exp\}$ jeweils paarweise verschieden gewählt werden.
Vorkenntnisse	Differential mehrdimensionaler Abbildungen
Randomisierung	Der Bezeichner der Funktion wird zufällig aus einer Liste von drei Bezeichnern ausgewählt. Die Exponenten a, b, c werden zufällig aus einer Liste ausgewählt. Die polynomiellen, trigonometrischen und exponentiellen Anteile f, g, h der Funktionskomponenten werden mithilfe einer Liste zufällig ausgewählt. Die Vorzeichen der Summanden und Argumente werden zufällig aus einer Liste ausgewählt. Dies hat gegebenenfalls Einfluss auf den Schwierigkeitsgrad der Aufgabe.
Anpassung	Die Liste der Bezeichner und der Exponenten kann beliebig geändert oder ergänzt werden.
Verbotene Wörter	diff, diffx
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

4.2.6.3 Jacobimatrix einer iterierten Abbildung (1)

Tags	Differential, Jacobimatrix
Screenshot	(Stand 29.07.2024)



Betrachten Sie die differenzierbare Abbildung

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, x = (x_1, x_2) \mapsto (-x_2, x_1 + 1).$

▶ Iterierte einer Abbildung

(a) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $J_f(x)$ des Differentials $Df(x) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, von f am Punkt $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^2$. Geben Sie eine (2×2)-Matrix mit Eintrag a_{ij} in der i-ten Zeile und der j-ten Spalte als `matrix([a11,a12],[a21,a22])` ein.

Es ist $J_f(x) =$ ______ .

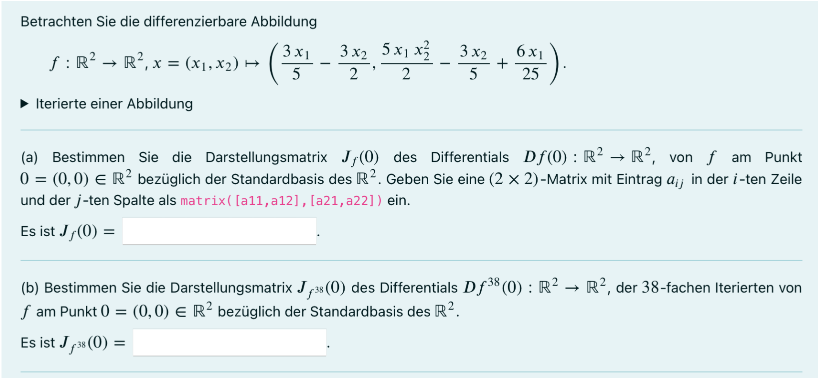
(b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $J_{f^{68}}(x)$ des Differentials $Df^{68}(x) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, der 68-fachen Iterierte von f am Punkt $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^2$.

Es ist $J_{f^{68}}(x) =$ ______ .

Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe wird die Jacobimatrix der Abbildung $$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x_1, x_2) \mapsto ((-1)^k x_2 + a, (-1)^{k+1} x_1 + b)$$ mit $k \in \{-1, +1\}$ und die Jacobimatrix ihrer n-fach Iterierten bestimmt. Das Differential von f entspricht an jedem Punkt einer Drehung um $\frac{\pi}{2}$.
Vorkenntnisse	Kettenregel, Jacobimatrix
Randomisierung	Der Parameter k wird zufällig als +1 oder -1 gewählt, was die Richtung der Drehung bestimmt. Der Parameter n wird als positive ganze Zahl zwischen 14 und 95 gewählt. Die Parameter a und b werden als ganze Zahlen zwischen -5 und 5 gewählt. Der Bezeichner der Funktion f wird zufällig aus einer Liste von drei Bezeichnern ausgewählt.
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

4.2.6.4 Jacobimatrix einer iterierten Abbildung (2)

Tags	Differential, Jacobimatrix
Screenshot	(Stand 29.07.2024)



Betrachten Sie die differenzierbare Abbildung

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, x = (x_1, x_2) \mapsto \left(\frac{3\,x_1}{5} - \frac{3\,x_2}{2}, \frac{5\,x_1\,x_2^2}{2} - \frac{3\,x_2}{5} + \frac{6\,x_1}{25} \right).$$

▶ Iterierte einer Abbildung

(a) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $J_f(0)$ des Differentials $Df(0) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, von f am Punkt $0 = (0,0) \in \mathbb{R}^2$ bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^2$. Geben Sie eine (2×2)-Matrix mit Eintrag a_{ij} in der i-ten Zeile und der j-ten Spalte als `matrix([a11,a12],[a21,a22])` ein.

Es ist $J_f(0) =$ _____.

(b) Bestimmen Sie die Darstellungsmatrix $J_{f^{38}}(0)$ des Differentials $Df^{38}(0) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, der 38-fachen Iterierten von f am Punkt $0 = (0,0) \in \mathbb{R}^2$ bezüglich der Standardbasis des $\mathbb{R}^2$.

Es ist $J_{f^{38}}(0) =$ _____.

Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe wird die Jacobimatrix einer polynomiellen Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ und die Jacobimatrix ihrer n-fach Iterierten jeweils an null bestimmt. Die Abbildung f besitzt an null einen Fixpunkt und deren Jacobimatrix an null ist eine nilpotente (2×2)-Matrix.
Vorkenntnisse	Kettenregel, Jacobimatrix
Randomisierung	Die Koeffizienten der polynomiellen Abbildung f werden zufällig so ausgewählt, dass die oben genannten Eigenschaften von f erhalten bleiben. Der Bezeichner der Funktion f wird zufällig aus einer Liste von drei Bezeichnern ausgewählt.
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

4.2.7 Gradient und Divergenz

4.2.7.1 Divergenz des Gradientenfeldes einer quadratischen Abbildung (1)

Tags: quadratische Form, Gradient, Divergenz, Laplace-Operator

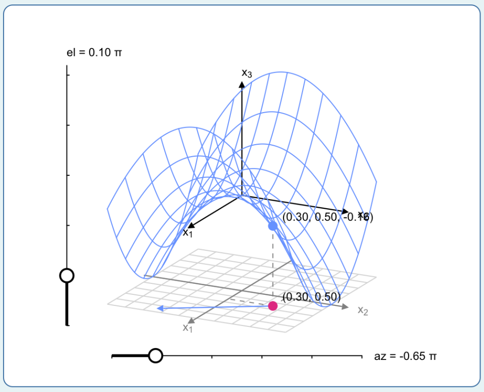
Screenshot: (Stand 29.07.2024)

Sei $B = (b_1, \dots, b_{2n})$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^{2n}$ bezüglich des Standardskalarprodukts und sei $L : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ die durch $L(b_k) = (-1)^{k-1} b_k$ für alle $k \in \{1, \dots, 2n\}$ definierte quadratische Abbildung

$$f : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}, x \mapsto x \cdot L(x),$$

die einen Vektor x auf das Standardskalarprodukt $x \cdot L(x)$ von x und $L(x)$ abbildet.

Die folgende Abbildung zeigt für $n = 1$ den Graphen von f auf dem Einheitsquadrat $[-1, 1]^2$ in der x_1x_2-Ebene von $\mathbb{R}^3$ aufgezeichnet gegen die x_3-Achse (Graph ▢). Dabei werde B mit der Standardbasis von $\mathbb{R}^2$ identifiziert. Sie können das Funktionsargument in der x_1x_2-Ebene verschieben (Punkt ●). Der zugehörige Funktionswert unter f wird Ihnen durch Angabe des zugehörigen Punkts auf dem Graphen angezeigt (Punkt ●). Der Gradient von f ist als Vektorpfeil dem Funktionsargument angeheftet (Pfeil →).



Bestimmen Sie die Divergenz $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f)(x)$ des Gradienten $\operatorname{grad} f$ von f am Punkt $x \in \mathbb{R}^{2n}$. Geben Sie dabei das Skalarprodukt $x \cdot y$ als `x.y` ein.

Es ist $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f)(x) =$ ____ .

Autor: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: In dieser Aufgabe wird die Divergenz des Gradientenfeldes der quadratischen Abbildung / Form

$$f : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x \cdot A(x)$$

bestimmt. Dabei ist A eine lineare Abbildung, die den k-ten Basisvektor b_k einer Orthonormalbasis auf $(-1)^{k\pm1}\, b_k$ abbildet.

Vorkenntnisse: Definition des Gradienten, Definition der Divergenz, Spur als Summe der Eigenwerte, Diagonalisierbarkeit

Randomisierung: Der Exponent der Koeffizienten (-1) in der Definition der linearen Abbildung A wird zufällig aus $k + 1$ und k–1 ausgewählt. Dies hat keinen Einfluss auf den Schwierigkeitsgrad der Aufgabe.

Anpassung: keine

Sonderoption: Feedback unterdrücken: ja

4.2.7.2 Divergenz des Gradientenfeldes einer quadratischen Abbildung (2)

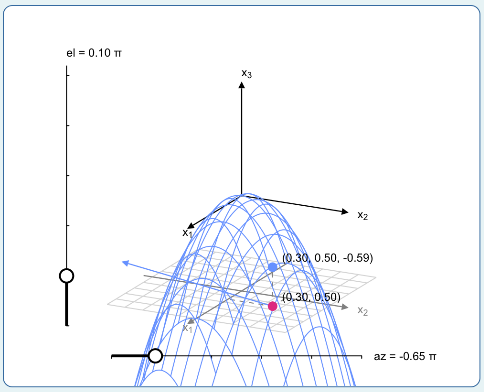
Tags	quadratische Form, Gradient, Divergenz, Laplace-Operator
Screenshot	(Stand 29.07.2024)

Sei $B = (b_1, \ldots, b_n)$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$ und sei $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ die durch $L(b_k) = -k\, b_k$ für alle $k \in \{1, \ldots, n\}$ definierte quadratische Abbildung

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x \mapsto x \cdot L(x),$$

die einen Vektor x auf das Standardskalarprodukt $x \cdot L(x)$ von x und $L(x)$ abbildet.

Die folgende Abbildung zeigt für $n = 1$ den Graphen von f auf dem Einheitsquadrat $[-1, 1]^2$ in der $x_1 x_2$-Ebene von $\mathbb{R}^3$ aufgezeichnet gegen die x_3-Achse (Graph ▢). Dabei werde B mit der Standardbasis von $\mathbb{R}^2$ identifiziert. Sie können das Funktionsargument in der $x_1 x_2$-Ebene verschieben (Punkt ●). Der zugehörige Funktionswert unter f wird Ihnen durch Angabe des zugehörigen Punkts auf dem Graphen angezeigt (Punkt ●). Der Gradient von f ist als Vektorpfeil dem Funktionsargument angeheftet (Pfeil →).



Bestimmen Sie die Divergenz $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f)(x)$ des Gradienten $\operatorname{grad} f$ von f am Punkt $x \in \mathbb{R}^n$. Geben Sie dabei ggf. das Skalarprodukt $x \cdot y$ als `x.y` ein.

Es ist $\operatorname{div}(\operatorname{grad} f)(x) =$ ______ .

Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe wird die Divergenz des Gradientenfeldes der quadratischen Abbildung / Form $$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto x \cdot A(x)$$ bestimmt. Dabei ist A eine lineare Abbildung, die den k-ten Basisvektor b_k einer Orthonormalbasis auf $\pm k\, b_k$ abbildet.
Vorkenntnisse	Definition des Gradienten, Definition der Divergenz, Spur als Summe der Eigenwerte, Diagonalisierbarkeit, Gaußsche Summenformel
Randomisierung	Das Signum der Koeffizienten in der Definiton der linearen Abbildung A wird zufällig als positiv oder negativ ausgewählt. Dies hat keinen Einfluss auf den Schwierigkeitsgrad der Aufgabe.
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

4.2.8 Koordinaten, Karten und Parametrisierungen

4.2.8.1 Zylinderkoordinaten

Tags: Zylinderkoordinaten, Differential, Funktionaldeterminante, Rotationskörper

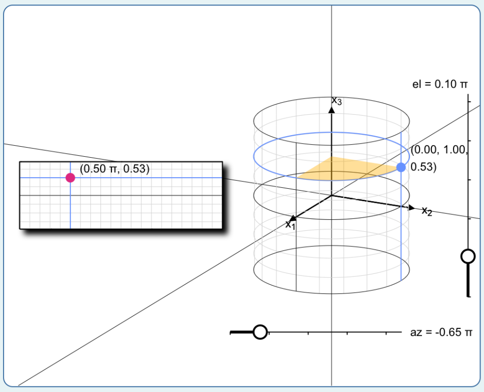
Screenshot: (Stand 29.07.2024)

Betrachten Sie die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \; (r, \varphi, h) \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ z \end{pmatrix}$$

Es sind (r, φ, z) die Zylinderkoordinaten des Punkts $f(r, \varphi, z)$. Da f surjektiv ist, besitzt jeder Punkt in $\mathbb{R}^3$ Zylinderkoordinaten. Durch Wahl einer geeigneten Einschränkung des Definitionsbereichs von f sind die Zylinderkoordinaten eines Punkts in $\mathbb{R}^3$ eindeutig.

Die folgende Abbildung zeigt die Menge $\{1\} \times [0, 2\pi] \times [-1, 1]$ als Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ auf der linken Seite und deren Bild unter f als Teilmenge von $\mathbb{R}^3$ auf der rechten Seite. Der Punkt (Punkt ●) im Bild lässt sich durch Verschieben des Punkts (Punkt ●) im Definitionsbereich variieren. Der Kreissektor (Sektor ◁) des Kreises senkrecht zur x_3-Achse durch den Bildpunkt kennzeichnet den Winkel φ.



(a) Die Abbildung f ist insbesondere differenzierbar. Bestimmen Sie das Differential $Df(r, \varphi, z) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ von f an (r, φ, z). Berechnen Sie dazu das Bild der Standardbasis $\{e_1, e_2, e_3\}$ von $\mathbb{R}^3$ unter $Df(r, \varphi, z)$. Geben Sie dabei einen Vektor $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ als `[a,b,c]` und den Parameter φ als `phi` ein.

(i) Es ist $Df(r, \varphi, z)(e_1) =$ ______ .

(ii) Es ist $Df(r, \varphi, z)(e_2) =$ ______ .

(iii) Es ist $Df(r, \varphi, z)(e_3) =$ ______ .

(b) Bestimmen Sie die Determinante des Differentials $Df(r, \varphi, z)$ von f an einem Punkt $(r, \varphi, z) \in \mathbb{R}^3$.

Es ist $\det(Df(r, \varphi, z)) =$ ______ .

(c) Bestimmen Sie die Menge M aller Punkte $(r, \varphi, z) \in \mathbb{R}^3$, an denen das Differential von f nicht injektiv ist.

Es ist $M = \{(r, \varphi, z) \in \mathbb{R}^3 \mid$ ______ $\}$.

Autor: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: In dieser Aufgabe wird das Differential und die Funktionaldeterminante der Parametrisierung in Zylinderkoordinaten bestimmt. Anhand der Funktionaldeterminante wird untersucht, wo das Differential injektiv ist.

Vorkenntnisse: Differential mehrdimensionaler Abbildungen, Charakterisierung der Injektivität linearer Abbildung

Randomisierung: keine

Anpassung: keine

Verbotene Wörter: diff, diffx, determinant

Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

4.2.8.2 Kugelkoordinaten

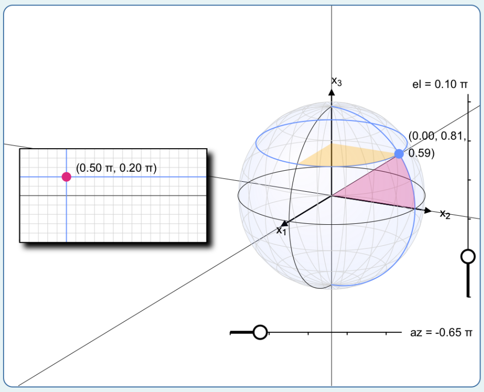
Tags	Kugelkoordinaten, Differential, Funktionaldeterminante, Rotationskörper
Screenshot	(Stand 29.07.2024)

Betrachten Sie die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\ (r, \varphi, \psi) \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r\cos(\psi) \\ 0 \\ r\sin(\psi) \end{pmatrix}$$

Es sind (r, φ, ψ) die Kugelkoordinaten des Punkts $f(r, \varphi, \psi)$. Da f surjektiv ist, besitzt jeder Punkt in $\mathbb{R}^3$ Kugelkoordinaten. Durch Wahl einer geeigneten Einschränkung des Definitionsbereichs von f sind die Kogelkoordinaten eines Punkts in $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ eindeutig.

Die folgende Abbildung zeigt die Menge $\{1\} \times [0, 2\pi] \times [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$ als Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ auf der linken Seite und deren Bild unter f als Teilmenge von $\mathbb{R}^3$ auf der rechten Seite. Der Punkt (Punkt ●) im Bild lässt sich durch Verschieben des Punkts (Punkt ●) im Definitionsbereich variieren. Der Kreissektor (Sektor ◁) des Großkreises zwischen Äquator und Bildpunkt kennzeichnet den Winkel ψ und der Kreissektor (Sektor ◁) des Kreises parallel zum Äquator durch den Bildpunkt kennzeichnet den Winkel φ.



(a) Die Abbildung f ist insbesondere differenzierbar. Bestimmen Sie das Differential $Df(p) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ von f an (r, φ, ψ). Berechnen Sie dazu das Bild der Standardbasis $\{e_1, e_2, e_3\}$ von $\mathbb{R}^3$ unter $Df(r, \varphi, \psi)$. Geben Sie dabei einen Vektor $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ als `[a,b,c]` und die Parameter φ und ψ als `phi` bzw. `psi` ein.

(i) Es ist $Df(r, \varphi, \psi)(e_1) =$ ______ .

(ii) Es ist $Df(r, \varphi, \psi)(e_2) =$ ______ .

(iii) Es ist $Df(r, \varphi, \psi)(e_3) =$ ______ .

(b) Bestimmen Sie die Determinante des Differentials $Df(r, \varphi, \psi)$ von f an einem Punkt $(r, \varphi, \psi) \in \mathbb{R}^3$.

Es ist $\det(Df(r, \varphi, \psi)) =$ ______ .

Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe wird das Differential und die Funktionaldeterminante der Parametrisierung in Kugelkoordinaten bestimmt.
Vorkenntnisse	Differential mehrdimensionaler Abbildungen
Randomisierung	keine
Anpassung	keine
Verbotene Wörter	diff, diffx, determinant
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

4.2.8.3 Toruskoordinaten

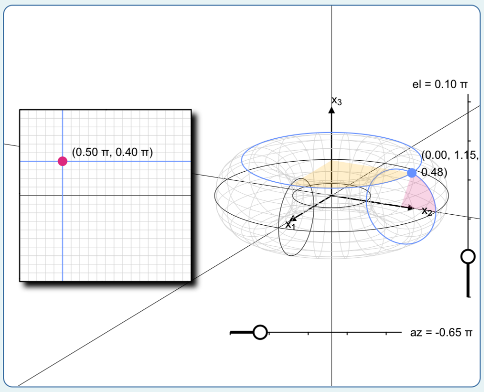
Tags	Toruskoordinaten, Differential, Funktionaldeterminante, Rotationskörper
Screenshot	(Stand 05.07.2023)

Betrachten Sie für $R > 0$ die Abbildung

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3\ (r, \varphi, \psi) \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R + r\cos(\psi) \\ 0 \\ r\sin(\psi) \end{pmatrix}$$

Es sind (r, φ, ψ) die Toruskoordinaten des Punkts $f(r, \varphi, \psi)$. Da f surjektiv ist, besitzt jeder Punkt in $\mathbb{R}^3$ Toruskoordinaten. Durch Wahl einer geeigneten Einschränkung des Definitionsbereichs von f sind die Toruskoordinaten eines Punkts in $\mathbb{R}^3$ eindeutig.

Die folgende Abbildung zeigt die Menge $\left\{\frac{1}{2}\right\} \times [0, 2\pi] \times [-\pi, \pi]$ als Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ auf der linken Seite und deren Bild unter f für $R = 1$ als Teilmenge von $\mathbb{R}^3$ auf der rechten Seite. Der Punkt (Punkt ●) im Bild lässt sich durch Verschieben des Punkts (Punkt ●) im Definitionsbereich variieren. Der Kreissektor (Sektor ◁) des Kreises zwischen äußerem Äquator und Bildpunkt kennzeichnet den Winkel ψ und der Kreissektor (Sektor ◁) des Kreises parallel zum äußeren und inneren Äquator durch den Bildpunkt kennzeichnet den Winkel φ.



(a) Die Abbildung f ist insbesondere differenzierbar. Bestimmen Sie das Differential $Df(p) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ von f an (r, φ, ψ). Berechnen Sie dazu das Bild der Standardbasis $\{e_1, e_2, e_3\}$ von $\mathbb{R}^3$ unter $Df(r, \varphi, \psi)$. Geben Sie dabei einen Vektor $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ als `[a,b,c]` und die Parameter φ und ψ als `phi` bzw. `psi` ein.

(i) Es ist $Df(r, \varphi, \psi)(e_1) =$ ______.

(ii) Es ist $Df(r, \varphi, \psi)(e_2) =$ ______.

(iii) Es ist $Df(r, \varphi, \psi)(e_3) =$ ______.

(b) Bestimmen Sie die Determinante des Differentials $Df(r, \varphi, \psi)$ von f an einem Punkt $(r, \varphi, \psi) \in \mathbb{R}^3$.

Es ist $\det(Df(r, \varphi, \psi)) =$ ______.

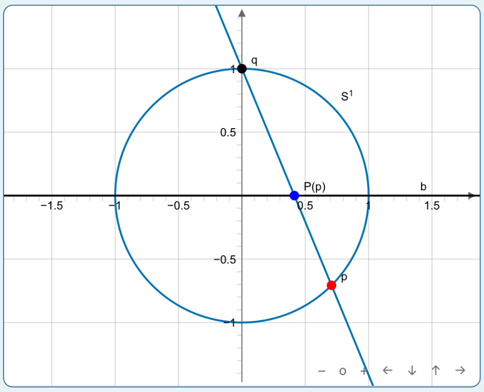
Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe wird das Differential und die Funktionaldeterminante der Parametrisierung in Toruskoordinaten bestimmt.
Vorkenntnisse	Differential mehrdimensionaler Abbildungen
Randomisierung	keine
Anpassung	keine
Verbotene Wörter	diff, diffx, determinant
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

4.2.8.4 Stereographische Projektion

Tags	Differential, Parametrisierung
Screenshot	(Stand 29.07.2024)

Sei S^n die euklidische Einheitssphäre in $\mathbb{R}^{n+1}$ und sei $q \in S^n$ beliebig. Für jeden Punkt $p \in S^n \setminus \{q\}$ schneidet die Gerade durch p und q das orthogonale Komplement $q^\perp$ von q in genau einem Punkt $P(p)$. Bestimmen Sie P als Funktion von p, deren Inverse und das Differential ihrer Inversen ohne Verwendung von Koordinaten. Gehen Sie dazu wie folgt vor.

Die folgende Abbildung zeigt die beschriebene Situation für $n = 1$ und $q = (0, 1)$ (schwarzer Punkt). Das orthogonale Komplement $q^\perp$ stimmt mir der x-Achse überein. Sie können p entlang von S^1 verschieben (roter Punkt). Der zugehörige Funktionswert $P(p)$ unter P wird Ihnen als Punkt auf der x-Achse angezeigt (blauer Punkt).



(a) Bestimmen Sie $P(p)$ in Abhängigkeit von p und von q. Geben Sie dabei das Skalarprodukt $p \cdot q$ von p und q als p . q ein.

Es ist $P(p) =$.

(b) Die durch Aufgabenteil (a) definierte Abbildung

$$P : S^n \setminus \{q\} \to q^\perp,\ p \mapsto P(p)$$

heißt stereographische Projektion und ist insbesondere eine Bijektion. Bestimmen Sie deren Umkehrabbildung P^{-1}, indem Sie $P^{-1}(x)$ für $x \in q^\perp$ angeben. Geben Sie dabei das Quadrat $|x|^2$ der Norm von x als x . x ein.

Es ist $P^{-1}(x) =$.

(c) Sei $\phi : U \to \mathbb{R}^{n+1}$ die kanonische Fortsetzung von P^{-1} auf eine offene Umgebung von $q^\perp$ in $\mathbb{R}^{n+1}$. Die Abbildung ϕ ist stetig differenzierbar. Bestimmen Sie, dass Differential $D\phi(x)(v)$ an einem Punkt $x \in q^\perp$ in Richtung $v \in q^\perp$.

▶ Kanonische Fortsetzung von P^{-1}

Es ist $D\phi(x)(v) =$.

Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe werden die stereographische Projektion, deren Inverse und deren Differential bestimmt.
Vorkenntnisse	Schnitt zwischen Geraden und Niveaulinien, Differential mehrdimensionaler Abbildungen
Randomisierung	keine
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

4.3 Taylor und Approximation von Funktionen

Die Aufgaben dieses Themenbereichs behandeln die Approximation mehrdimensionaler Abbildungen durch Taylorpolynome. Schwerpunkte sind die grafische Ermittlung von Entwicklungspunkten anhand der Graphen der Abbildung und ihrer Approximation und der Bestimmung partieller Ableitungen zur Konstruktion von Taylorpolynomen.

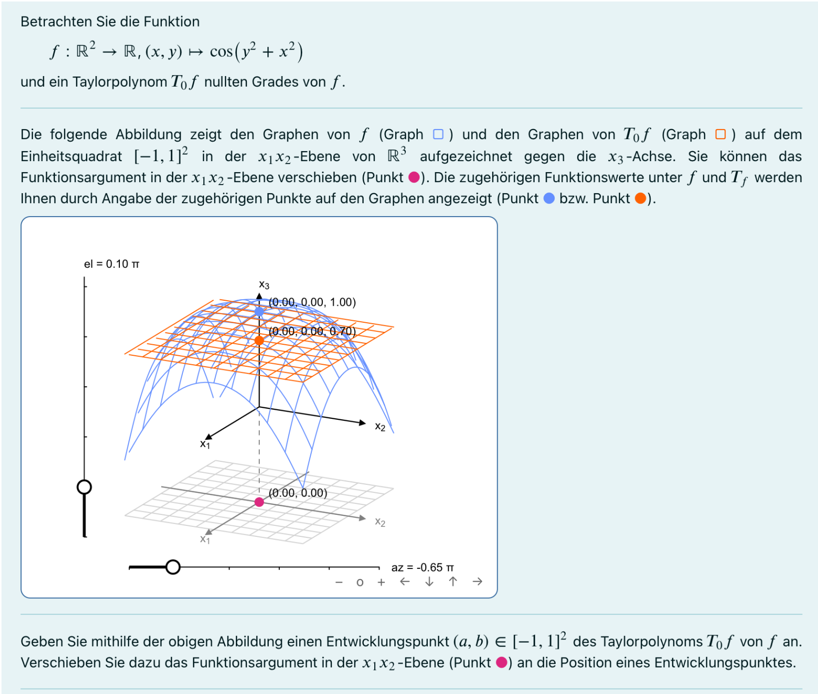
Inhaltsverzeichnis

◀ ▲ ▶

4.3.1 Taylorpolynom und Entwicklungspunkt

4.3.1.1 Entwicklungspunkt (1)

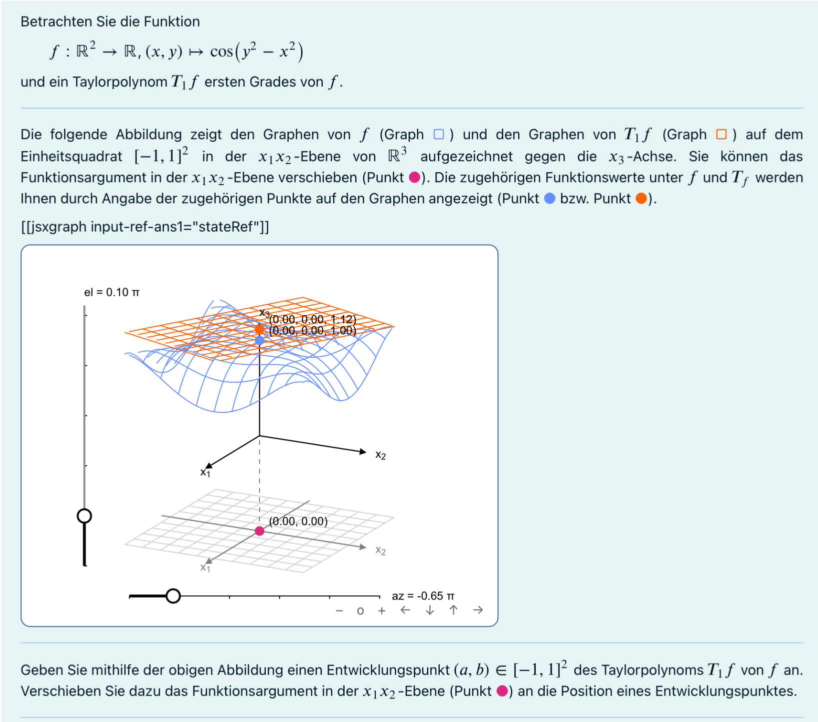
Tags	Approximation, Taylorpolynom, Entwicklungspunkt
Screenshot	(Stand 29.07.2024)



Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe wird der Entwicklungspunkt des Taylorpolynom nullten Grades der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $$f(x, y) = T(a\,(x^{b_1}\,y^{b_2} + x^{c_1}\,y^{c_2}))$$ im Einheitsquadrat $[-1, 1]^2$ im Definitionsbereich von f grafisch bestimmt.
Vorkenntnisse	Definition des Entwicklungspunktes bei der Bestimmung des Taylopolynoms, Kenntnis über die Darstellungsform von Graphen von Funktionen mehrere Veränderlicher
Randomisierung	Die Funktion T wird zufällig als Sinus- oder Kosinusfunktion gewählt. Der Vorfaktor a wird zufällig als -1 oder 1 gewählt. Die Exponenten b_1, b_2 und c_1, c_2 werden zufällig als nicht negative ganze Zahlen gewählt, sodass $b_1 \neq c_1$, $b_1 + b_2 = 2$ und $c_1 + c_2 = 2$ sind. Der Entwicklungspunkt wird zufällig als $(\pm\frac{m}{5}, \pm\frac{n}{5})$ mit m gleich 2, 3 oder 4 und n gleich 2, 3 oder 4 gewählt.
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

4.3.1.2 Entwicklungspunkt (2)

Tags	Approximation, Taylorpolynom, Entwicklungspunkt
Screenshot	(Stand 29.07.2024)



Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe wird der Entwicklungspunkt des Taylorpolynom ersten Grades der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $$f(x, y) = T(a_1\, x^{b_1}\, y^{b_2} + a_2\, x^{c_1}\, y^{c_2})$$ im Einheitsquadrat $[-1, 1]^2$ im Definitionsbereich von f grafisch bestimmt.
Vorkenntnisse	Definition des Entwicklungspunktes bei der Bestimmung des Taylopolynoms, Kenntnis über die Darstellungsform von Graphen von Funktionen mehrere Veränderlicher
Randomisierung	Die Funktion T wird zufällig als Sinus- oder Kosinusfunktion gewählt. Die Vorfaktor a_1 wird als -1 oder 1 gewählt. Der Vorfaktor a_2 wird als $-a_1$ oder 1 gewählt. Die Exponenten b_1, b_2 und c_1, c_2 werden zufällig als nicht negative ganze Zahlen mit $b_1 \neq c_1$, $b_1 + b_2 = 2$ und $c_1 + c_2 = 2$ gewählt. Der Entwicklungspunkt wird zufällig als $(\pm\frac{m}{5}, \pm\frac{n}{5})$ mit m gleich 2, 3 oder 4 und n gleich 2, 3 oder 4 gewählt.
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

4.3.1.3 Entwicklungspunkt (3)

Tags	Approximation, Taylorpolynom, Entwicklungspunkt
Screenshot	(Stand 29.07.2024)

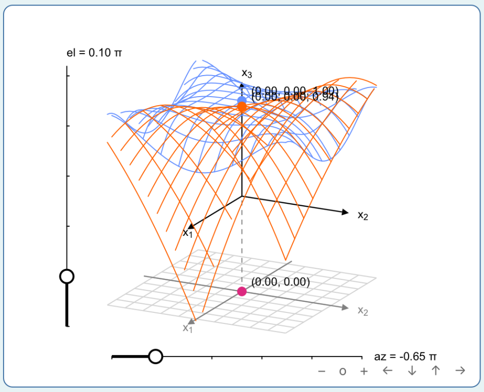
Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \cos\left(y^2 - x^2\right)$$

und ein Taylorpolynom $T_2 f$ zweiten Grades von f.

Die folgende Abbildung zeigt den Graphen von f (Graph □) und den Graphen von $T_2 f$ (Graph □) auf dem Einheitsquadrat $[-1, 1]^2$ in der $x_1 x_2$-Ebene von $\mathbb{R}^3$ aufgezeichnet gegen die x_3-Achse. Sie können das Funktionsargument in der $x_1 x_2$-Ebene verschieben (Punkt ●). Die zugehörigen Funktionswerte unter f und T_f werden Ihnen durch Angabe der zugehörigen Punkte auf den Graphen angezeigt (Punkt ● bzw. Punkt ●).

[[jsxgraph input-ref-ans1="stateRef"]]



Geben Sie mithilfe der obigen Abbildung einen Entwicklungspunkt $(a, b) \in [-1, 1]^2$ des Taylorpolynoms $T_2 f$ von f an. Verschieben Sie dazu das Funktionsargument in der $x_1 x_2$-Ebene (Punkt ●) an die Position eines Entwicklungspunktes.

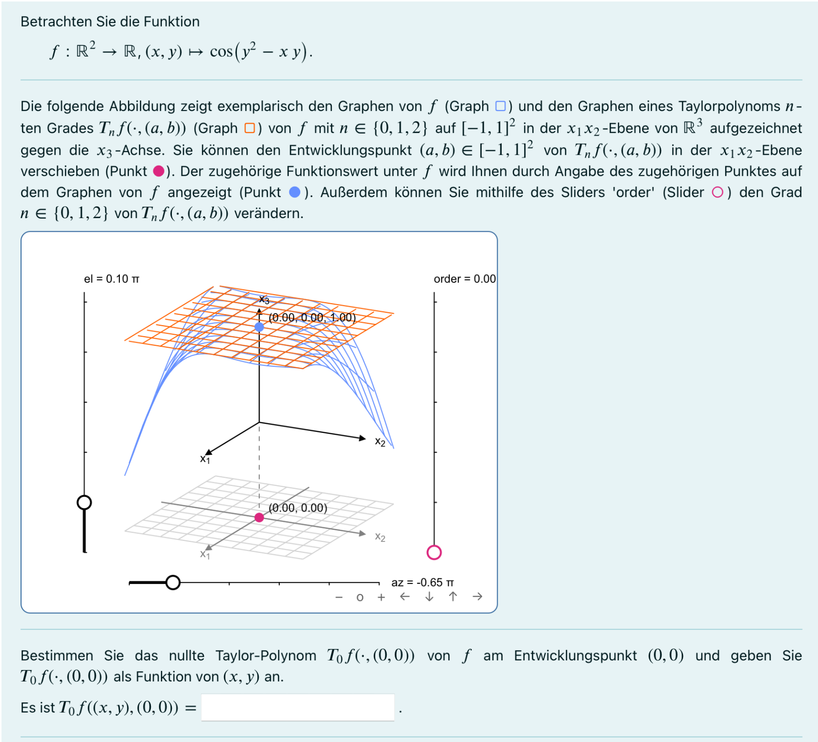
Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe wird der Entwicklungspunkt des Taylorpolynom zweiten Grades der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $$f(x, y) = T(a_1\, x^{b_1}\, y^{b_2} + a_2\, x^{c_1}\, y^{c_2})$$ im Einheitsquadrat $[-1, 1]^2$ im Definitionsbereich von f grafisch bestimmt.
Vorkenntnisse	Definition des Entwicklungspunktes bei der Bestimmung des Taylopolynoms, Kenntnis über die Darstellungsform von Graphen von Funktionen mehrere Veränderlicher
Randomisierung	Die Funktion T wird zufällig als Sinus- oder Kosinusfunktion gewählt. Der Vorfaktor a_1 wird als -1 und 1 gewählt. Der Vorfaktor a_2 wird als $-a_1$ oder 1 gewählt. Die Exponenten b_1, b_2 und c_1, c_2 werden zufällig als nicht negative ganze Zahlen mit $b_1 \neq c_1$, $b_1 + b_2 = 2$ und $c_1 + c_2 = 2$ gewählt. Der Entwicklungspunkt wird zufällig als $(\pm\frac{m}{5}, \pm\frac{n}{5})$ mit m gleich 2, 3 oder 4 und n gleich 2, 3 oder 4 gewählt.
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

4.3.2 Bestimmung von Taylorpolynomen 0. und 1. Grades

4.3.2.1 Taylorpolynom 0. Grades (1)

Tags: Approximation, Taylorpolynom, Entwicklungspunkt

Screenshot: (Stand 29.07.2024)


Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\, (x, y) \mapsto \cos\left(y^2 - x\,y\right).$$

Die folgende Abbildung zeigt exemplarisch den Graphen von f (Graph ☐) und den Graphen eines Taylorpolynoms n-ten Grades $T_n f(\cdot,(a,b))$ (Graph ☐) von f mit $n \in \{0,1,2\}$ auf $[-1,1]^2$ in der x_1x_2-Ebene von $\mathbb{R}^3$ aufgezeichnet gegen die x_3-Achse. Sie können den Entwicklungspunkt $(a,b) \in [-1,1]^2$ von $T_n f(\cdot,(a,b))$ in der x_1x_2-Ebene verschieben (Punkt ●). Der zugehörige Funktionswert unter f wird Ihnen durch Angabe des zugehörigen Punktes auf dem Graphen von f angezeigt (Punkt ●). Außerdem können Sie mithilfe des Sliders 'order' (Slider ○) den Grad $n \in \{0,1,2\}$ von $T_n f(\cdot,(a,b))$ verändern.

Bestimmen Sie das nullte Taylor-Polynom $T_0 f(\cdot,(0,0))$ von f am Entwicklungspunkt $(0,0)$ und geben Sie $T_0 f(\cdot,(0,0))$ als Funktion von (x,y) an.

Es ist $T_0 f((x,y),(0,0)) =$ ______ .

Autor: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: In dieser Aufgabe wird das Taylorpolynom nullten Grades der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = T(a_1\,x^{b_1}\,y^{b_2} + a_2\,x^{c_1}\,y^{c_2})$$

am Entwicklungspunkt $(0,0)$ bestimmt.

Vorkenntnisse: Definition des Taylopolynoms hinreichend oft differenzierbarer Funktionen, Berechnung partieller Ableitungen bis zur ersten Ordnung, Ableitungsregeln für polynomielle und trigonometrische Funktionen

Randomisierung: Die Funktion T wird zufällig als Sinus- oder Kosinusfunktion gewählt. Der Vorfaktor a_1 wird als -1 oder 1 gewählt. Der Vorfaktor a_2 wird als $-a_1$ oder 1 gewählt. Die Exponenten b_1, b_2 und c_1, c_2 werden zufällig als nicht negative ganze Zahlen mit $b_1 \neq c_1$, $b_1 + b_2 = 2$ und $c_1 + c_2 = 2$ gewählt.

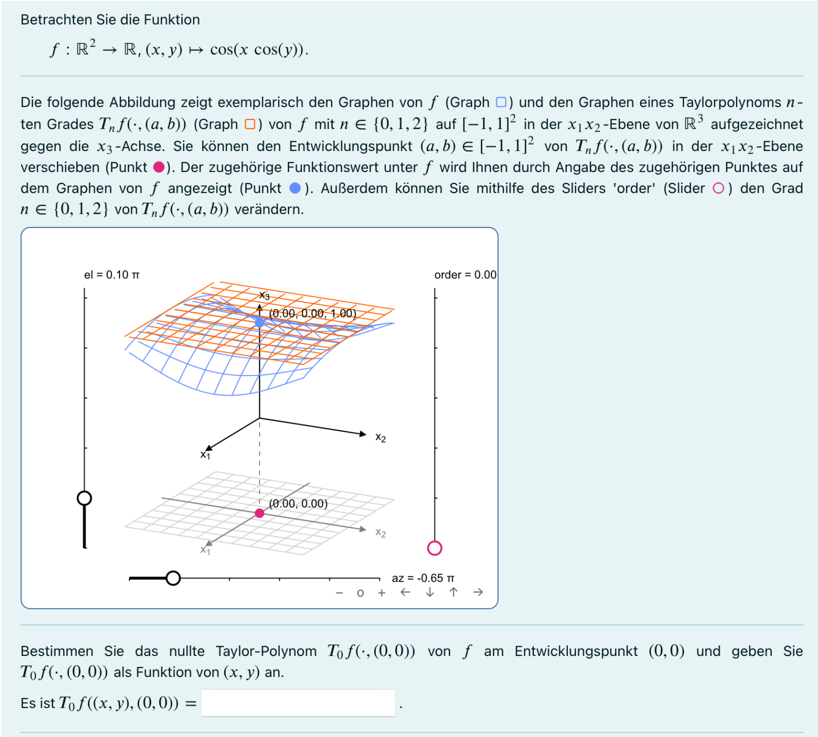
Anpassung: keine

Verbotene Wörter: diff, diffx, taylor, powerseries, ratcoeff

Sonderoption: Feedback unterdrücken: ja

4.3.2.2 Taylorpolynom 0. Grades (2)

Tags	Approximation, Taylorpolynom, Entwicklungspunkt
Screenshot	(Stand 29.07.2024)



Betrachten Sie die Funktion

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \cos(x\cos(y))$.

Die folgende Abbildung zeigt exemplarisch den Graphen von f (Graph ☐) und den Graphen eines Taylorpolynoms n-ten Grades $T_n f(\cdot, (a, b))$ (Graph ☐) von f mit $n \in \{0, 1, 2\}$ auf $[-1, 1]^2$ in der x_1x_2-Ebene von $\mathbb{R}^3$ aufgezeichnet gegen die x_3-Achse. Sie können den Entwicklungspunkt $(a, b) \in [-1, 1]^2$ von $T_n f(\cdot, (a, b))$ in der x_1x_2-Ebene verschieben (Punkt ●). Der zugehörige Funktionswert unter f wird Ihnen durch Angabe des zugehörigen Punktes auf dem Graphen von f angezeigt (Punkt ●). Außerdem können Sie mithilfe des Sliders 'order' (Slider ○) den Grad $n \in \{0, 1, 2\}$ von $T_n f(\cdot, (a, b))$ verändern.

Bestimmen Sie das nullte Taylor-Polynom $T_0 f(\cdot, (0, 0))$ von f am Entwicklungspunkt $(0, 0)$ und geben Sie $T_0 f(\cdot, (0, 0))$ als Funktion von (x, y) an.

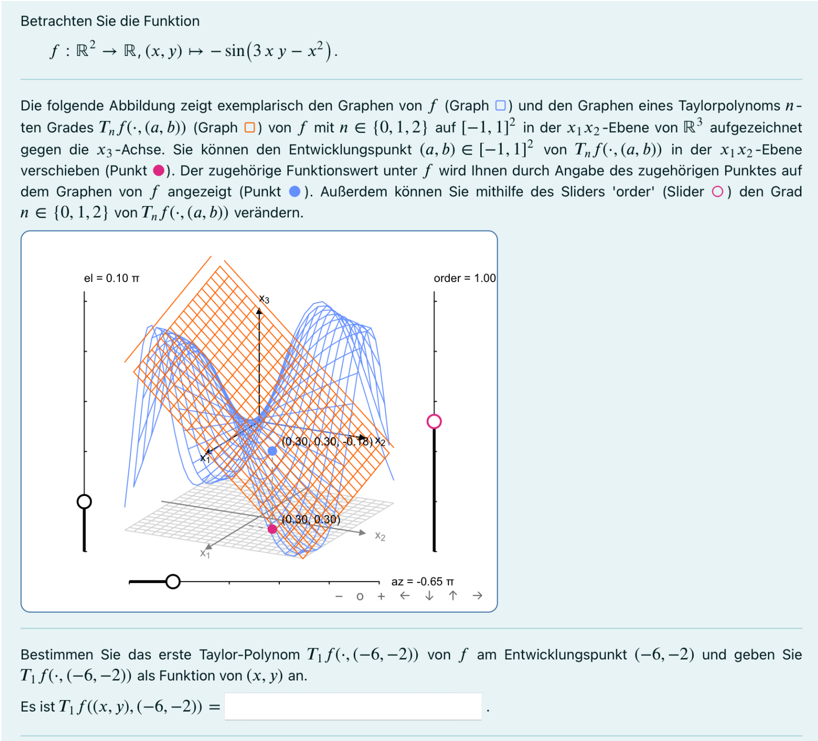
Es ist $T_0 f((x, y), (0, 0)) =$ ______ .

Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe wird das Taylorpolynom nullten Grades der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $$f(x, y) = a_1\, S(a_2\, x^{b_1}\, y^{b_2}\, T(a_3\, x^{b_2}\, y^{b_1}))$$ am Entwicklungspunkt $(0, 0)$ bestimmt.
Vorkenntnisse	Definition des Taylopolynoms hinreichend oft differenzierbarer Funktionen, Berechnung partieller Ableitungen bis zur ersten Ordnung, Ableitungsregeln für polynomielle und trigonometrische Funktionen
Randomisierung	Die Funktionen S und T werden jeweils zufällig als Sinus- oder Kosinusfunktion gewählt. Die Vorfaktoren a_1, a_2 und a_3 werden jeweils als -1 oder 1 gewählt. Die Exponenten b_1 und b_2 werden zufällig als nicht negative ganze Zahlen mit $b_1 + b_2 = 1$ gewählt.
Anpassung	keine
Verbotene Wörter	diff, diffx, taylor, powerseries, ratcoeff
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

4.3.2.3 Taylorpolynom 1. Grades (1)

Tags Approximation, Taylorpolynom, Entwicklungspunkt

Screenshot (Stand 29.07.2024)



Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto -\sin(3\,x\,y - x^2).$$

Die folgende Abbildung zeigt exemplarisch den Graphen von f (Graph ☐) und den Graphen eines Taylorpolynoms n-ten Grades $T_n f(\cdot, (a, b))$ (Graph ☐) von f mit $n \in \{0, 1, 2\}$ auf $[-1, 1]^2$ in der $x_1 x_2$-Ebene von $\mathbb{R}^3$ aufgezeichnet gegen die x_3-Achse. Sie können den Entwicklungspunkt $(a, b) \in [-1, 1]^2$ von $T_n f(\cdot, (a, b))$ in der $x_1 x_2$-Ebene verschieben (Punkt ●). Der zugehörige Funktionswert unter f wird Ihnen durch Angabe des zugehörigen Punktes auf dem Graphen von f angezeigt (Punkt ●). Außerdem können Sie mithilfe des Sliders 'order' (Slider ○) den Grad $n \in \{0, 1, 2\}$ von $T_n f(\cdot, (a, b))$ verändern.

Bestimmen Sie das erste Taylor-Polynom $T_1 f(\cdot, (-6, -2))$ von f am Entwicklungspunkt $(-6, -2)$ und geben Sie $T_1 f(\cdot, (-6, -2))$ als Funktion von (x, y) an.

Es ist $T_1 f((x, y), (-6, -2)) =$ ______ .

Autor Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz CC BY-SA 4.0

Thema In dieser Aufgabe wird das Taylorpolynom ersten Grades der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \sin\left(a_1\, x^{b_1}\, y^{b_2} + a_2\, x^{c_1}\, y^{c_2}\right)$$

am Entwicklungspunkt $(a_1\, a_2\, a_3, -a_3\, (a_1^2\, b_1\, \frac{c_2}{2} + a_2^2\, b_2\, \frac{c_1}{2}))$ bestimmt. Der Entwicklungspunkt ist als Nullstelle des polynomiellen Anteils von f und damit als Nullstelle von f gewählt.

Vorkenntnisse Definition des Taylopolynoms hinreichend oft differenzierbarer Funktionen, Berechnung partieller Ableitungen bis zur ersten Ordnung, Ableitungsregeln für polynomielle und trigonometrische Funktionen

Randomisierung Der Vorfaktor a_1 wird zufällig als ganze Zahl mit $2 \le |a_1| \le 3$ gewählt, der Vorfaktor a_2 wird zufällig als $-\operatorname{sign}(a_1)$ oder 1 gewählt und der Faktor a_3 wird zufällig als ganze Zahl mit $2 \le |a_3| \le 5$ gewählt. Die Exponenten b_1, b_2, c_1 und c_2 werden zufällig als nicht negative ganze Zahlen mit $b_1 \le 2$, $c_1 \le 2$, mit $1 \le b_1 + c_1 \le 3$ und mit $b_1 + b_2 = 2$, $c_1 + c_2 = 2$ gewählt.

Anpassung keine

Verbotene Wörter diff, diffx, taylor, powerseries, ratcoeff

Sonderoption Feedback unterdrücken: ja

4.3.2.4 Taylorpolynom 1. Grades (2)

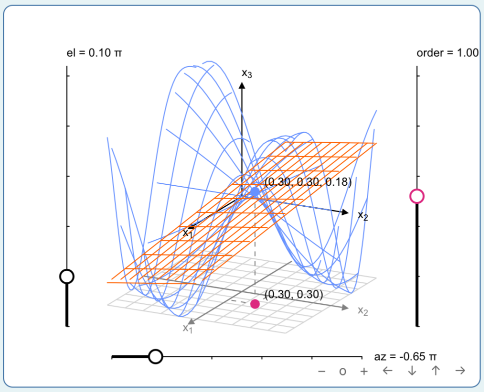
Tags Approximation, Taylorpolynom, Entwicklungspunkt

Screenshot (Stand 29.07.2024)

Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \sin\left(3\,x\,y - x^2\right).$$

Die folgende Abbildung zeigt exemplarisch den Graphen von f (Graph □) und den Graphen eines Taylorpolynoms n-ten Grades $T_n f(\cdot,(a,b))$ (Graph □) von f mit $n \in \{0,1,2\}$ auf $[-1,1]^2$ in der $x_1 x_2$-Ebene von $\mathbb{R}^3$ aufgezeichnet gegen die x_3-Achse. Sie können den Entwicklungspunkt $(a,b) \in [-1,1]^2$ von $T_n f(\cdot,(a,b))$ in der $x_1 x_2$-Ebene verschieben (Punkt ●). Der zugehörige Funktionswert unter f wird Ihnen durch Angabe des zugehörigen Punktes auf dem Graphen von f angezeigt (Punkt ●). Außerdem können Sie mithilfe des Sliders 'order' (Slider ○) den Grad $n \in \{0,1,2\}$ von $T_n f(\cdot,(a,b))$ verändern.



Bestimmen Sie das erste Taylor-Polynom $T_1 f(\cdot,(-5\sqrt{\pi},0))$ von f am Entwicklungspunkt $(-5\sqrt{\pi},0)$ und geben Sie $T_1 f(\cdot,(-5\sqrt{\pi},0))$ als Funktion von (x,y) an. Geben Sie dazu gegebenenfalls $\sqrt{\pi}$ als `sqrt(%pi)` ein.

Es ist $T_1 f((x,y),(-5\sqrt{\pi},0)) =$ ______ .

Autor Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz CC BY-SA 4.0

Thema In dieser Aufgabe wird das Taylorpolynom ersten Grades der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x,y) = \sin\left(a_1\, x^{b_1}\, y^{b_2} + a_2\, x^{c_1}\, y^{c_2}\right)$$

am Entwicklungspunkt $(\min\{b_1,c_1\}\, a_3\sqrt{\pi}, \min\{b_2,c_2\}\, a_3\sqrt{\pi})$ bestimmt. Der Entwicklungspunkt ist so gewählt, dass der polynomielle Anteil von f am Entwicklungspunkt eine Nullstelle der Sinusfunktion und damit eine Nullstelle von f ist.

Vorkenntnisse Definition des Taylopolynoms hinreichend oft differenzierbarer Funktionen, Berechnung partieller Ableitungen bis zur ersten Ordnung, Ableitungsregeln für polynomielle und trigonometrische Funktionen

Randomisierung Der Vorfaktor a_1 wird zufällig als ganze Zahl mit $2 \leq |a_1| \leq 3$ gewählt, der Vorfaktor a_2 wird zufällig als $-\operatorname{sign}(a_1)$ oder 1 gewählt und der Faktor a_3 wird zufällig als ganze Zahl mit $2 \leq |a_3| \leq 5$ gewählt. Die Exponenten b_1, b_2, c_1 und c_2 werden zufällig als nicht negative ganze Zahlen mit $b_1 \leq 2$, $c_1 \leq 2$, mit $1 \leq b_1 + c_1 \leq 3$ und mit $b_1 + b_2 = 2$, $c_1 + c_2 = 2$ gewählt.

Anpassung keine

Verbotene Wörter diff, diffx, taylor, powerseries, ratcoeff

Sonderoption Feedback unterdrücken: ja

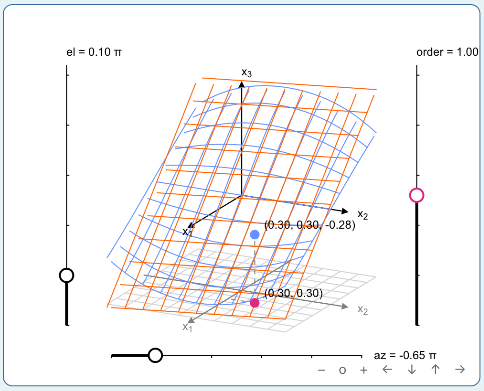
4.3.2.5 Taylorpolynom 1. Grades (3)

Tags	Approximation, Taylorpolynom, Entwicklungspunkt
Screenshot	(Stand 29.07.2024)

Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto -\sin(x\,\cos(y)).$$

Die folgende Abbildung zeigt exemplarisch den Graphen von f (Graph □) und den Graphen eines Taylorpolynoms n-ten Grades $T_n f(\cdot, (a, b))$ (Graph □) von f mit $n \in \{0, 1, 2\}$ auf $[-1, 1]^2$ in der $x_1 x_2$-Ebene von $\mathbb{R}^3$ aufgezeichnet gegen die x_3-Achse. Sie können den Entwicklungspunkt $(a, b) \in [-1, 1]^2$ von $T_n f(\cdot, (a, b))$ in der $x_1 x_2$-Ebene verschieben (Punkt ●). Der zugehörige Funktionswert unter f wird Ihnen durch Angabe des zugehörigen Punktes auf dem Graphen von f angezeigt (Punkt ●). Außerdem können Sie mithilfe des Sliders 'order' (Slider ○) den Grad $n \in \{0, 1, 2\}$ von $T_n f(\cdot, (a, b))$ verändern.



Bestimmen Sie das erste Taylor-Polynom $T_1 f(\cdot, (\pi, -\pi))$ von f am Entwicklungspunkt $(\pi, -\pi)$ und geben Sie $T_1 f(\cdot, (\pi, -\pi))$ als Funktion von (x, y) an. Geben Sie dazu gegebenenfalls $\sqrt{\pi}$ als `sqrt(%pi)` ein.

Es ist $T_1 f((x, y), (\pi, -\pi)) =$ ______ .

Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe wird das Taylorpolynom ersten Grades der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $$f(x, y) = a_1\, S(a_2\, x^{b_1}\, y^{b_2}\, T(a_3\, x^{b_2}\, y^{b_1}))$$ am Entwicklungspunkt $(\frac{d_1}{c_1}\,\pi, \frac{d_2}{c_1}\,\pi)$ bestimmt. Der Entwicklungspunkt ist so gewählt, dass der polynomielle Anteil $a_3\, x^{b_2}\, y^{b_1}$ am Entwicklungspunkt eine Nullstelle der Funktion T ist.
Vorkenntnisse	Definition des Taylopolynoms hinreichend oft differenzierbarer Funktionen, Berechnung partieller Ableitungen bis zur ersten Ordnung, Ableitungsregeln für polynomielle und trigonometrische Funktionen
Randomisierung	Die Funktionen S und T werden jeweils zufällig voneinander verschieden als Sinus- oder Kosinusfunktion gewählt. Die Vorfaktoren a_1, a_2 a_3, d_1 und d_2 werden jeweils zufällig als -1 oder 1 gewählt. Die Exponenten b_1 und b_2 werden zufällig nicht negative als ganze Zahlen mit $b_1 + b_2 = 1$ gewählt Die Exponenten c_1 und c_2 werden zufällig positive ganze als Zahlen mit $c_1 + c_2 = 3$ gewählt.
Anpassung	keine
Verbotene Wörter	diff, diffx, taylor, powerseries, ratcoeff
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

4.3.3 Bestimmung von Taylorpolynomen 2. und höheren Grades

4.3.3.1 Partielle Ableitungen und Taylorpolynome (1)

Tags: Taylorpolynome, 2D, partielle Ableitungen.

Screenshot: (Stand 07.09.2024)

Gegeben ist die bivariate Funktion

$$f(x,y) = -3\sin(x)\cosh(y)$$

und der Punkt

$$(x_0, y_0) = \left(\frac{3\pi}{2}, 0\right).$$

(a) Berechnen Sie zuerst die partiellen Ableitungen von $f(x,y)$ und werten Sie diese an der Stelle (x_0,y_0) aus, wobei $\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} f(x,y) = f^{(k,l)}(x,y)$ gilt. Geben Sie Brüche nicht in Dezimalform an.

(i) $f^{(0,0)}(x,y)\Big|_{(x,y)=(x_0,y_0)} =$,

(ii) $f^{(1,0)}(x,y)\Big|_{(x,y)=(x_0,y_0)} =$,

(iii) $f^{(2,0)}(x,y)\Big|_{(x,y)=(x_0,y_0)} =$,

(iv) $f^{(0,1)}(x,y)\Big|_{(x,y)=(x_0,y_0)} =$,

(v) $f^{(0,2)}(x,y)\Big|_{(x,y)=(x_0,y_0)} =$,

(vi) $f^{(1,1)}(x,y)\Big|_{(x,y)=(x_0,y_0)} =$,

(vii) $f^{(1,2)}(x,y)\Big|_{(x,y)=(x_0,y_0)} =$,

(viii) $f^{(2,1)}(x,y)\Big|_{(x,y)=(x_0,y_0)} =$.

(b) Geben Sie nun das Taylorpolynom $T_2 f(x,y;x_0,y_0)$ bis einschließlich zweiter Ordnung im Punkt (x_0,y_0) an. Verwenden Sie `%pi` für die Kreiszahl π im Ergebnisfeld. Geben Sie Brüche nicht in Dezimalform an.

Es ist $T_2 f(x,y;x_0,y_0) =$.

Autor: Michael Kubocz (RWTH)

Idee: Michael Kubocz

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: Eine bivariate Funktion, bestehend aus einem Produkt einer $\sin(x)$- und einer $\cosh(y)$-Funktion, ist gegeben. In Aufgabenteil (a) werden partielle Ableitungen bis zur dritten Ordnung berechnet und angegeben. In Aufgabenteil (b) wird das Taylorpolynom bis einschließlich zweiter Ordnung berechnet und angegeben.

Verbotene Wörter: diff, subst, powerseries, taylor.

Vorkenntnisse: Mehrdimensionale Taylorentwicklung, partielle Ableitungen, Satz von Schwarz.

Randomisierung: Der Vorfaktor der bivariaten Funktion wird zufällig und als ganzzahlig gewählt. Die x_0-Koordinate des Entwicklungspunktes wird als ein rationales Vielfaches von π zufällig gewählt.

Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja.

4.3.3.2 Partielle Ableitungen und Taylorpolynome (2)

Tags	Taylorpolynome, 2D, partielle Ableitungen.
Screenshot	(Stand 07.09.2024)

Gegeben ist die bivariate Funktion

$$f(x,y) = \frac{8\exp\left\{x^2\right\}}{1-y}$$

und der Punkt

$$(x_0, y_0) = (0, -5)\,.$$

(a) Berechnen Sie zuerst die partiellen Ableitungen von $f(x,y)$ und werten Sie diese an der Stelle (x_0, y_0) aus, wobei $\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial y^l} f(x,y) = f^{(k,l)}(x,y)$ gilt. Geben Sie Brüche nicht in Dezimalform an.

(i) $f^{(0,0)}(x,y)\Big|_{(x,y)=(x_0,y_0)} =$ ____,

(ii) $f^{(1,0)}(x,y)\Big|_{(x,y)=(x_0,y_0)} =$ ____,

(iii) $f^{(2,0)}(x,y)\Big|_{(x,y)=(x_0,y_0)} =$ ____,

(iv) $f^{(0,1)}(x,y)\Big|_{(x,y)=(x_0,y_0)} =$ ____,

(v) $f^{(0,2)}(x,y)\Big|_{(x,y)=(x_0,y_0)} =$ ____,

(vi) $f^{(1,1)}(x,y)\Big|_{(x,y)=(x_0,y_0)} =$ ____,

(vii) $f^{(1,2)}(x,y)\Big|_{(x,y)=(x_0,y_0)} =$ ____,

(viii) $f^{(2,1)}(x,y)\Big|_{(x,y)=(x_0,y_0)} =$ ____.

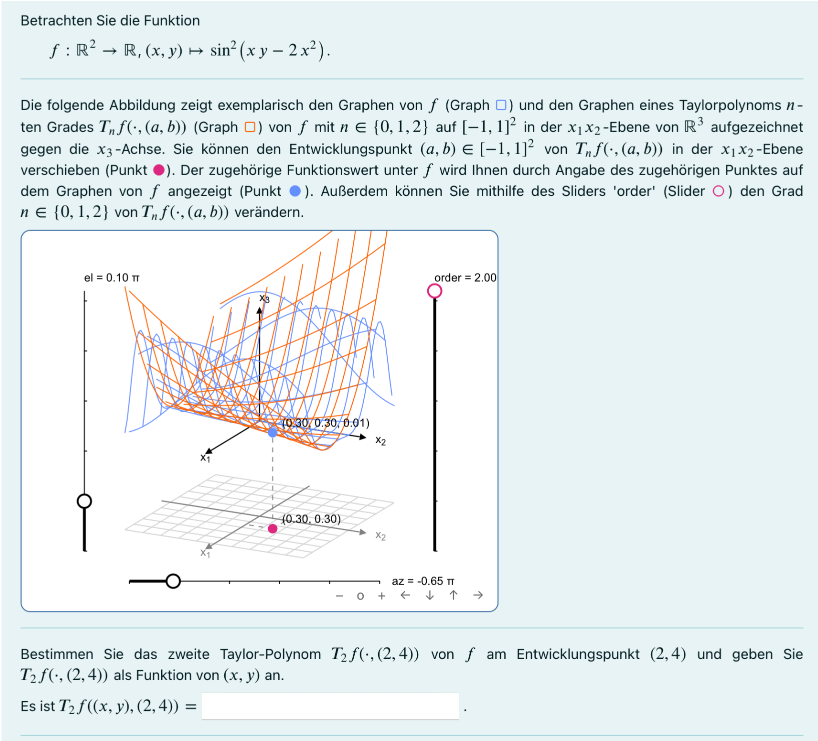
(b) Geben Sie nun das Taylorpolynom $T_2 f(x,y;x_0,y_0)$ bis einschließlich zweiter Ordnung im Punkt (x_0, y_0) an. Geben Sie Brüche nicht in Dezimalform an.

Es ist $T_2 f(x,y;x_0,y_0) =$ ____.

Autor	Michael Kubocz (RWTH)
Idee	Michael Kubocz
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	Eine bivariate Funktion, bestehend aus einem Verhältnis einer e-Funktion und einem Polynom ersten Grades, ist gegeben. In Aufgabenteil (a) werden partielle Ableitungen bis zur dritten Ordnung berechnet und angegeben. In Aufgabenteil (b) wird das Taylorpolynom bis einschließlich zweiter Ordnung berechnet und angegeben.
Verbotene Wörter	diff, subst, powerseries, taylor.
Vorkenntnisse	Mehrdimensionale Taylorentwicklung, partielle Ableitungen, Satz von Schwarz.
Randomisierung	Der Vorfaktor der e-Funktion und die y_0-Koordinate des Entwicklungspunktes wird zufällig und als ganzzahlig gewählt.
Anpassung	keine
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja.

4.3.3.3 Taylorpolynom 2. Grades (1)

Tags	Approximation, Taylorpolynom, Entwicklungspunkt
Screenshot	(Stand 29.07.2024)

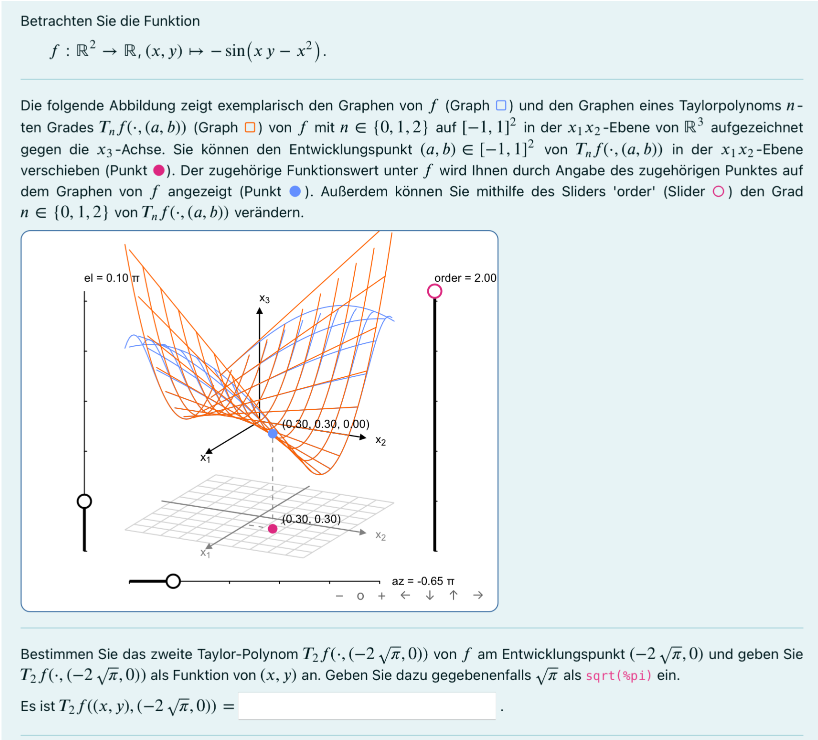


Autor	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)
Idee	Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger
Lizenz	CC BY-SA 4.0
Thema	In dieser Aufgabe wird das Taylorpolynom zweiten Grades der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $$f(x,y) = \sin^2(a_1\,x^{b_1}\,y^{b_2} + a_2\,x^{c_1}\,y^{c_2})$$ am Entwicklungspunkt $(a_1\,a_2\,a_3, -a_3\,(a_1^2\,b_1\,\frac{c_1}{2}))$ bestimmt. Der Entwicklungspunkt ist als Nullstelle des polynomiellen Anteils von f und damit als Nullstelle von f gewählt.
Vorkenntnisse	Definition des Taylopolynoms hinreichend oft differenzierbarer Funktionen, Berechnung partieller Ableitungen bis zur ersten Ordnung, Ableitungsregeln für polynomielle und trigonometrische Funktionen
Randomisierung	Die Vorfaktoren a_1 und a_3 werden zufällig als ganze Zahlen mit $\lvert a_1\rvert \neq \lvert a_3\rvert$ und $1 \leq \lvert a_i\rvert \leq 2$ für alle $i \in \{1,2\}$. Der Vorfaktor a_2 wird zufällig als $-\operatorname{sign}(a_1)$ oder 1 gewählt. Die Exponenten b_1, b_2, c_1 und c_2 werden zufällig als nicht negative ganze Zahlen mit $b_1 \leq 2$, $c_1 \leq 2$, mit $1 \leq b_1 + c_1 \leq 3$ und mit $b_1 + b_2 = 2$, $c_1 + c_2 = 2$ gewählt.
Anpassung	keine
Verbotene Wörter	diff, diffx, taylor, powerseries, ratcoeff
Sonderoption	Feedback unterdrücken: ja

4.3.3.4 Taylorpolynom 2. Grades (2)

Tags: Approximation, Taylorpolynom, Entwicklungspunkt

Screenshot: (Stand 29.07.2024)



Autor: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: In dieser Aufgabe wird das Taylorpolynom zweiten Grades der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \sin\left(a_1\, x^{b_1}\, y^{b_2} + a_2\, x^{c_1}\, y^{c_2}\right)$$

am Entwicklungspunkt $(\min\{b_1, c_1\}\, a_3 \sqrt{(\pi)}, \min\{b_2, c_2\}\, a_3 \sqrt{(\pi)})$ bestimmt. Der Entwicklungspunkt ist so gewählt, dass der polynomielle Anteil von f am Entwicklungspunkt eine Nullstelle der Sinusfunktion und damit von f ist.

Vorkenntnisse: Definition des Taylopolynoms hinreichend oft differenzierbarer Funktionen, Berechnung partieller Ableitungen bis zur ersten Ordnung, Ableitungsregeln für polynomielle und trigonometrische Funktionen

Randomisierung: Die Vorfaktoren a_1 und a_3 werden zufällig als ganze Zahlen mit $|a_1| \neq |a_3|$ und $1 \leq |a_i| \leq 2$ für alle $i \in \{1, 3\}$. Der Vorfaktor a_2 wird zufällig als $-\operatorname{sign}(a_1)$ oder 1 gewählt. Die Exponenten b_1, b_2, c_1 und c_2 werden zufällig als nicht negative ganze Zahlen mit $b_1 \leq 2$, $c_1 \leq 2$, mit $1 \leq b_1 + c_1 \leq 3$ und mit $b_1 + b_2 = 2$, $c_1 + c_2 = 2$ gewählt.

Anpassung: keine

Verbotene Wörter: diff, diffx, taylor, powerseries, ratcoeff

Sonderoption: Feedback unterdrücken: ja

4.3.3.5 Taylorpolynom 2. Grades (3)

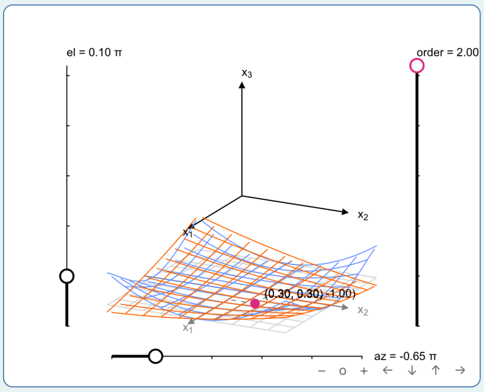
Tags Approximation, Taylorpolynom, Entwicklungspunkt

Screenshot (Stand 29.07.2024)

Betrachten Sie die Funktion

$$f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\,(x,y)\mapsto -\cos(\sin(x)\,y).$$

Die folgende Abbildung zeigt exemplarisch den Graphen von f (Graph □) und den Graphen eines Taylorpolynoms n-ten Grades $T_n f(\cdot,(a,b))$ (Graph □) von f mit $n\in\{0,1,2\}$ auf $[-1,1]^2$ in der x_1x_2-Ebene von $\mathbb{R}^3$ aufgezeichnet gegen die x_3-Achse. Sie können den Entwicklungspunkt $(a,b)\in[-1,1]^2$ von $T_n f(\cdot,(a,b))$ in der x_1x_2-Ebene verschieben (Punkt ●). Der zugehörige Funktionswert unter f wird Ihnen durch Angabe des zugehörigen Punktes auf dem Graphen von f angezeigt (Punkt ●). Außerdem können Sie mithilfe des Sliders 'order' (Slider ○) den Grad $n\in\{0,1,2\}$ von $T_n f(\cdot,(a,b))$ verändern.



Bestimmen Sie das zweite Taylor-Polynom $T_2 f(\cdot,(\pi,\frac{\pi}{2}))$ von f am Entwicklungspunkt $(\pi,\frac{\pi}{2})$ und geben Sie $T_2 f(\cdot,(\pi,\frac{\pi}{2}))$ als Funktion von (x,y) an. Geben Sie dazu gegebenenfalls $\sqrt{\pi}$ als `sqrt(%pi)` ein.

Es ist $T_2 f((x,y),(\pi,\frac{\pi}{2}))=$ ______ .

Autor Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz CC BY-SA 4.0

Thema In dieser Aufgabe wird das Taylorpolynom zweiten Grades der Funktion $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ mit

$$f(x,y)=a_1\,S(a_2\,x^{b_1}\,y^{b_2}\,T(a_3\,x^{b_2}\,y^{b_1}))$$

am Entwicklungspunkt $(d_1\,(\frac{b_1}{c_1}+\frac{b_2}{c_2})\,\pi,d_2\,(\frac{b_2}{c_1}+\frac{b_1}{c_2})\,\pi)$ bestimmt. Der Entwicklungspunkt ist so gewählt, dass der polynomielle Anteil von f am Entwicklungspunkt eine Nullstelle der Sinusfunktion und damit von f ist.

Vorkenntnisse Definition des Taylopolynoms hinreichend oft differenzierbarer Funktionen, Berechnung partieller Ableitungen bis zur ersten Ordnung, Ableitungsregeln für polynomielle und trigonometrische Funktionen

Randomisierung Die Funktionen S und T werden zufällig voneinander verschieden als Sinus- oder Kosinusfunktion gewählt. Die Vorfaktoren a_1, a_2, a_3, d_1 und d_2 werden als -1 oder 1 gewählt. Die Exponenten b_1 und b_2 werden zufällig als nicht negative ganze Zahlen mit $b_1+b_2=1$ gewählt.

Anpassung keine

Verbotene Wörter diff, diffx, taylor, powerseries, ratcoeff

Sonderoption Feedback unterdrücken: ja

4.3.3.6 Taylorpolynom n. Grades

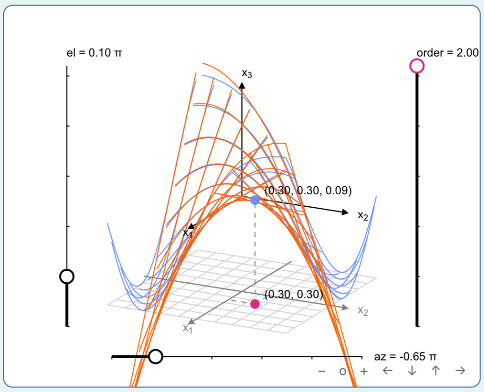
Tags: Approximation, Taylorpolynom, Entwicklungspunkt

Screenshot: (Stand 29.07.2024)

Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \left(-\sin\left(y^2 - 2\,x\,y\right)\right)^{n+1}.$$

Die folgende Abbildung zeigt exemplarisch den Graphen von f (Graph □) für $n = 1$ und den Graphen eines Taylorpolynoms m-ten Grades $T_m f(\cdot, (a, b))$ (Graph □) von f mit $m \in \{0, 1, 2\}$ auf $[-1, 1]^2$ in der $x_1 x_2$-Ebene von $\mathbb{R}^3$ aufgezeichnet gegen die x_3-Achse. Sie können den Entwicklungspunkt $(a, b) \in [-1, 1]^2$ von $T_m f(\cdot, (a, b))$ in der $x_1 x_2$-Ebene verschieben (Punkt ●). Der zugehörige Funktionswert unter f wird Ihnen durch Angabe des zugehörigen Punktes auf dem Graphen von f angezeigt (Punkt ●). Außerdem können Sie mithilfe des Sliders 'order' (Slider ○) den Grad $m \in \{0, 1, 2\}$ von $T_m f(\cdot, (a, b))$ verändern.



Bestimmen Sie das n-te Taylor-Polynom $T_n f(\cdot, (4, 8))$ von f am Entwicklungspunkt $(4, 8)$ und geben Sie $T_n f(\cdot, (4, 8))$ als Funktion von (x, y) an.

Es ist $T_n f((x, y), (4, 8)) =$ ______ .

Autor: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger (RUB)

Idee: Benjamin Herbert Schulz-Rosenberger

Lizenz: CC BY-SA 4.0

Thema: In dieser Aufgabe wird das Taylorpolynom zweiten Grades der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = \sin^{n+1}(a_1\, x^{b_1}\, y^{b_2} + a_2\, x^{c_1}\, y^{c_2})$$

am Entwicklungspunkt $(a_1\, a_2\, a_3, -a_3\,(a_1^2\, b_1\, \frac{c_2}{2} + a_2^2\, b_2\, \frac{c_1}{2}))$ bestimmt. Der Entwicklungspunkt ist als Nullstelle des polynomiellen Anteils von f und damit als Nullstelle von f gewählt.

Vorkenntnisse: Definition des Taylopolynoms hinreichend oft differenzierbarer Funktionen, Berechnung partieller Ableitungen bis zur ersten Ordnung, Ableitungsregeln für polynomielle und trigonometrische Funktionen

Randomisierung: Die Vorfaktoren a_1 und a_3 werden jeweils zufällig als ganze Zahlen mit $2 \leq |a_i| \leq 3$ für alle $i \in \{1, 3\}$. Der Vorfaktor a_2 wird zufällig als $-\operatorname{sign}(a_1)$ oder 1 gewählt. Die Exponenten b_1, b_2, c_1 und c_2 werden zufällig als nicht negative ganze Zahlen mit $b_1 \leq 2$, $c_1 \leq 2$, mit $1 \leq b_1 + c_1 \leq 3$ und mit $b_1 + b_2 = 2$, $c_1 + c_2 = 2$ gewählt.

Anpassung: keine

Verbotene Wörter: diff, diffx, taylor, powerseries, ratcoeff

Sonderoption: Feedback unterdrücken: ja

II Programmieraufgaben (Jupyter-Notebooks)

1 Jupyter-Notebooks

1.1 Grundlagen

Inhaltsverzeichnis

◀ ▲ ▶

1.1.1 Eine Einführung in Python und Jupyter Notebooks (Teil 1)

Screenshot (Stand 26.09.2024)

IV. Schleifen

In der Mathematik müssen Vektoren nicht immer dreidimensional sein. Unter der Voraussetzung, dass die Vektorlänge ähnlich wie oben berechnet werden kann, wie könnte man die Länge eines zehndimensionalen Vektors mit minimaler Schreibarbeit berechnen? Die Antwort: **Schleifen!** Jedes mal, wenn eine größere Anzahl an ähnlichen Schritten ausgeführt werden soll, kann man mit Schleifen die Wiederholungen automatisieren. Eine der einfachsten Schleifen ist die *while*-Schleife. Sie wiederholt einen Satz an Anweisungen, solange die **Schleifenbedingung** erfüllt ist. Hier ein einfaches Beispiel:

```
i = 0
while i < 3:
    '''
    Schleifenanweisungen sind immer eingerückt. Dies geschieht in der Regel automatisch. Alle eingerückten Z
    Nach den Schleifenanweisungen muss darauf geachtet werden, die Zeilen wieder nach links zu schieben.
    '''
    print(i)
    i = i + 1
```

Wie arbeitet eine solche Schleife? Zunächst wird eine Variable i definiert und auf null gesetzt. Dann wird die Schleife initialisiert: Sie soll die Anweisungen `print(i)` und `i = i + 1` wiederholen, solange die Variable i kleiner als 3 ist. Im ersten Durchlauf ist $i = 0$; die Schleifenbedingung ist offensichtlich erfüllt und damit wird i durch den `print()` -Befehl ausgegeben. Danach wird i um 1 erhöht. Die Schleife springt wieder an ihren Anfang und überprüft, ob i $(= 1)$ kleiner 3 ist. Dies ist wieder wahr und die Anweisungen werden erneut ausgeführt. Das alles wiederholt sich, solange bis $i = 3$ ist. Dann ist die Schleifenbedingung nicht mehr erfüllt, die Schleife wird abgebrochen und der Code ganz normal fortgesetzt.

Achtung! Was passiert, wenn der Befehl `i = i + 1` nicht existieren würde? Richtig, die Schleife wird endlos weiterlaufen und Python wird immer wieder die Zahl 0 ausgeben. Sollte so etwas passieren, kann das Programm über das *Stopp*-Symbol (■) in der oberen Leiste abgebrochen werden.

Wir haben nun ein Werkzeug gefunden, um die Länge des zehndimensionalen Vektors ohne viel Schreibaufwand zu berechnen:

```
u = [2, 1.1, 0, -1.3, 0.4, -3.2, 1.8, 0, -4.3, 2]

u_sqrd, i = 0, 0 # sqrd -> "squared"
while i < len(u): # Die möglichen Indices der Liste sind 0,1,2,...,9
    u_sqrd = u_sqrd + u[i]**2
    i = i + 1

abs_u = u_sqrd**(1/2)
print(round(abs_u, 2))
```

Einsatz:	Selbststudium
Anzahl	1
Vorkenntnisse	grundlegende Programmierkenntnisse
math. Vorkenntnisse	Schulmathematik
Inhalt	grundlegende Rechenoperationen und Variablen, Listen, Schleifen, Funktionen, Texte in Python, if-Abfragen
Aufgaben	3
zusätzl. Dateien	`IMG_Experiment.png`, `IMG_NeuronalesNetzwerk.PNG`
zusätzl. Biblioth.	keine

1.1.2 Eine Einführung in Python und Jupyter Notebooks (Teil 2)

Screenshot (Stand 26.09.2024)

Viele grundlegende mathematische Funktionen sind in Python nicht standardmäßig enthalten. Falls wir die Exponentialfunktion $\exp(x) = e^x$ für ein Programm benötigen würden, müssten wir diese komplett selbst definieren. Mit unserem bisherigen Wissensstand ist dies sogar möglich!

Aufgabe: Definieren Sie eine Funktion `MyExp(x)`, welche den Zahlenwert von $\exp(x)$ für die Eingabevariable `x` ausgibt. Dazu benötigen Sie eine Hilfsfunktion `MyFactorial(n)`, welche die Fakultätsfunktion $n!$ repräsentiert. Die Exponentialfunktion ist wie folgt definiert:

$$\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\,, \quad n! = n \times (n-1) \times \cdots \times 2 \times 1$$

Tipp: Denken Sie an die Aufgabe zur geometrischen Reihe aus dem ersten Notebook zurück! Was ist ein sinnvoller "Cut-Off" für die unendliche Reihe?

```
def MyFactorial(n):
    result = 1
    for i in range(2, n + 1):
        result = result * i
    return result

def MyExp(x):
    Nmax = 100
    result = 0
    for n in range(0, Nmax):
        result = result + x**n / MyFactorial(n)
    return result

for i in range(0, 4):
    print("MyExp(%s) = %s" %(i, round(MyExp(i), 3)))
```

```
MyExp(0) = 1.0
MyExp(1) = 2.718
MyExp(2) = 7.389
MyExp(3) = 20.086
```

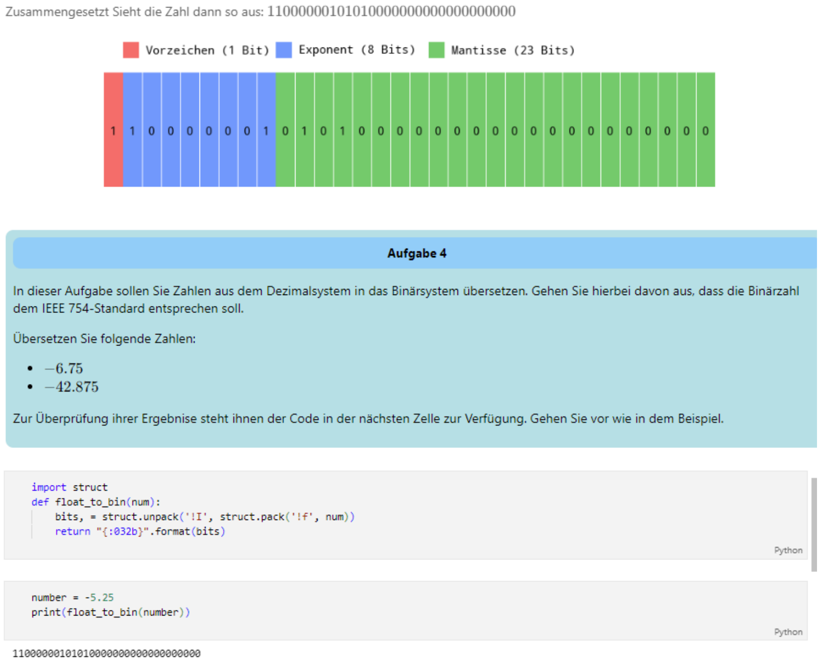
Man kann leicht einsehen, dass es nicht zielführend ist jede mathematische Standardfunktion die man braucht auf diese Art und Weise selbst zu definieren. Im letzten Notebook haben wir gegen Ende über Sortieralgorithmen gesprochen und gesehen wie aufwendig solche Algorithmen werden können. Mit sogenannten **Bibliotheken** können wir einen großen Teil der Funktionen die wir für unsere Codes brauchen importieren ohne uns viel mit deren Definitionen auseinanderzusetzen. Die erste Bibliothek die wir kennenlernen werden ist **NumPy**.

NumPy ist eine Bibliothek die Werkzeuge für **num**erisches Programmieren in **Py**thon bereitstellt. Dazu gehören mathematische Standardfunktionen und -konstanten, der Datentyp *ndarray* mit dem Vektor- und Matritzenoperationen dargestellt werden können, sowie Funktionen zur Datenanalyse und vieles mehr. Mit NumPy können wir nun die Exponentialfunktion ganz einfach importieren:

Einsatz:	Selbststudium
Anzahl	1
Vorkenntnisse	grundlegende Programmierkenntnisse
math. Vorkenntnisse	Schulmathematik
Inhalt	NumPy arrays, Plots mit Matplotlib
Aufgaben	1
zusätzl. Dateien	`Figure.pdf`, `Messwerte.npy`
zusätzl. Biblioth.	keine

1.1.3 Zahlen in der Informatik

Screenshot	(Stand 28.10.2024)



Einsatz:	Selbststudium
Anzahl	1
Vorkenntnisse	grundlegende Programmierkenntnisse
math. Vorkenntnisse	Schulmathematik
Inhalt	grundlegendes Verständnis für die Zahlendarstellung in Computern (IEEE-Format) und dadurch auftretende numerische Fehler
Aufgaben	4
zusätzl. Dateien	`ieee754_representation_defaultfont_300dpi.png, ieee.py`
zusätzl. Biblioth.	struct

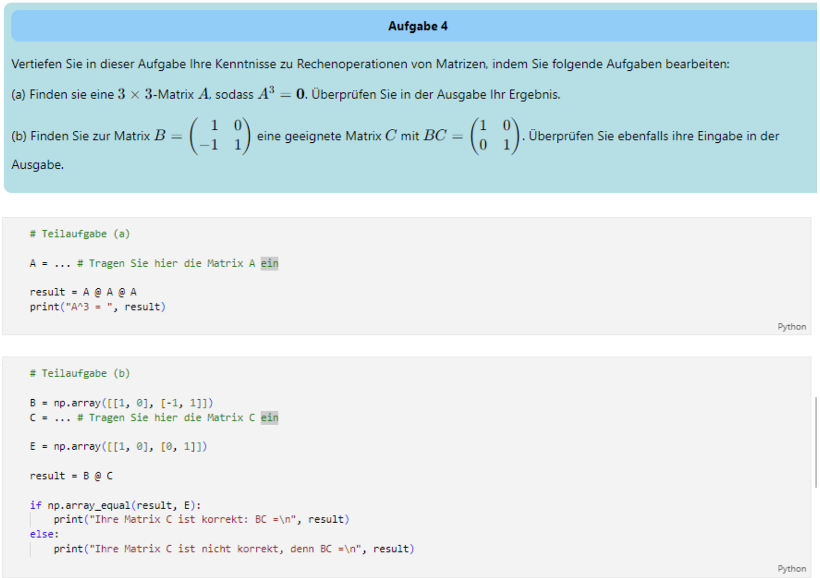
1.2 Matrizen und Lineare Abbildungen

Inhaltsverzeichnis

◀ ▲ ▶

1.2.1 Matrizenrechnung mit Python

Screenshot (Stand 29.10.2024)

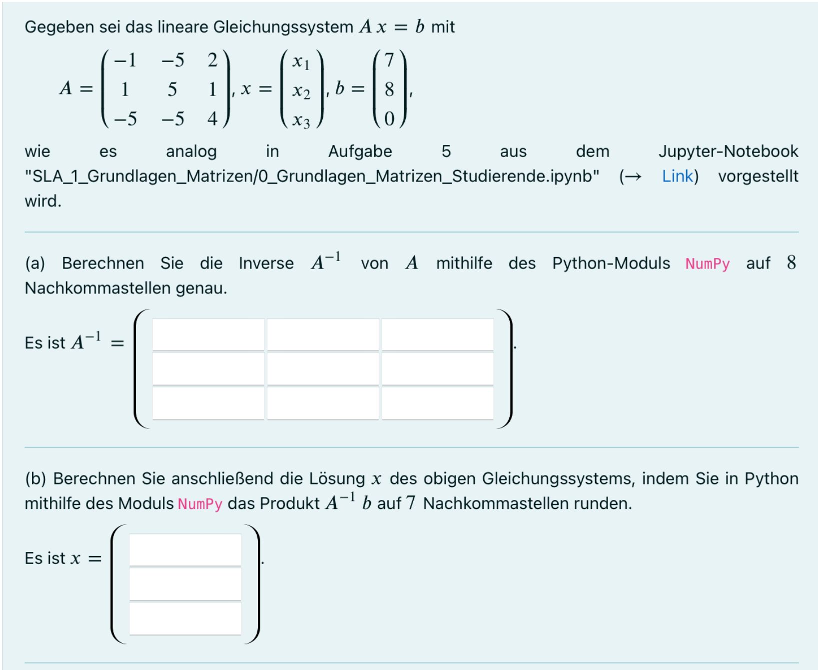


Einsatz:	Selbststudium
Anzahl	1
Vorkenntnisse	grundlegende Programmierkenntnisse
math. Vorkenntnisse	erste Begriffe zu linearer Algebra, insbesondere Matrizenrechnung
Inhalt	Neben der Wiederholung von Vorlesungsinhalten zu Matrizen steht die Umsetzung von Rechenoperationen an Matrizen in Python im Vordergrund
Aufgaben	5 (davon ist eine mit einer STACK-Aufgabe verknüpft, siehe unten)
zusätzl. Dateien	keine
zusätzl. Biblioth.	keine

1.2.1.1 Lineares Gleichungssystem in Matrix-Vektor-Schreibweise

Tags: Matrix, Transposition, symmetrisch, orthogonal

Screenshot: (Stand 30.09.2024)


Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $A\,x = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -5 & 2 \\ 1 & 5 & 1 \\ -5 & -5 & 4 \end{pmatrix},\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix},$$

wie es analog in Aufgabe 5 aus dem Jupyter-Notebook "SLA_1_Grundlagen_Matrizen/0_Grundlagen_Matrizen_Studierende.ipynb" (→ Link) vorgestellt wird.

(a) Berechnen Sie die Inverse A^{-1} von A mithilfe des Python-Moduls `NumPy` auf 8 Nachkommastellen genau.

Es ist $A^{-1} = $ ( ).

(b) Berechnen Sie anschließend die Lösung x des obigen Gleichungssystems, indem Sie in Python mithilfe des Moduls `NumPy` das Produkt $A^{-1}\,b$ auf 7 Nachkommastellen runden.

Es ist $x = $ ( ).

Thema: In dieser Aufgabe ist ein lineares Gleichungssystem in der Matrix-Vektor-Schreibweise

$$A \cdot x = b$$

gegeben. In Aufgabenteil (a) soll mithilfe des `Python`-Moduls `NumPy` die Inverse A^{-1} von$A$ berechnet und auf 8 Nachkommastellen genau angegeben werden. In Aufgabenteil (b) soll der Lösungsvektor $x = A^{-1} \cdot b$ mit `NumPy` auf 7 Nachkommastellen gerundet werden.

Vorkenntnisse: symmetrische Matrizen, orthogonale Matrizen, Invertierbarkeit von Matrizen

Randomisierung: Die Matrix A in Aufgabenteil (a) ist randomisiert.

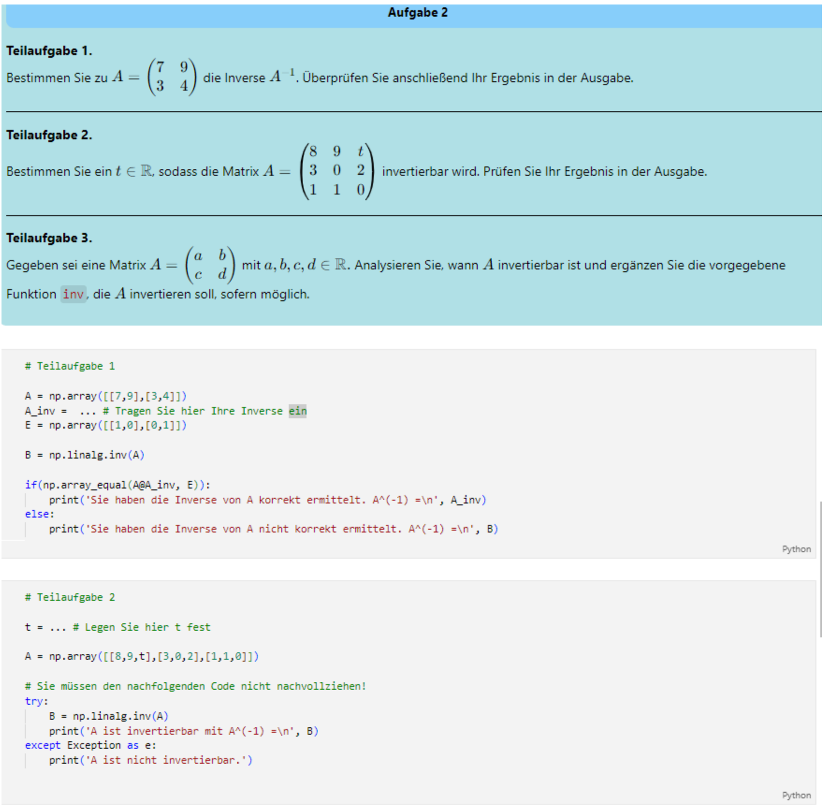
Anpassung: Die Matrizen in allen Aufgabenteilen können angepasst werden.

Sonderoption: Abzüge: 0

Feedback unterdrücken: ja

1.2.2 Weitere Operationen auf Matrizen mithilfe von Python

Screenshot (Stand 29.10.2024)



Aufgabe 2

Teilaufgabe 1.
Bestimmen Sie zu $A = \begin{pmatrix} 7 & 9 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ die Inverse A^{-1}. Überprüfen Sie anschließend Ihr Ergebnis in der Ausgabe.

Teilaufgabe 2.
Bestimmen Sie ein $t \in \mathbb{R}$, sodass die Matrix $A = \begin{pmatrix} 8 & 9 & t \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ invertierbar wird. Prüfen Sie Ihr Ergebnis in der Ausgabe.

Teilaufgabe 3.
Gegeben sei eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Analysieren Sie, wann A invertierbar ist und ergänzen Sie die vorgegebene Funktion `inv`, die A invertieren soll, sofern möglich.

```python
# Teilaufgabe 1

A = np.array([[7,9],[3,4]])
A_inv =  ... # Tragen Sie hier Ihre Inverse ein
E = np.array([[1,0],[0,1]])

B = np.linalg.inv(A)

if(np.array_equal(A@A_inv, E)):
    print('Sie haben die Inverse von A korrekt ermittelt. A^(-1) =\n', A_inv)
else:
    print('Sie haben die Inverse von A nicht korrekt ermittelt. A^(-1) =\n', B)
```

Python

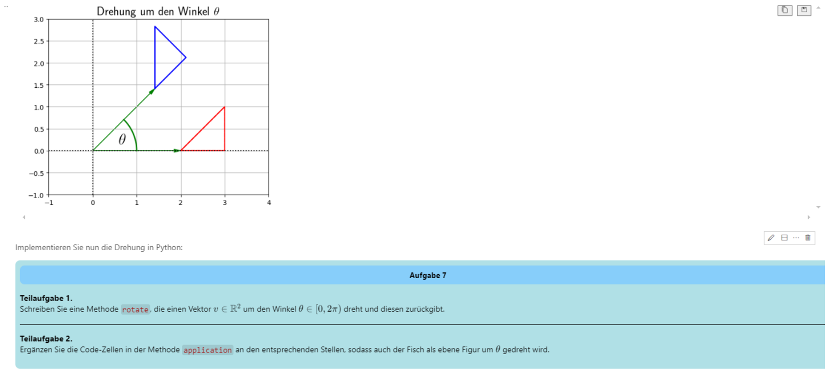
```python
# Teilaufgabe 2

t = ... # Legen Sie hier t fest

A = np.array([[8,9,t],[3,0,2],[1,1,0]])

# Sie müssen den nachfolgenden Code nicht nachvollziehen!
try:
    B = np.linalg.inv(A)
    print('A ist invertierbar mit A^(-1) =\n', B)
except Exception as e:
    print('A ist nicht invertierbar.')
```

Python

Einsatz:	Selbststudium
Anzahl	1
Vorkenntnisse	grundlegende Programmierkenntnisse, Matrizenmultiplikation mit Python
math. Vorkenntnisse	erste Begriffe zu linearer Algebra, insbesondere Matrizenrechnung
Inhalt	Transposition und Inversion von Matrizen werden wiederholt und die Python-Befehle dafür erlernt.
Aufgaben	2
zusätzl. Dateien	keine
zusätzl. Biblioth.	keine

1.2.3 Lineare Abbildungen

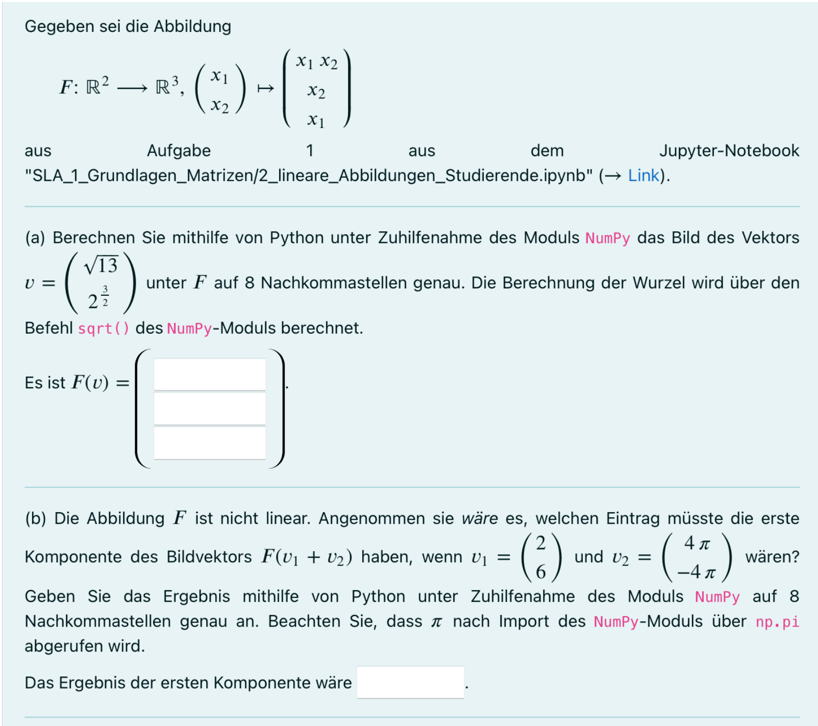
Screenshot	(Stand 29.10.2024)



Einsatz:	Selbststudium
Anzahl	
Vorkenntnisse	
math. Vorkenntnisse	Grundkenntnisse zu linearen Abbildungen
Inhalt	Veranschaulichung linearer Abbildungen im zweidimensionalen Anschauungsraum an Hand von Drehungen, Spiegelungen, Scherungen und Verschiebungen einer einfachen Figur, Umsetzung in Python
Aufgaben	7 (davon 3 mit dazugehöriger STACK-Aufgabe, siehe unten)
zusätzl. Dateien	textttScherung.png,
zusätzl. Biblioth.	keine

1.2.3.1 Lineare Abbildungen (1)

Tags	Python, Lineare Abbildung, Jupyter-Notebook
Screenshot	(Stand 30.09.2024)



Gegeben sei die Abbildung

$$F\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1\, x_2 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

aus Aufgabe 1 aus dem Jupyter-Notebook "SLA_1_Grundlagen_Matrizen/2_lineare_Abbildungen_Studierende.ipynb" (⟶ Link).

(a) Berechnen Sie mithilfe von Python unter Zuhilfenahme des Moduls NumPy das Bild des Vektors $v = \begin{pmatrix} \sqrt{13} \\ 2^{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}$ unter F auf 8 Nachkommastellen genau. Die Berechnung der Wurzel wird über den Befehl `sqrt()` des NumPy-Moduls berechnet.

Es ist $F(v) = \begin{pmatrix} \square \\ \square \\ \square \end{pmatrix}$.

(b) Die Abbildung F ist nicht linear. Angenommen sie *wäre* es, welchen Eintrag müsste die erste Komponente des Bildvektors $F(v_1 + v_2)$ haben, wenn $v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 4\,\pi \\ -4\,\pi \end{pmatrix}$ wären? Geben Sie das Ergebnis mithilfe von Python unter Zuhilfenahme des Moduls NumPy auf 8 Nachkommastellen genau an. Beachten Sie, dass π nach Import des NumPy-Moduls über `np.pi` abgerufen wird.

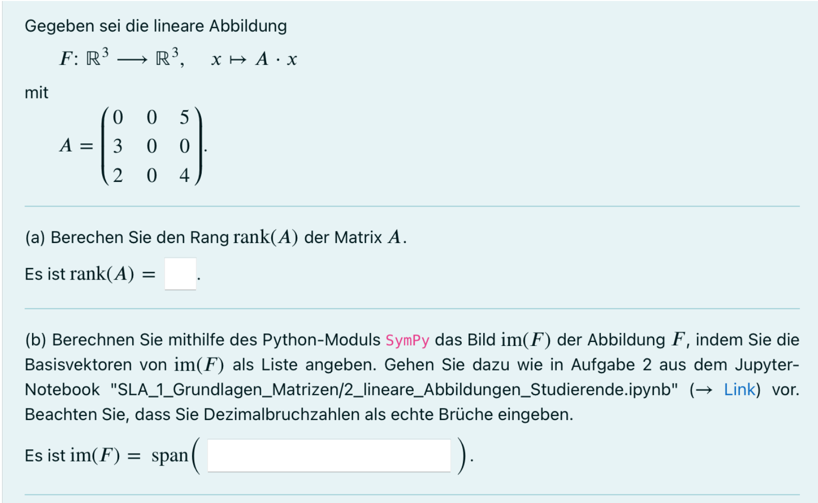
Das Ergebnis der ersten Komponente wäre $\square$.

Thema	In dieser Aufgabe ist die Abbildung $$F\colon\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3,\quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \cdot x_2 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$ gegeben. In Aufgabenteil (a) soll unter Zuhilfenahme des `Python`-Moduls `NumPy` das Bild eines gegebenen Vektors v auf 8 Nachkommastellen genau berechnet und angegeben werden. In Aufgabenteil (b) soll für zwei gegebene Vektoren Vektoren v_1 und v_2 die erste Komponente des Bildvektors $F(v_1+v_2)$ angegeben werden, wenn man annimmt, dass die Abbildung F linear wäre.
Vorkenntnisse	Lineare Abbildung, Linearität, Python-Grundlagen, NumPy
Randomisierung	Der Vektor v in Aufgabenteil (a) ist randomisiert. Der Vektor v_1 in Aufgabenteil (b) ist randomisiert.
Anpassung	Die Abbildung F kann angepasst werden. Hinsichtlich Aufgabenteil (b) sollte F dann nicht linear sein.
Sonderoption	Abzüge: 0 Feedback unterdrücken: ja

1.2.3.2 Lineare Abbildungen (2)

Tags Python, Lineare Abbildung, Jupyter-Notebook

Screenshot (Stand 30.09.2024)



Gegeben sei die lineare Abbildung

$$F\colon \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad x \mapsto A \cdot x$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechen Sie den Rang $\operatorname{rank}(A)$ der Matrix A.

Es ist $\operatorname{rank}(A) =$.

(b) Berechnen Sie mithilfe des Python-Moduls `SymPy` das Bild $\operatorname{im}(F)$ der Abbildung F, indem Sie die Basisvektoren von $\operatorname{im}(F)$ als Liste angeben. Gehen Sie dazu wie in Aufgabe 2 aus dem Jupyter-Notebook "SLA_1_Grundlagen_Matrizen/2_lineare_Abbildungen_Studierende.ipynb" (→ Link) vor. Beachten Sie, dass Sie Dezimalbruchzahlen als echte Brüche eingeben.

Es ist $\operatorname{im}(F) = \operatorname{span}\Big(\quad \Big)$.

Thema In dieser Aufgabe ist die lineare Abbildung

$$F\colon\ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, \quad x \mapsto A \cdot x$$

für eine Matrix

$$A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

gegeben. In Aufgabenteil (a) soll der Rang $\operatorname{rank}(A)$ der Matrix A bestimmt werden. Dabei ist ausgeschlossen, dass es sich um die Nullmatrix bei A handelt. In Aufgabenteil (b) geht es darum, unter Zuhilfenahme des `Python`-Moduls `SymPy` das Bild $\operatorname{im}(F)$ der Abbildung F zu bestimmen und als Liste anzugeben.

Vorkenntnisse Lineare Abbildung, Linearität, Python-Grundlagen, SymPy

Randomisierung Die Matrix A ist randomisiert.

Anpassung Die Abbildung F kann angepasst werden. Der Rang $\operatorname{rank}(A)$ der Matrix A kann angepasst werden

Sonderoption Abzüge: 0

Feedback unterdrücken: ja

1.2.3.3 Lineare Abbildungen (3)

Tags: Python, Lineare Abbildung, Inverse, Jupyter-Notebook

Screenshot: (Stand 30.09.2024)

Gegeben sei die lineare Abbildung

$$F\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad x \mapsto A \cdot x$$

mit

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 10 & -5 \end{pmatrix}.$$

Die Abbildung F ist invertierbar. Berechnen Sie mithilfe des `NumPy`-Moduls in Python die Matrix B mit $F^{-1}(x) = B \cdot x$ für alle $x \in \mathbb{R}^2$. Betrachten Sie dazu Aufgabe 3 aus dem Jupyter-Notebook "SLA_1_Grundlagen_Matrizen/2_lineare_Abbildungen_Studierende.ipynb" (→ Link). Geben Sie das Ergebnis als Dezimalbruchzahl auf 8 Nachkommastellen genau an.

Es ist $B = \begin{pmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{pmatrix}$.

Thema: In dieser Aufgabe ist eine lineare Abbildung

$$F\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad x \mapsto A \cdot x$$

mit einer invertierbaren Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gegeben. Es soll die Matrix B mit

$$F^{-1}(x) = B \cdot x$$

bestimmt werden, indem mithilfe des `NumPy`-Moduls in `Python` die Inverse von A berechnet und angegeben wird.

Vorkenntnisse: Lineare Abbildung, Inverse einer Matrix, Python Grundlagen, NumPy

Randomisierung: Die Matrix A ist randomisiert.

Anpassung: keine

Sonderoption: Abzüge: 0
Feedback unterdrücken: ja

1.2.4 Anwendung: Lineare Regression

Screenshot (Stand 30.10.2024)

Ein Einblick in den Datensatz:

```
data = pd.read_csv("starbucks.csv")
print(data.shape)
data.head()
```

```
(77, 8)
```

	Unnamed: 0	item	calories	fat	carb	fiber	protein	type
0	1	8-Grain Roll	350	8.0	67	5	10	bakery
1	2	Apple Bran Muffin	350	9.0	64	7	6	bakery
2	3	Apple Fritter	420	20.0	59	0	5	bakery
3	4	Banana Nut Loaf	490	19.0	75	4	7	bakery
4	5	Birthday Cake Mini Doughnut	130	6.0	17	0	0	bakery

Aufräumen des Datensatzes sowie dem Hinzufügen der Variable für den y-Achsenabschnitt.

```
data.dropna(inplace=True)
data["Intercept"] = 1
data.drop(["Unnamed: 0","item","type"],axis=1,inplace=True)
print(data.shape)
data.head()
```

```
(77, 6)
```

	calories	fat	carb	fiber	protein	Intercept
0	350	8.0	67	5	10	1
1	350	9.0	64	7	6	1
2	420	20.0	59	0	5	1
3	490	19.0	75	4	7	1
4	130	6.0	17	0	0	1

Als abhängige Varibale wird die Spalte `calories` verwendet. Damit wird Y diese Spalte repräsentieren und X wird jede andere Spalte beinhalten.

```
Y = data["calories"].values
X = data[data.keys().drop("calories")].values
```

Einsatz: Selbststudium

Anzahl 1

Vorkenntnisse grundlegende Programmierkenntnisse in Python

math. Vorkenntnisse grundlegende Kenntnisse zu Matrizen, insbesondere Matrizenmultiplikation, Transposition

Inhalt Mit einfachen Methoden der linearen Algebra und an Hand eines einfachen Datensatzes wird ein lineares Regressionsproblem gelöst. Die Lösung wird mit der durch eine Standard-Python-Bibliothek (`sklearn`) verglichen.

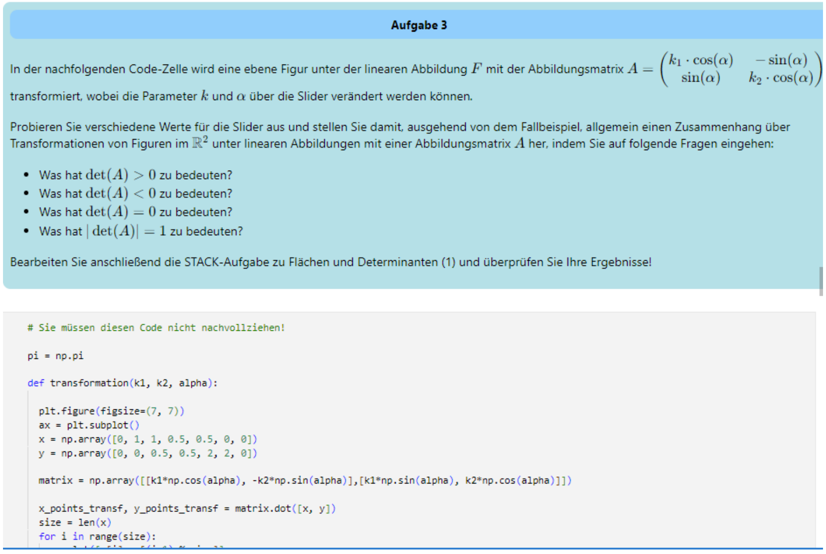
Aufgaben 1

zusätzl. Dateien `starbucks.csv`

zusätzl. Biblioth. `sklearn`

1.2.5 Die Determinante - Mehr als nur ein Werkzeug quadratischer Matrizen

Screenshot (Stand 30.10.2024)



Einsatz:	Selbststudium
Anzahl	1
Vorkenntnisse	
math. Vorkenntnisse	Grundkenntnisse der linearen Algebra, insbesondere zu Matrizen und linearen Abbildungen
Inhalt	Die Determinante wird wiederholt, der Standard-Python-Befehl zu deren Berechnung kennengelernt und die Studieren implementieren an Hand der Leibniz-Regel selbstständig eine Routine zur Berechnung von Determinanten. An Hand von Visualisierungen wird die anschauliche Bedeutung verschiedener Werte der Determinante für lineare Abbildungen exploriert.
Aufgaben	4 (davon 4 mit zugehöriger STACK-Aufgabe)
zusätzl. Dateien	`det1.png`, `det2.png`, `sarrus_rule_colored.png`
zusätzl. Biblioth.	keine

1.2.5.1 Determinante einer 10 × 10 Matrix

Tags: Matrix, Determinante, Python, Jupyter-Notebook

Screenshot: (Stand 30.09.2024)

Gegeben sei die Matrix $A \in \mathbb{R}^{10\times 10}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & -5 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -5 & -2 & 0 & -4 & -5 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 5 & 5 & 0 & 5 & 5 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & -4 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & -5 & 5 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & 5 & 0 & 5 & 0 & 0 & 2 & -2 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -4 & -4 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 2 & -5 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 5 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 4 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Determinante $\det(A)$ der Matrix A mithilfe eines Ihnen bekannten Verfahrens. Nutzen Sie dazu Aufgabe 2 aus dem Jupyter-Notebook "SLA_2_Determinanten/0_Determinante_Studierende.ipynb" (→ Link) als Orientierung.

Es ist $\det(A) =$ ______.

(b) Berechnen Sie nun die Determinante $\det(A)$ der Matrix A mithilfe von Python durch das Modul `NumPy`. Geben Sie das Ergebnis auf 11 Nachkommastellen genau an.

Es ist $\det(A) =$ ______.

Thema: In dieser Aufgabe ist eine reellwertige 10×10-Matrix A gegeben, die mit einer unbestimmten Anzahl an Nullen befüllt ist. In Aufgabenteil (a) soll die Determinante $\det(A)$ mit einem bekannten Verfahren berechnet und angegeben werden. In Aufgabenteil (b) soll die dieselbe Determinante $\det(A)$ mithilfe des `Python`-Moduls `NumPy` berechnet und angegeben werden.

Vorkenntnisse: Determinante einer Matrix, Laplace'scher Entwicklungssatz

Randomisierung: keine

Anpassung: Die Matrix A kann angepasst werden.

Sonderoption: Abzüge: 0
Feedback unterdrücken: ja

1.2.5.2 Flächen und Determinanten (1)

Tags Matrix, Determinante, Jupyter-Notebook

Screenshot (Stand 30.09.2024)

Füllen Sie den Lückentext zu Aufgabe 3 aus dem Jupyter-Notebook "SLA_2_Determinanten/0_Determinante_Studierende.ipynb" (→ Link) aus, indem Sie die richtigen Antworten auswählen.

Im $\mathbb{R}^2$ spannen zwei Vektoren v_1 und v_2, als Pfeile dargestellt, in natürlicher Weise ein Parallelogram auf, dessen (Meine Auswahl zurücksetzen) untersucht werden kann.

Diesen Zusammenhang kann man nutzen, um etwas über die Transformation von Figuren in der Ebene unter linearen Abbildungen auszusagen.

Denn die Standardbasisvektoren $e_1, e_2 \in \mathbb{R}^2$ spannen auf diese Weise ein Parallelogramm auf, dessen Flächeninhalt (Meine Auswahl zurücksetzen) im Kontext einer gegebenen Längeneinheit beträgt.

Ist dann A die (Meine Auswahl zurücksetzen) einer linearen Abbildung F und sind f_1, f_2 die (Meine Auswahl zurücksetzen) von e_1, e_2 unter F, dann ist der Flächeninhalt des von den Vektoren f_1, f_2 aufgespannten Parallleogramms gleich (Meine Auswahl zurücksetzen).

Ferner lässt sich sagen, dass bei (Meine Auswahl zurücksetzen) die ebene Figur gleichorientiert bleibt und sich für (Meine Auswahl zurücksetzen) die Orientierung umkehrt, d.h. die ebene Figur wird gespiegelt.

Für $\det(A) = 0$ fällt die Figur in sich zusammen, wohingegen für Drehungen und Drehspiegelungen immer (Meine Auswahl zurücksetzen) gilt.

Thema In dieser Aufgabe ist ein Lückentext gegeben, der über den Zusammenhang zwischen ebenen Figuren und deren Flächeninhalt unter linearen Abbildungen F handelt. Dazu wird der Zusammenhang mithilfe der Abbildungsmatrix A bzgl. der Standardbasisvektoren e_1, e_2, deren Vektorpfeile ein Parallelogramm aufspannen und den Bildvektoren f_1, f_2 unter F erläutert, wobei die Determinante $\det(A)$ etwas über den Skalierungsfaktor des Flächeninhalts des durch die Vektoren f_1, f_2 aufgespannten Parallelogramms aussagt.

Vorkenntnisse Determinante einer Matrix, Vektoren, Vektorraum

Randomisierung keine

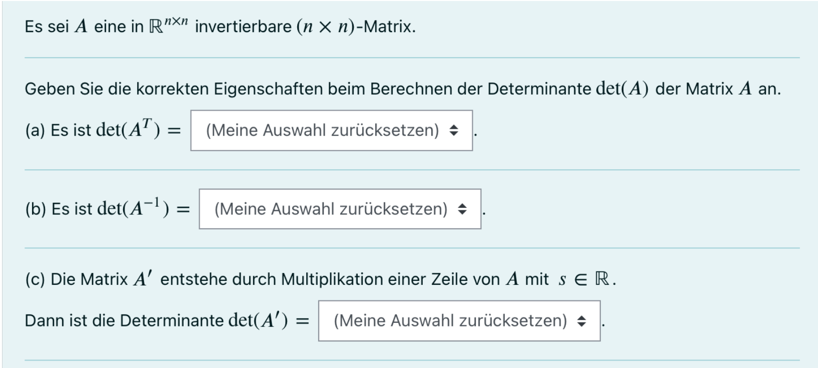
Anpassung keine

Sonderoption Abzüge: 0

Feedback unterdrücken: ja

1.2.5.3 Flächen und Determinanten (2)

Tags	Matrix, Determinante, Jupyter-Notebook
Screenshot	(Stand 30.09.2024)



Thema	In dieser Aufgabe ist eine invertierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gegeben. In Aufgabenteil (a) soll anhand einer Dropdown-Liste beantwortet werden, wie die Determinante $\det\left(A^T\right)$ lautet. In Aufgabenteil (b) soll anhand einer Dropdown-Liste beantwortet werden, wie die Determinante $\det\left(A^{-1}\right)$ lautet. In Aufgabenteil (c) soll anhand einer Dropdown-Liste beantwortet werden, wie sich die Determinante von $\det(A')$ verhält, wobei A' aus A durch Multiplikation von einer Zeile von A mit $s \in \mathbb{R}$ entsteht.
Vorkenntnisse	Determinante einer Matrix, Transposition
Randomisierung	keine
Anpassung	keine
Sonderoption	Abzüge: 0 Feedback unterdrücken: ja

1.2.5.4 Transformation des Buchstabens L

Tags	Matrix, Determinante, Jupyter-Notebook
Screenshot	(Stand 30.09.2024)

Betrachten Sie die Abbildungsmatrix A aus Aufgabe 3 im Jupyter Notebook "SLA_2_Determinanten/0_Determinante_Studierende.ipynb" (→ Link) mit

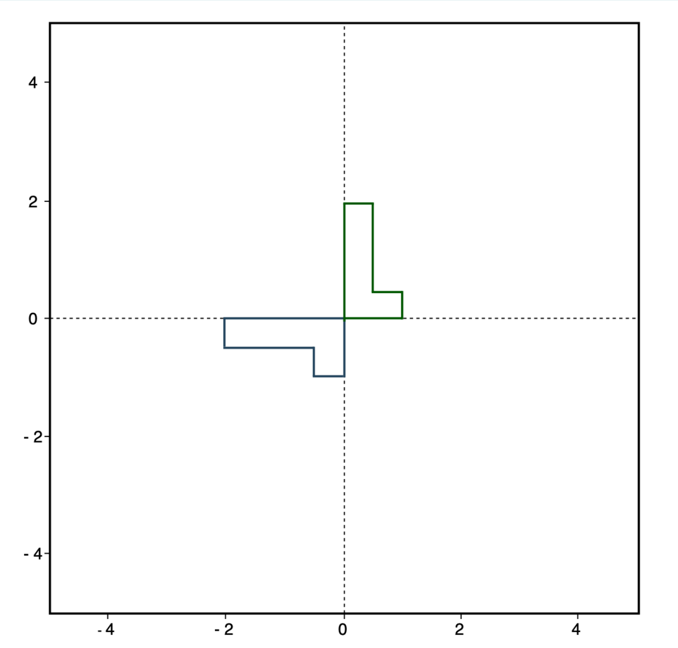
$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha)\cdot k_1 & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha)\cdot k_2 \end{pmatrix}.$$

(a) Finden Sie zu den Werten `k1 = 0.71` und `alpha = 4.06` den entsprechenden Wert des Reglers für `k2`, sodass die Determinante `det(A)` in der Konsole den Wert `det(A) = 0.0284` annimmt.

Es ist `k2 =` ____.

(b) Finden Sie entsprechende Regler `k1, k2` und `alpha` in Aufgabe 3, sodass die ebene L-Figur nach Ausführung des Python-Codes an der y-Achse gespiegelt und um 90° gedreht wird. Geben Sie auch die Determinante `det(A)` der dadurch entstehenden Abbildungsmatrix A an, welche im Konsolenfenster angegeben wird.

▼ ebene L-Figur



(i) Es ist `k1` = ____.

(ii) Es ist `k2` = ____.

(iii) Es ist `alpha` = ____.

(iv) Die Determinante lautet `det(A)` = ____.

Thema	In dieser Aufgabe ist die Abbildungsmatrix $$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha)\cdot k_1 & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha)\cdot & \cos(\alpha)\cdot k_2 \end{pmatrix}$$ für Parameter $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ und $\alpha \in (0, 2\pi)$ gegeben. In Aufgabenteil (a) soll zu gegebenen Werten der Regler `k1` und `alpha` der Wert des Reglers `k2` gefunden werden, sodass in der Konsole der passende Wert zur Determinante `det(A)` abgebildet wird. In Aufgabenteil (b) ist eine ebene L-Figur ausklappbar, die durch gesuchte Werte für `k1, k2` und `alpha` mit der Determinante `det(A)` an der y-Achse gespiegelt und um 90 gedreht wird.
Vorkenntnisse	Determinante einer Matrix, lineare Abbildung
Randomisierung	Die Aufgabe ist randomisiert.
Anpassung	keine
Sonderoption	Abzüge: 0 Feedback unterdrücken: ja

1.2.6 Eigenwerte und Eigenvektoren

Screenshot	(Stand 30.10.2024)

2. **Implementierung der `reconstruct_image` Methode:**
    - Implementieren Sie die Logik, wie aus der vorherigen Aufgabe, um das Bild mit den `k` größten Singulärwerten zu rekonstruieren.

Implementierung der `reconstruct_image` Methode:

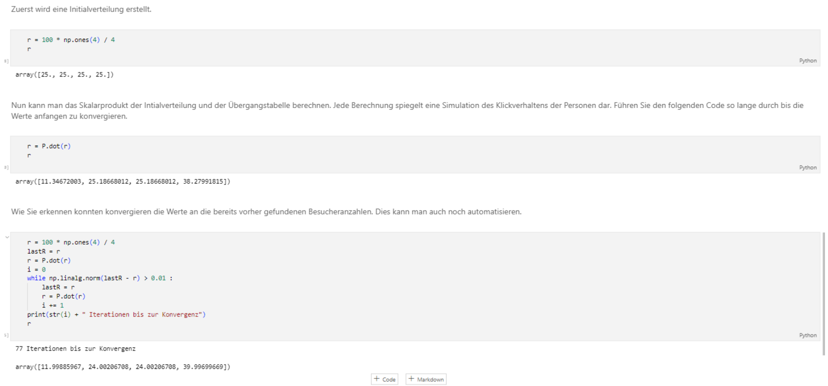
- Die Funktion sollte die ersten `k` Spalten von `U` und die ersten `k` Zeilen von `VT` verwenden.
- Erstellen Sie eine Diagonalmatrix `Sigma_reduced` mit den ersten `k` Singulärwerten.
- Rekonstruieren Sie das Bild durch Multiplikation von `U[:, :k]`, `Sigma_reduced` und `VT[:k, :]`.

```python
image = Image.open('StarryNight.jpg').convert('L')
image_matrix = np.array(image)

#  SVD durchführen mit numpy ???
U, Sigma, VT = 

# Funktion zur Rekonstruktion des Bildes mit einer gegebenen Anzahl von Singulärwerten
def reconstruct_image(U, Sigma, VT, num_singular_values): # ???
    S_reconstructed = np.zeros((num_singular_values, num_singular_values))
    np.fill_diagonal(S_reconstructed, Sigma[:num_singular_values])
    # multiplizieren Sie hier S_reconstructed mit VT mithilfe von np.dot, achten Sie hierbei dass Sie nur die Anzahl der num_singular_values verwenden
    S_Vt = 
    # multiplizieren Sie hier U mit S_Vt mithilfe von np.dot, achten Sie hierbei dass Sie nur die Anzahl der num_singular_values verwenden
    U_S_Vt = 
    return U_S_Vt

# Bild mit verschiedener Anzahl an singulärwerten rekonstruieren
k_values = [5, 20, 50,100,len(Sigma)]
fig, axes = plt.subplots(1, len(k_values) + 1, figsize=(15, 6))

axes[0].imshow(image_matrix, cmap='gray')
axes[0].set_title('Original Image')
axes[0].axis('off')

for i, k in enumerate(k_values):
    reconstructed = reconstruct_image(U, Sigma, VT, k)
    axes[i + 1].imshow(reconstructed, cmap='gray')
    axes[i + 1].set_title(f'k = {k}')
    axes[i + 1].axis('off')

plt.tight_layout()
plt.show()
```


Einsatz:	Selbststudium
Anzahl	1
Vorkenntnisse	Plots mit `matplotlib`
math. Vorkenntnisse	Matrizen, Vektoren, lineare Gleichungssysteme
Inhalt	Einführung in Eigenwerte und Eigenvektoren, physikalische Interpretation, numerische Berechung mit Potenzmethode, `numpy` und `sympy`, Singulärwertzerlegung (und deren Anwendung zur Bildkompression), Spur
Aufgaben	6
zusätzl. Dateien	`StarryNight.jpg`
zusätzl. Biblioth.	`pandas`, `PIL.Image`

1.2.7 Eigenwerte und Eigenvektoren - Anwendung

Screenshot (Stand 30.10.2024)


Zuerst wird eine Initialverteilung erstellt.

```
r = 100 * np.ones(4) / 4
r
```

Python

```
array([25., 25., 25., 25.])
```

Nun kann man das Skalarprodukt der Intialverteilung und der Übergangstabelle berechnen. Jede Berechnung spiegelt eine Simulation des Klickverhaltens der Personen dar. Führen Sie den folgenden Code so lange durch bis die Werte anfangen zu konvergieren.

```
r = P.dot(r)
r
```

Python

```
array([11.34672003, 25.18668012, 25.18668012, 38.27991815])
```

Wie Sie erkennen konnten konvergieren die Werte an die bereits vorher gefundenen Besucheranzahlen. Dies kann man auch noch automatisieren.

```
r = 100 * np.ones(4) / 4
lastR = r
r = P.dot(r)
i = 0
while np.linalg.norm(lastR - r) > 0.01 :
    lastR = r
    r = P.dot(r)
    i += 1
print(str(i) + " Iterationen bis zur Konvergenz")
r
```

Python

```
77 Iterationen bis zur Konvergenz

array([11.99885967, 24.00206708, 24.00206708, 39.99699669])
```

+ Code + Markdown

Einsatz:	Selbststudium
Anzahl	1
Vorkenntnisse	
math. Vorkenntnisse	Matrizen, Grundlagen zu Eigenwerten und Eigenvektoren
Inhalt	Der PageRank-Algorithmus wird als Anwendungsbeispiel für Eigenwertrechnung dargestellt.
Aufgaben	0
zusätzl. Dateien	keine
zusätzl. Biblioth.	`graph.png`

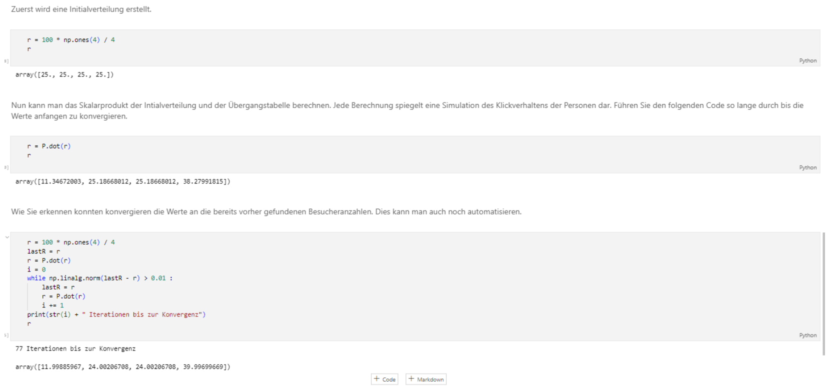
1.3 Grundlagen der 1D-Analysis

Inhaltsverzeichnis

◄ ▲ ►

1.3.1 Funktionen - Grundbegriffe, Beispiele und Eigenschaften

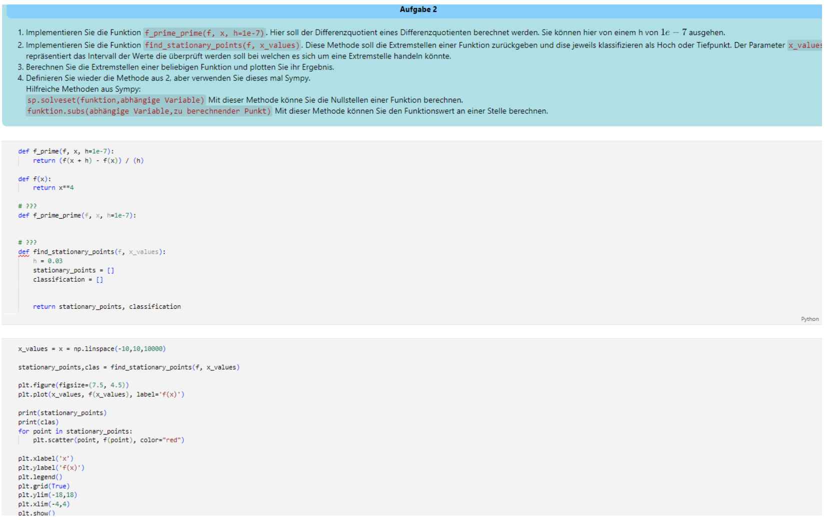
Screenshot (Stand 30.10.2024)



Einsatz:	Selbststudium
Anzahl	1
Vorkenntnisse	Schleifen, Kontrollstrukturen, Listen, iterative und rekursive Algorithmen, Plots
math. Vorkenntnisse	Abiturniveau Analysis
Inhalt	Wiederholung der Definition und Eigenschaften einer Funktion, wichtige Funktionen, Plotten von Funktionen, Invertieren von Funktionen
Aufgaben	10
zusätzl. Dateien	`Koordinatenschnittpunkte_new.png`, `Polynomdivision.png`
zusätzl. Biblioth.	keine

1.3.2 Ableitung, Steigung, Extremstellen, Krümmungsverhalten

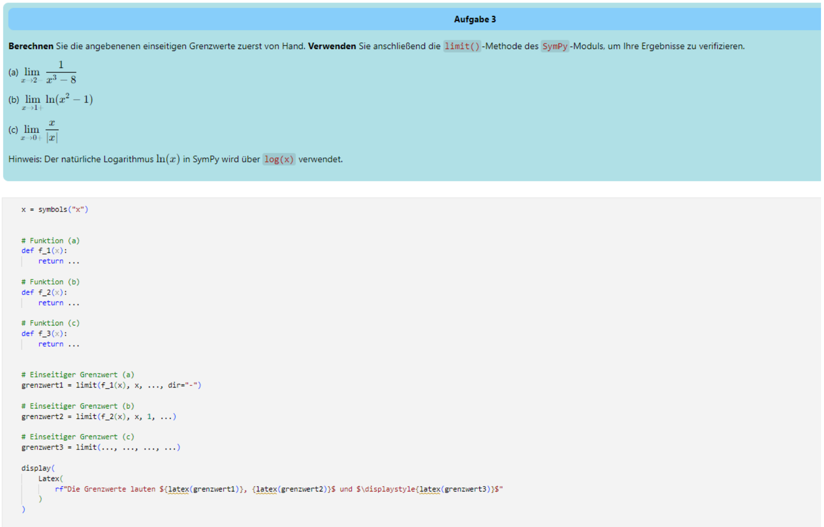
Screenshot	(Stand 30.10.2024)



Einsatz:	Selbststudium
Anzahl	1
Vorkenntnisse	Abiturniveau Analysis
math. Vorkenntnisse	Abiturniveau Analysis
Inhalt	erste und zweite Ableitung (angeleitete Eigenimplementierung in Python), Anwendung zum Bestimmen von Extremstellen
Aufgaben	4
zusätzl. Dateien	keine
zusätzl. Biblioth.	keine

1.3.3 Stetigkeit

Screenshot (Stand 30.10.2024)



Aufgabe 3

Berechnen Sie die angebenenen einseitigen Grenzwerte zuerst von Hand. **Verwenden** Sie anschließend die `limit()`-Methode des `SymPy`-Moduls, um Ihre Ergebnisse zu verifizieren.

(a) $\lim\limits_{x \to 2-} \frac{1}{x^3 - 8}$

(b) $\lim\limits_{x \to 1+} \ln(x^2 - 1)$

(c) $\lim\limits_{x \to 0+} \frac{x}{|x|}$

Hinweis: Der natürliche Logarithmus $\ln(x)$ in SymPy wird über `log(x)` verwendet.

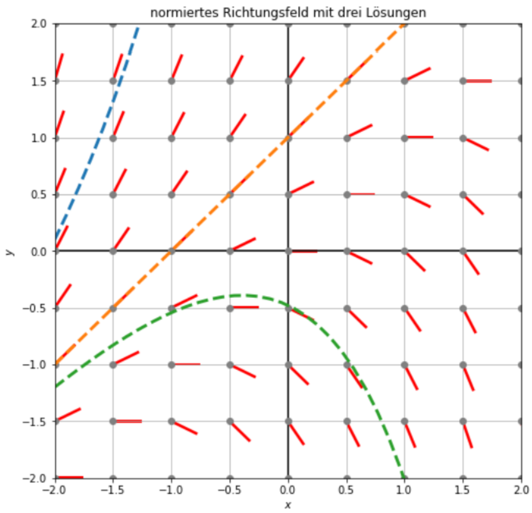
```
x = symbols("x")


# Funktion (a)
def f_1(x):
    return ...

# Funktion (b)
def f_2(x):
    return ...

# Funktion (c)
def f_3(x):
    return ...


# Einseitiger Grenzwert (a)
grenzwert1 = limit(f_1(x), x, ..., dir="-")

# Einseitiger Grenzwert (b)
grenzwert2 = limit(f_2(x), x, 1, ...)

# Einseitiger Grenzwert (c)
grenzwert3 = limit(..., ..., ..., ...)

display(
    Latex(
        rf"Die Grenzwerte lauten ${latex(grenzwert1)}, {latex(grenzwert2)}$ und $\displaystyle{latex(grenzwert3)}$"
    )
)
```

Einsatz:	Selbststudium
Anzahl	1
Vorkenntnisse	Grundlegende Python-Kenntnisse
math. Vorkenntnisse	Abiturniveau Analysis
Inhalt	Stetigkeit und Lipschitzstetigkeit werden an Hand von Code visualisiert und nachvollzogen.
Aufgaben	4
zusätzl. Dateien	keine
zusätzl. Biblioth.	keine

1.3.4 Differentialgleichungen

Screenshot (Stand 26.09.2024)

```
def yPrime(y,x):
    dydx = y-x
    return dydx

xEval = np.linspace(-2, 2, 40)
solutionNum2 = odeint(yPrime, iniValues1, xEval)

fig, axs = plt.subplots(1, 1,  figsize=(8, 8))
axs.set_title(r"normiertes Richtungsfeld mit drei Lösungen")
axs.axvline(0, c="black")
axs.axhline(0, c="black")
axs.set_xlabel(r"$x$")
axs.set_ylabel(r"$y$")
axs.set_xlim([xLimEx1[0], xLimEx1[1]])
axs.set_ylim([yLimEx1[0], yLimEx1[1]])
axs.grid()
axs.plot(XgridEx1, YgridEx1, marker='o', color='grey', linestyle='none')
axs.quiver(XEx1,YEx1,dxEx1norm,dyEx1norm, angles='xy', scale_units='xy', scale=4, width=0.006, headaxislengt
#axs.quiver(XEx1,YEx1,dxEx1,dyEx1, width=0.004, color="red", label=r"")
axs.plot(xEval, solutionNum2, "--", linewidth=3.0)
plt.show()
```



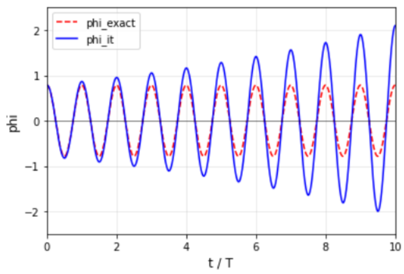
Einsatz:	summative Bewertung, Selbststudium
Anzahl	2 (Übung, Musterlösung)
Vorkenntnisse	NumPy-Arrays, einfache Matplotlib-Plots, Definition von Funktionen
math. Vorkenntnisse	Lösen von gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung
Inhalt	numerisches und symbolisches Lösen einer Differentialgleichung 1. Ordnung, Visualisieren der Lösungsfunktionen, Richtungsfeld
Aufgaben	4
zusätzl. Dateien	keine
zusätzl. Biblioth.	keine

1.3.5 Fadenpendel ohne Kleinwinkelnäherung

Screenshot (Stand 26.09.2024)

verhält sich der Fehler auf die iterative Lösung? Wie verhält sich die Länge der Rechenzeit? Verwenden Sie für die Plots eine dimensionslose Zeitskala, indem Sie die Zeitwerte auf die Periodendauer der KWN-Lösung ($T_{\mathrm{KWN}} = 2\pi\sqrt{l/g}$) normieren, also $x := t/T_{\mathrm{KWN}}$.

```
def phi_KWN_it(t, φ_0):
    Dt = t[1] - t[0]
    phi_val = np.zeros(len(t)); phi_val[0] = phi_0
    phid_val = np.zeros(len(t))
    for i in range(1, len(t)):
        phi_val[i] = phi_val[i-1] + phid_val[i-1] * Dt
        phid_val[i] = phid_val[i-1] - omega**2 * phi_val[i-1] * Dt
    return phi_val

Dt = 0.01
t = np.arange(0, 10*T, Dt)
x = t / T

plt.plot(x, phi_KWN(t, phi_0), label = "phi_exact", color = "red", linestyle = "--")
plt.plot(x, phi_KWN_it(t, phi_0), label = "phi_it", color = "blue")
plt.xlabel("t / T", fontsize = 12); plt.ylabel("phi", fontsize = 12)
plt.axis([0, 10, -2.5, 2.5])
plt.grid(which = "major", alpha = 0.3)
plt.axhline(0, color = "black", linewidth = 1, alpha = 0.5)
plt.legend()
plt.show()

print("Der Fehler wächst mit der Zeit, wodurch die iterative Lösung nur für kurze Zeitintervalle um die Anfa
      "akkurat ist! Eine feinere Wahl für Delta_t erhöht die akkurate Zeitspanne, führt jedoch auch zu länge
      "bei der Ausführung des Programms.")
```



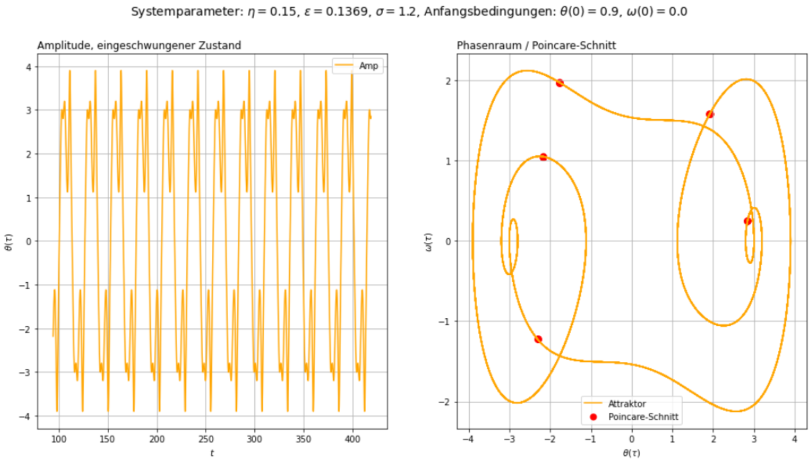

```
Der Fehler wächst mit der Zeit, wodurch die iterative Lösung nur für kurze Zeitintervalle um die Anfangsbedi
ngung akkurat ist! Eine feinere Wahl für Delta_t erhöht die akkurate Zeitspanne, führt jedoch auch zu länger
en Rechenzeiten bei der Ausführung des Programms.
```

Einsatz:	summative Bewertung, Selbststudium
Anzahl	2 (Übung, Musterlösung)
Vorkenntnisse	NumPy-Arrays, Matplotlib-Plots, Definition von Funktionen, einfache Schleifen
math. Vorkenntnisse	Lösen von gewöhnlichen Differentialgleichungen, Schwingungen
Inhalt	Einführung in das numerische Lösen von DGLn erster und zweiter Ordnung, numerisches Lösen und Analyse der DGL des Fadenpendels
Aufgaben	10
zusätzl. Dateien	`Iterativ_1.PNG, Iterativ_2.PNG`
zusätzl. Biblioth.	keine

1.3.6 Nicht-lineare Dynamik

Screenshot (Stand 26.09.2024)

```
fDOchaosC = np.zeros((len(t2), 2))
fDOchaosPSC = np.zeros((len(t2), 2))
fDOchaosC = odeint(f_DO_chaos, iniVal2, t2, args=(eta2, epsilonC, sigma2))
fDOchaosPSC = odeint(f_DO_chaos, iniVal2, tPS2, args=(eta2, epsilonC, sigma2))
fig4, (ax2C1, ax2C2) = plt.subplots(1, 2,  figsize=(16, 8))
fig4.suptitle(r"Systemparameter: $\eta={}$, $\epsilon={}$, $\sigma={}$, Anfangsbedingungen: $\theta(0)={}$,
ax2C1.set_title(r"Amplitude, eingeschwungener Zustand", loc='left')
ax2C1.plot(t2[index_tPlot_ini2:], fDOchaosC[index_tPlot_ini2:, 0], color="orange" ,label=r"Amp")
#ax2C1.set_xlim([-1.6, 1.6])
#ax2C1.set_ylim([-1.2, 1.2])
ax2C1.legend(loc='best')
ax2C1.set_xlabel(r"$t$")
ax2C1.set_ylabel(r"$\theta (\tau)$")
ax2C1.grid()
ax2C2.set_title(r"Phasenraum / Poincare-Schnitt", loc='left')
ax2C2.plot(fDOchaosC[index_tPlot_ini2:, 0], fDOchaosC[index_tPlot_ini2:, 1], color="orange" ,label=r"Attrakt
ax2C2.scatter(fDOchaosPSC[index_PS2:, 0], fDOchaosPSC[index_PS2:, 1], s=50, color="red", label=r"Poincare-Sc
#ax2C2.set_xlim([-1.6, 1.6])
#ax2C2.set_ylim([-1.2, 1.2])
ax2C2.legend(loc='best')
ax2C2.set_xlabel(r"$\theta (\tau)$")
ax2C2.set_ylabel(r"$\omega (\tau)$")
ax2C2.grid()
```



Einsatz: summative Bewertung, Selbststudium

Anzahl 2 (Übung, Musterlösung)

Vorkenntnisse NumPy-Arrays, Matplotlib-Plots, Definition von Funktionen, einfache Schleifen

math. Vorkenntnisse Lösen von gewöhnlichen Differentialgleichungen 2. Ordnung, Schwingungen, Taylor-Entwicklung

Inhalt knüpft an das Notebook "Das Fadenpendel ohne Kleinwinkelnäherung" an, numerisches Lösen und Visualiserung von Lösungen der nichtlinearen DGL eines Duffing-Oszillators, kleiner thematischer Ausflug in die Chaostheorie, Phasenraum, Geschwindigkeitsfeld, Poincaré-Schnitte und Attraktoren

Aufgaben 6

zusätzl. Dateien keine

zusätzl. Biblioth. keine

1.3.7 Folgen und Reihen

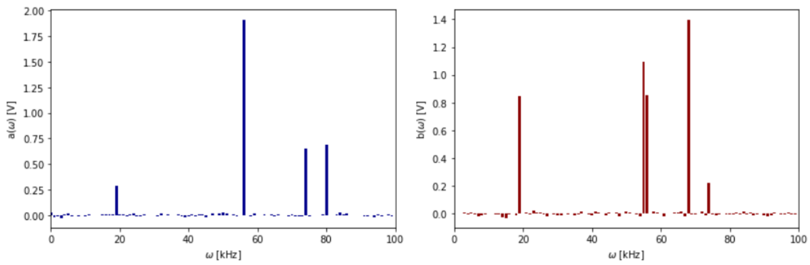
Screenshot (Stand 30.10.2024)

Einsatz:	Selbststudium
Anzahl	1
Vorkenntnisse	Schleifen, Plots
math. Vorkenntnisse	Grundkenntnisse zu Folgen und Reihen
Inhalt	Arithmetische Folgen, Investitionen, Newton-Verfahren (zur Bestimmung von Nullstellen), geometrische Reihen und Collatz-Problem werden als Beispiele von Folgen betrachtet, implementiert und teils visualisiert.
Aufgaben	6
zusätzl. Dateien	keine
zusätzl. Biblioth.	`squarify`

1.3.8 Fourierreihen mit Python

Screenshot (Stand 26.09.2024)

```
    a_list = []
    b_list = []
    for k in np.arange(0, N, 1000):
        a_list.append(a(k))
        b_list.append(b(k))

    return a_list, b_list

t = np.arange(0, 200000, 1) * dt
a, b = MyFourierCoef(data, t, 100000)

fig, ax = plt.subplots(1, 2, figsize = (12, 4))
w = np.arange(0, 100, 1)

ax[0].bar(w, a, color = "darkblue")
ax[0].set_xlabel("$\omega$ [kHz]")
ax[0].set_ylabel("a($\omega$) [V]")
ax[0].set_xlim(0, 100)

ax[1].bar(w, b, color = "darkred")
ax[1].set_xlabel("$\omega$ [kHz]")
ax[1].set_ylabel("b($\omega$) [V]")
ax[1].set_xlim(0, 100)

plt.tight_layout()
plt.show()
```



Die Fourierkoeffizienten enthalten wichtige Informationen über die verschiedenen Schwingungen, wie (neben Frequenz) auch Amplitude und Phase. Um zu verstehen wie man diese Informationen extrahiert betrachten wir eine allgemeine Schwingung mit beliebiger Phase:

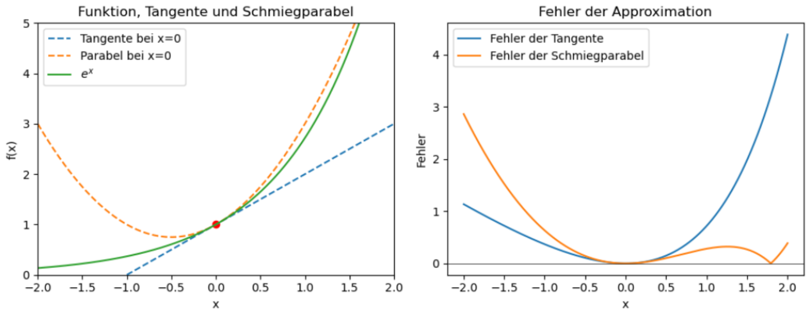
$$U(t) = U_0 \sin(\omega t + \varphi) = U_0\,(\sin(\omega t)\cos(\varphi) + \sin(\varphi)\cos(\omega t)) = \underbrace{U_0 \sin(\varphi)}_{=a_\omega}\cos(\omega t) + \underbrace{U_0 \cos(\varphi)}_{=b_\omega}\sin(\omega t)$$

Einsatz:	summative Bewertung, Selbststudium
Anzahl	2 (Übung, Musterlösung)
Vorkenntnisse	NumPy-Arrays, Matplotlib-Plots, Definition von Funktionen, einfache Schleifen
math. Vorkenntnisse	Fourierreihen, Integration
Inhalt	behandelt verschiedene Aspekte von Fourierreihen, numerische Berechnung von Fourierkoeffizienten, Rekonstruktion einer Schwingung anhand eines Datensatzes
Aufgaben	8
zusätzl. Dateien	`data.npy`
zusätzl. Biblioth.	micropip

1.3.9 Approximation von Funktionen durch Taylorpolynome

Screenshot	(Stand 26.09.2024)

```
# Plotten der Funktion, der Tangente, der Parabel  und des Fehlers
plt.figure(figsize=(10, 4))

plt.subplot(1, 2, 1)
plt.xlim(-2, 2)
plt.ylim(0, 5)

plt.plot(x_values, tangent_line(x_values), label='Tangente bei x=0', linestyle='--')
plt.plot(x_values, parabula_line(x_values), label='Parabel bei x=0', linestyle='--')
plt.plot(x_values, f(x_values), label='$e^x$')
plt.scatter(a, f(a), color='red')
plt.title('Funktion, Tangente und Schmiegparabel')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('f(x)')
plt.legend()

# Plotten des Fehlers der Approximation
plt.subplot(1, 2, 2)
plt.plot(x_values, abs(error_function(x_values)), label='Fehler der Tangente')
plt.title('Fehler der Approximation')
plt.plot(x_values, abs(error_function2(x_values)), label='Fehler der Schmiegparabel')
plt.xlabel('x')
plt.ylabel('Fehler')
plt.axhline(0, color='black', linewidth=0.5)
plt.legend()

plt.tight_layout()
plt.show()
```



Einsatz:	summative Bewertung, Selbststudium
Anzahl	2 (Übung, Musterlösung)
Vorkenntnisse	NumPy-Arrays, Matplotlib-Plots, Definition von Funktionen, einfache Schleifen
math. Vorkenntnisse	Ableiten, Taylorentwicklung, elementare Funktionen, Polynome
Inhalt	numerische und symbolische Berechnung von Taylorpolynomen, Visualisierung der Ergebnisse
Aufgaben	5
zusätzl. Dateien	keine
zusätzl. Biblioth.	math, micropip

1.3.10 Integralrechnung mit Python

Screenshot (Stand 30.10.2024)

Einsatz:	Selbststudium
Anzahl	1
Vorkenntnisse	Plots, NumPy, SymPy, SciPy
math. Vorkenntnisse	Folgen, Grenzwerte, Stetigkeit, Riemann-Integral
Inhalt	Integrale werden an Hand interaktiver Ober- und Untersummen exploriert. Von Hand, mit SymPy und mit NumPy werden diese (numerisch) berechnet.
Aufgaben	5
zusätzl. Dateien	Integrale berechnen (2).xml
zusätzl. Biblioth.	`IPython.display`

1.3.10.1 Integrale berechnen (2)

Tags	Python, nicht-elementar, Integral, Jupyter-Notebook, Approximation, Annäherung
Screenshot	(Stand 06.10.2024)

Berechnen Sie die angegebenen, bestimmten Integrale mithilfe der numerischen Integration in Python auf mindestens 8 Nachkommastellen genau. Sichten Sie dafür Aufgabe 4 aus dem Jupyter-Notebook "Integrale/Integralrechnung mit Python.ipynb" (→ Link)

(a) Es ist $\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{x}\, \mathrm{d}x \approx$ ______.

(b) Es ist $\int_1^{2} e^{-x^2}\, \mathrm{d}x \approx$ ______.

(c) Es ist $\int_e^{5e} \sin\left(\sqrt{1+\ln^2(x)}\right) \mathrm{d}x \approx$ ______.

Thema

In Aufgabenteil (a) soll das nicht-elementare Integral

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{x}\, \mathrm{d}x$$

mithilfe des `Python`-Moduls `NumPy` auf mindestens 8 Nachkommastellen genau berechnet werden. In Aufgabenteil (b) soll das nicht-elementare Integral

$$\int_1^{2} \frac{\sin(x)}{x}\, \mathrm{d}x$$

mithilfe des `Python`-Moduls `NumPy` auf mindestens 8 Nachkommastellen genau berechnet werden. In Aufgabenteil (c) soll das nicht-elemntares Integral

$$\int e^{5e} \sin\left(\sqrt{1+\ln^2(x)}\right) \mathrm{d}x$$

mithilfe des `Python`-Moduls `NumPy` auf mindestens 8 Nachkommastellen genau berechnet werden.

Randomisierung	keine
Anpassung	keine
Sonderoption	Abzüge: 0 Feedback unterdrücken: ja

1.4 Grundlagen der Mehrdimensionalen Analysis

Inhaltsverzeichnis

◄ ▲

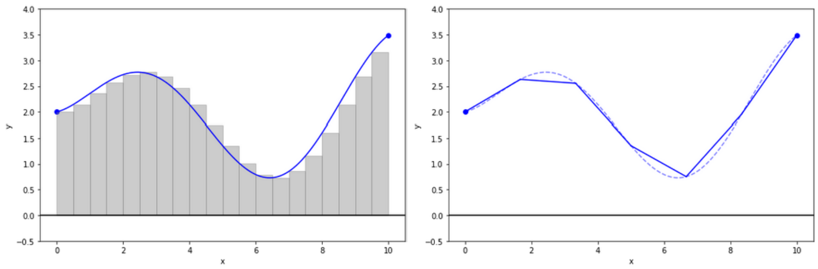
1.4.1 Numerische Kurvenintegration

Screenshot (Stand 26.09.2024)

Im nächsten Schritt möchten wir, anstatt der Fläche unterhalb des Graphens, die Länge des Graphens selbst berechnen. Auch hier werden wir wieder mit einer Approximation beginnen und uns dem exakten Wert anschließend beliebig genau annähern. Der Graph kann durch eine Reihe von Geradenstücken approxmiert werden, wie in der unteren, rechten Skizze dargestellt ist. Die Projektion jedes Geradenstücks auf die x-Achse soll dabei Δx sein. Nach Pythagoras ist die Länge des jeweiligen Geradenstücks dann $\Delta s_j = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y_j)^2}$, wobei Δy_j die Differenz der Funktionswerte am Ende und am Anfang des jeweiligen Geradenstücks ist. Diese Größe ändert sich, wenn man von einen zum nächsten Geradenstück geht, was den Index j erklärt. Die Länge des Graphens wird dann durch die summierte Länge aller Geradenstücke approximiert. Erhöhen wir nun wieder die Anzahl der Geradenstücke, bzw. verkleinern Δx, so nähern wir uns der tatsächlichen Länge immer weiter an. Im Limes infinitesimal kleiner Geradenstücke Δs_j erhält man das **Kurvenintegral** entlang des Weges $\mathcal{C}$

$$L = \sum_{j=1}^{N} \Delta s_j \to \int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}s\,.$$

Die Größe $\mathcal{C}$ bezeichnet den durch die Funktion $f(x)$ beschriebenen Weg.



Betrachten wir nun ein Beispiel, indem ein Bergsteiger einen $1\,\mathrm{km}$ hohen Berg erklimmen möchte. Die Form des Berges soll durch eine Gaußfunktion beschrieben werden, also

$$y(x) = H \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x - x_0}{\sigma}\right)^2\right)\,.$$

Hierbei bezeichnet $\exp(x)$ die Exponentialfunktion. Für die Parameter der Gaußfunktion gilt: $x_0 = 5000\,\mathrm{m}$, $H = 1000\,\mathrm{m}$ und $\sigma = 1500\,\mathrm{m}$. Die Wanderung des Bergsteigers startet bei $x = 0\,\mathrm{m}$ und ist in der Skizze unten veranschaulicht. Die Aufgabe wird es nun sein, die Länge des Weges, den der Bergsteiger auf sich nehmen muss, zu berechnen. Dafür kann man den relevanten x-Achsenabschnitt $x \in [0, x_0]$ in N gleichgroße Stecken der Länge Δx zerlegen. Jeder dieser Strecken entspricht ein Geradenstück entlang des Weges. Für die Länge des j-ten Geradenstückes gilt

$$l_j = \sqrt{[\Delta x]^2 + [y(x_{j+1}) - y(x_j)]^2}\,.$$

Einsatz: summative Bewertung, Selbststudium

Anzahl 2 (Übung, Musterlösung)

Vorkenntnisse NumPy-Arrays, Matplotlib-Plots, Definition von Funktionen, einfache Schleifen

math. Vorkenntnisse Vektoren, Integration, Kurvenintegrale

Inhalt behandelt die numerische Berechnung von Kurvenintegralen im Kontext der Kurvenlänge und physikalischer Arbeit

Aufgaben 2

zusätzl. Dateien `mountain.png`, `mountain_fields.png`, `num_int.png`

zusätzl. Biblioth. keine