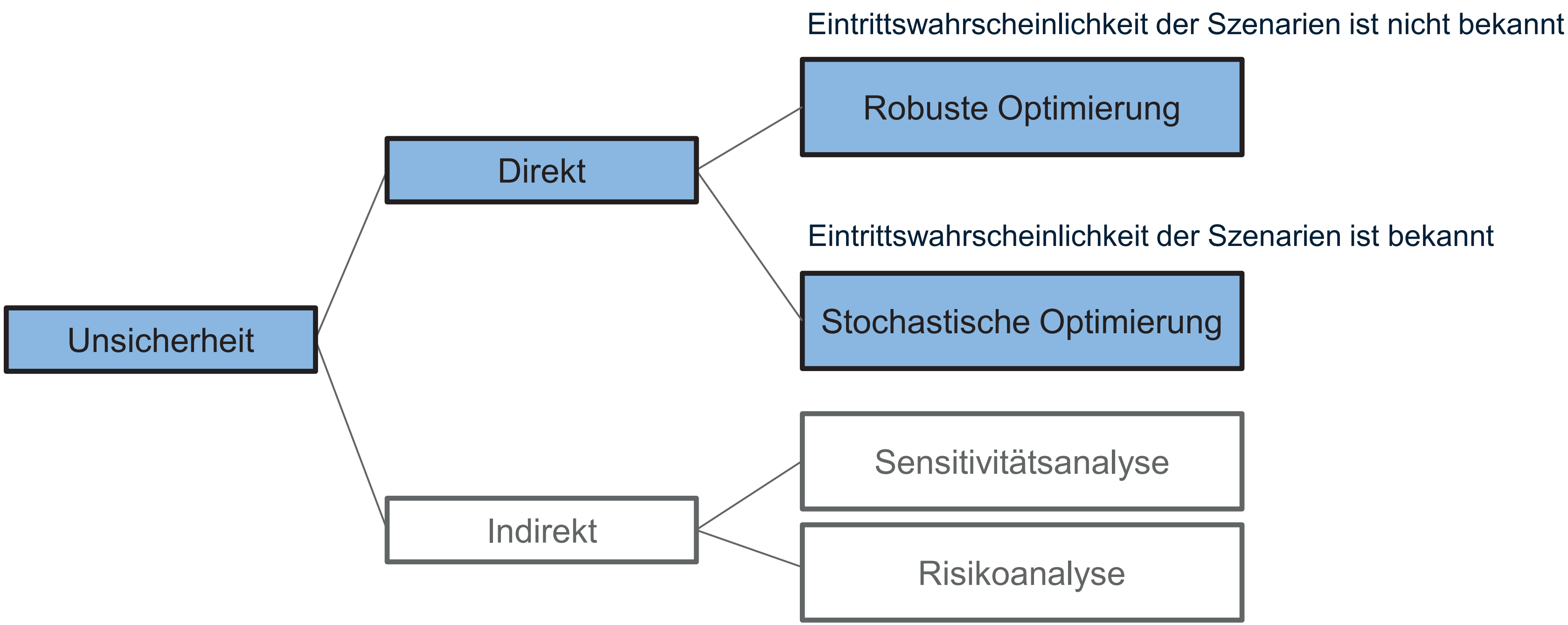
Verfahren zum Umgang mit unsicheren Informationen



[Vgl. Scholl 2001, S. 186]

Ausprägungen der Unsicherheit

- Zufallsverteilungen für Parameter
- Szenarien
  - Diskrete oder kontinuierliche Menge an Szenarien
  - Können auf Basis von Zufallsverteilungen generiert werden
  - Definition durch Experten
  - Eintrittswahrscheinlichkeiten bekannt/unbekannt
- Risikopräferenzen der Entscheidungsträger: Risikoneutral oder risikoavers

→ Betrachtung des WLP unter Berücksichtigung einer **diskreten Szenariomenge**

Standortplanung unter Unsicherheit am WLP: Beispiel

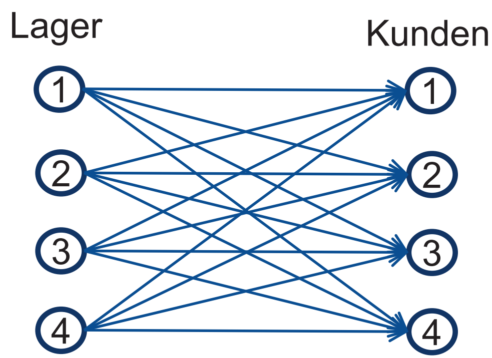
Darstellung des (deterministischen) Referenzfalls

- Kunden: $j = 1,\dots,4$; Potenzielle Lagerstandorte: $i = 1,\dots,4$

Errichtungskosten

i	f_i	b_i
1	120	70
2	130	140
3	100	81
4	125	118

Kapazitäten



erwartete Kundenbedarfe

j	d_j
1	48
2	30
3	25
4	70

Transportkosten

c_{ij}	j=1	j=2	j=3	j=4
i=1	5	3	4,5	1
i=2	1,2	4,1	3	1,7
i=3	1,5	2	6,4	1,9
i=4	2,2	4	1	4

Kundenbedarfe werden im Folgenden als unsicher betrachtet

Standortplanung unter Unsicherheit am WLP: beispielhafte Umsetzung

Szenarien zur Abbildung der unsicheren Kundennachfrage

- Kundenbedarfe in Abhängigkeit der Szenarien: s = 1,…,10 (d_{js})
- Homogene Eintrittswahrscheinlichkeiten: $p_s = 0{,}1$
- Pro Einheit nicht erfüllter Kundennachfrage

  → Fehlmengenkosten $h = 10$

erwartete Kundenbedarfe

d_{js}	s=1	s=2	s=3	s=4	s=5	s=6	s=7	s=8	s=9	s=10
j=1	20	30	30	40	45	50	55	60	65	80
j=2	15	5	10	35	35	30	35	35	40	60
j=3	5	15	15	10	15	35	35	45	35	40
j=4	40	55	55	60	75	70	75	75	85	105

J	d_j	d_j^W
j=1	48	80
j=2	30	60
j=3	25	45
j=4	70	105

Szenarioabhängige Kundenbedarfe

Höchste Ausprägung der Kundenbedarfe

Methoden zur Berücksichtigung von Unsicherheiten

- **Deterministisches Erwartungswertmodell**: Unsichere Parameter werden durch den Erwartungswert ersetzt
- **Szenario-Optimierung**
  - **Stochastische Optimierung**: Optimierung der durchschnittlichen Qualität der Lösung über alle Szenarien
  - **Robuste Optimierung**: Bestimmung einer Lösung, die möglichst unabhängig des realisierten Szenarios eine gute Qualität aufweist
- **Chance-Constrained Modelle**: Einige Restriktionen müssen nur mit einer Wahrscheinlichkeit η erfüllt werden
- Simulation: Bewertung einer bestimmten Lösung unter Berücksichtigung der Unsicherheiten
  - Ermöglicht eine detaillierte Modellierung der Unsicherheiten
  - Keine Optimierung, sondern nur Bewertung von einzelnen Lösungen

→ Beispielhafte Umsetzung der Methoden am WLP unter Berücksichtigung von Nachfrageunsicherheit

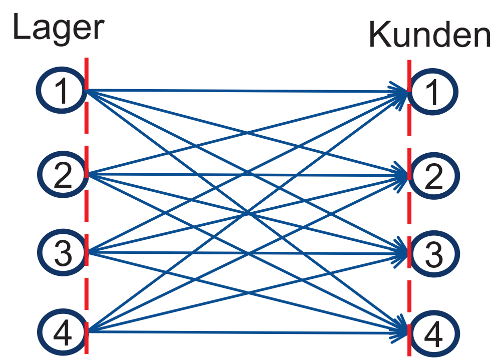
Standortplanung unter Unsicherheit am WLP: Beispiel

Zeitpunkt der Entscheidungen und Realisation der Unsicherheit

- WLP umfasst zwei Arten von Entscheidungsvariablen
  - Standortentscheidungen (y_i)
  - Transportentscheidungen (x_{ij})
  - (+ unter Unsicherheit: Fehlmengen (z_{js}))
- Wann ist die realisierte Nachfrage der Kunden bekannt (eingetretenes Szenario)?
- Welche Entscheidungen können nach der Realisation der Nachfrage revidiert werden (Möglichkeit für Rekurs, szenarioabhängige Entscheidungen)?

Realisation der Nachfrage

- Nach Standort- und Transportentscheidungen
  → **Ohne Rekurs**, Antizipation von szenarioindividuellen Fehlmengen
- Nach Standort-, vor Transportentscheidungen
  → **Mit Rekurs** bei Transportentscheidungen



Deterministisches Erwartungswertmodell (ohne Rekurs)

$$min\, F(x,y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij} \cdot x_{ij} + \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot y_i \qquad (1)$$

u.d.N

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq y_i \cdot b_i \qquad i = 1, \dots, n \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = \overline{\boldsymbol{d}_j} \qquad j = 1, \dots, \mathrm{m} \qquad (3)$$

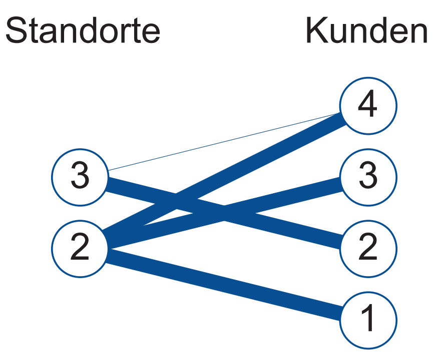
$$x_{ij} \geq 0;\, y_i \in \{0,1\} \qquad i = 1, \dots, n \qquad (4)$$

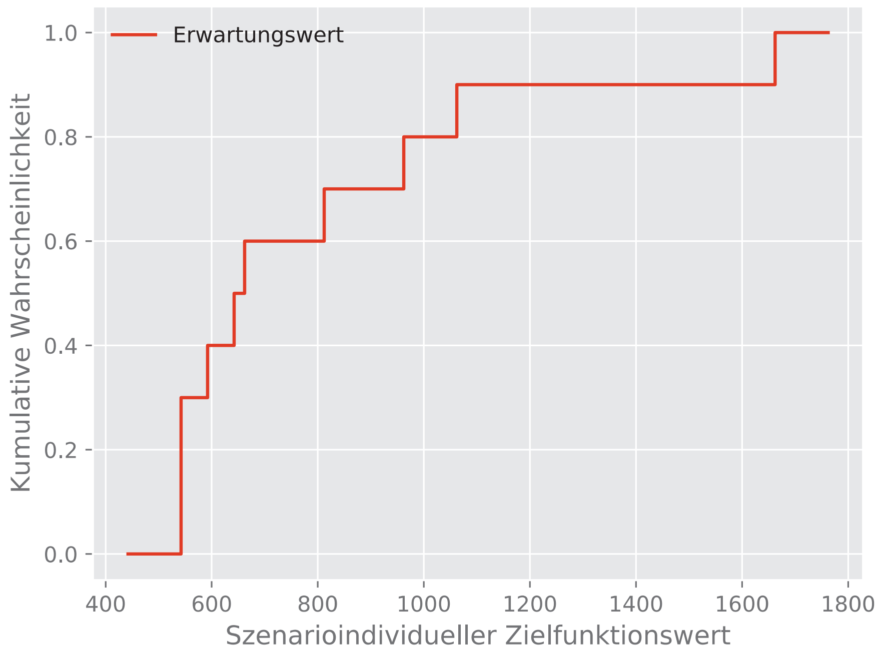
- **Annahme**: Zur Herstellung der Zulässigkeit werden Fehlmengen berücksichtigt
- Pro Einheit Nachfrage, die durch die Lösung des Modells nicht erfüllt werden kann, fallen Kosten in Höhe von h an → Werden im deterministischen Modell nicht berücksichtigt
- Nachfrage d_j wird durch den Erwartungswert der Nachfrage $\bar{d}_j = \sum_{s \in \{1,\dots,k\}} p_s \cdot d_{js}$ ersetzt

Standortplanung unter Unsicherheit am WLP ohne Rekurs: Beispiel

- Zielfunktionswert des Modells entspricht 542,2

→ Unter Unsicherheit entsprechen die erwarteten Kosten jedoch 802,2 (nach Berücksichtigung der Fehlmengen)





WLP: Stochastische Optimierung ohne Rekurs

$$min\,F(x,y,z) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}\cdot x_{ij} + \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot y_i + \boldsymbol{h} \cdot \sum_{\mathbf{j=1}}^{\boldsymbol{m}}\sum_{\mathbf{s=1}}^{\boldsymbol{k}} \boldsymbol{p_s} \cdot \boldsymbol{z_{js}} \tag{1}$$

u.d.N

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq y_i \cdot b_i \qquad i = 1, \dots, n \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} + \mathbf{z_{js}} \geq \boldsymbol{d_{js}} \qquad j = 1, \dots, \mathrm{m}; s = 1, \dots, \mathrm{k} \tag{3}$$

$$x_{ij} \geq 0;\ y_i \in \{0,1\};\ \mathrm{z_{js}} \geq 0 \qquad i = 1, \dots, n;\ j = 1, \dots, \mathrm{m}; s = 1, \dots, \mathrm{k} \tag{4}$$

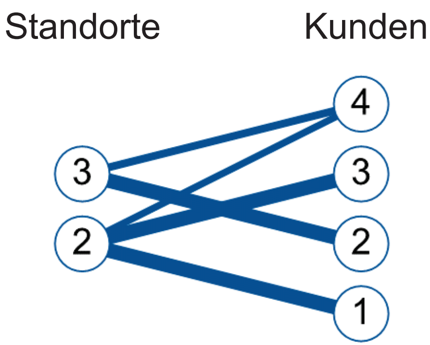
s	Indexmenge der Szenarien; $s = 1, \dots, k$
z_{js}	Entscheidungsvariable: Fehlmengen bei Kunde j in Szenario s
h	Kosten pro Einheit Fehlmengen
p_s	Eintrittswahrscheinlichkeit Szenario s

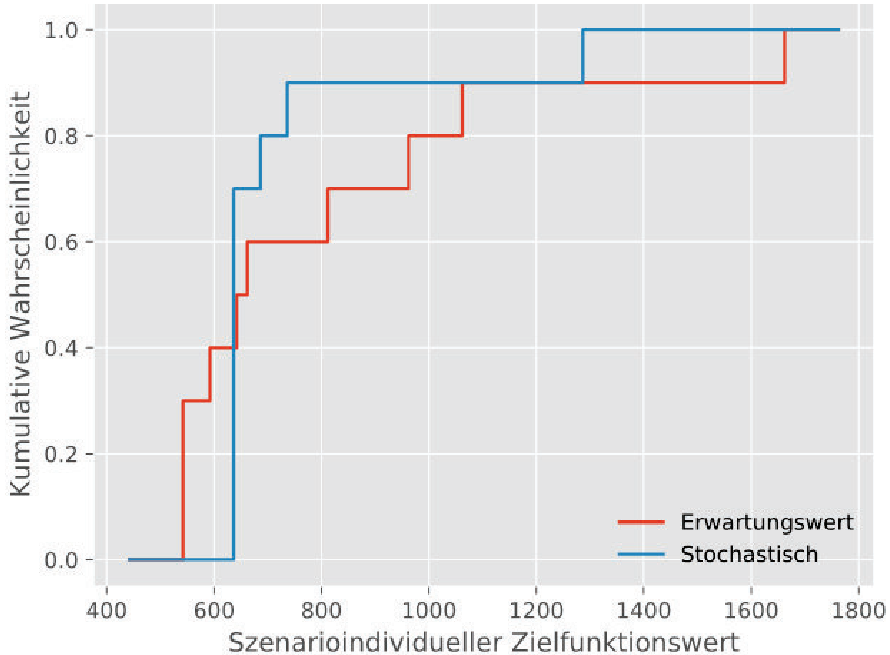
→ **Vorteil**: Antizipation der Fehlmengenkosten in der Zielfunktion

Stochastische Optimierung ohne Rekurs: Beispiel

- Zielfunktionswert des Modells entspricht 716,5 (**- 85,7**)
- Dies entspricht den erwarteten Kosten unter Unsicherheit (stochastisches Modell)

→ Abbildung der Unsicherheit im Modell





Metriken zur Bewertung der Qualität einer stochastischen Lösung

- **Value of the Stochastic Solution (VSS)**
  - Vergleich der deterministischen und stochastischen Lösung
  - Ermittlung der erwarteten Kosten der deterministischen Lösung über alle Szenarios
  - VSS: Differenz des Zielfunktionswerts der stochastischen Lösung und den gewichteten Kosten der deterministischen Lösung
  - $VSS = 0$ bedeutet, dass die Berücksichtigung der Unsicherheit keinen Vorteil erbringt
  - $VSS > 0$ zeigt, dass die Entscheidungen in Antizipation der Unsicherheit so angepasst werden können, dass die erwarteten Kosten sinken

  → Im vorherigen Beispiel gilt $VSS = 85{,}7$
- **Expected Value of Perfect Information (EVPI)**
  - Individuelle Ermittlung der bestmöglichen Lösung für jedes Szenario
  - Differenz des gewichteten Mittelwerts der bestmöglichen Lösung jedes Szenarios und dem Zielfunktionswert der stochastischen Lösung
  - Interpretation: Wert, den ein Entscheidungsträger maximal zu zahlen bereit wäre, um vollständige Information über die Realisation der Unsicherheit zu erhalten

Chance-Constrained Modelle

- **Idee**: Unsichere Restriktionen sollen mit einer hohen Wahrscheinlichkeit erfüllt werden
- Definition eines Levels an Zuverlässigkeit η, mit dem die Restriktionen erfüllt werden müssen
- Typischerweise wird für eta (η) ein hohes Niveau gewählt, bspw. 90% oder 95%

Beispiel: $$\Pr\left(\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \geq d_j\right) \geq \eta \ \forall\, j \in J$$

- **Interpretation**: Die Nachfrage jedes Kunden soll mit einer Wahrscheinlichkeit von η erfüllt sein.
- Um ein Modell unter Berücksichtigung von Chance-Constraints zu lösen, müssen diese in eine deterministisch äquivalente Formulierung überführt werden
- In Abhängigkeit der Wahrscheinlichkeitsverteilung ist dies nicht immer möglich und die Reformulierung kann die Modellkomplexität erhöhen

Chance-Constrained Modell

$$min\, F(x,y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij} \cdot x_{ij} + \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot y_i \qquad (1)$$

u.d.N

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} \leq y_i \cdot b_i \qquad i = 1, \dots, n \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \geq d_j^{\eta} \qquad j = 1, \dots, \mathrm{m} \qquad (3)$$

$$x_{ij} \geq 0;\ y_i \in \{0,1\} \qquad i = 1, \dots, n \qquad (4)$$

d_j^{η}	η-Perzentil der Nachfrageverteilung von Kunde j

- Restriktion (3) beschreibt eine deterministische Reformulierung der Chance-Constraint auf der vorherigen Folie

Standortplanung unter Unsicherheit am WLP: Chance-Constraints

Kumulative Wahrscheinlichkeitsverteilung der Kundennachfrage

- Kumulative Wahrscheinlichkeitsverteilung der Nachfrage jedes Kunden (Sortierung der Kundennachfrage jedes Kunden)
- Interpretation: Prozentuale Wahrscheinlichkeit, mit der die Nachfrage eines Kunden den angegeben Wert nicht übersteigt
- Beispiel: $\eta = 90\%$

Kumulierte Wahrscheinlichkeit

		10%	20%	30%	40%	50%	60%	70%	80%	**90%**	100 %
Kunde	j=1	20	30	30	40	45	50	55	60	**65**	80
	j=2	5	10	15	30	35	35	35	35	**40**	60
	j=3	5	10	15	15	15	35	35	35	**40**	45
	j=4	40	55	55	60	70	75	75	75	**85**	105

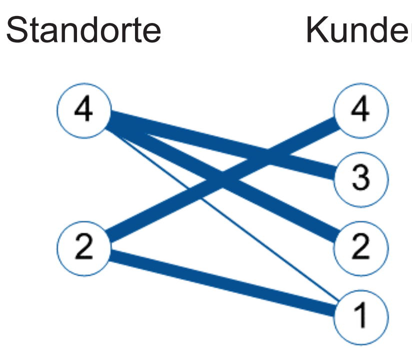
Kumulative Wahrscheinlichkeitsverteilung der Nachfrage für alle Kunden

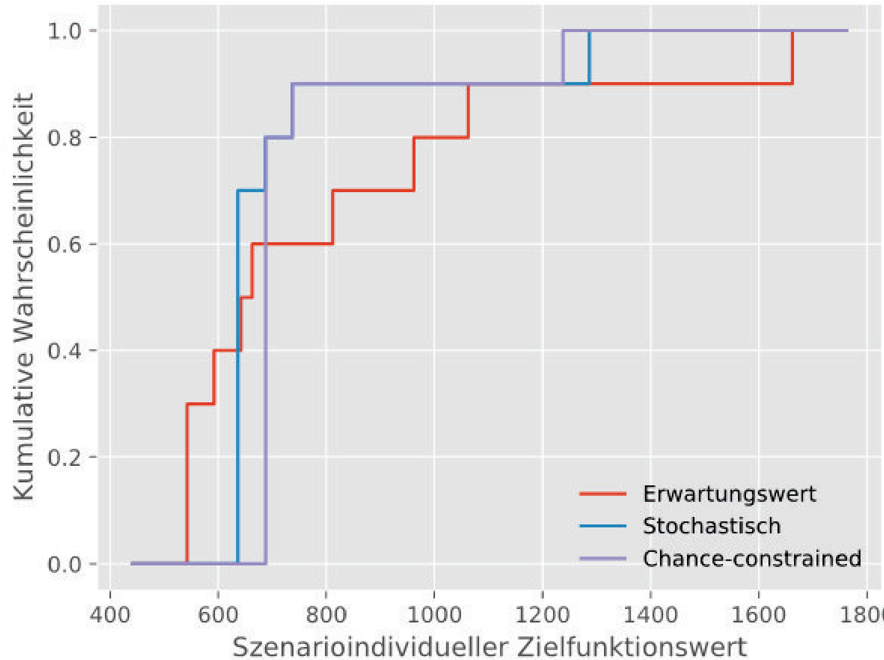
WLP: Chance-Constrained Modell

- Zielfunktionswert des Modells entspricht 687,5

→ Unter Unsicherheit entsprechen die erwarteten Kosten jedoch 747,5 (Fehlmengen)

- Änderung der Standortentscheidungen
- Geringere Varianz der Kosten und leichte Verbesserung im Worst-Case
- Einfache Implementierung





WLP: Stochastische Optimierung mit Rekurs

- „Klassische“ zweistufige stochastische Optimierung mit Rekurs

- Unterteilung der Entscheidungen in zwei Kategorien:
  - **Here-and-now-Entscheidungen**, die unter Berücksichtigung von Unsicherheit getroffen werden müssen
  - **Wait-and-see-Entscheidungen,** die nachdem die Unsicherheit realisiert ist, angepasst werden können
- Für den Fall des WLP wird häufig in Standort- und Transportentscheidungen unterteilt
- Standortentscheidungen werden auf Basis der Nachfrageverteilung getroffen
- Nachdem ein bestimmtes Szenario eingetreten ist, können die Standorte nicht mehr angepasst werden
- Die Transportentscheidungen können aber auch kurzfristig, unter Berücksichtigung der eingerichteten Standorte, angepasst werden
- Transportentscheidungen → individuell für jedes Szenario

WLP: Stochastische Optimierung mit Rekurs

$$min\,F(x,y,z) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{s=1}^{k} p_s \cdot c_{ij} \cdot \boldsymbol{x_{ijs}} + \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot y_i + h \cdot \sum_{j=1}^{m}\sum_{s=1}^{k} p_s \cdot z_{js} \tag{1}$$

u.d.N

$$\sum_{j=1}^{m} \boldsymbol{x_{ijs}} \leq y_i \cdot b_i \qquad i = 1, \dots, n;\ s = 1, \dots, \mathrm{k} \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{x_{ijs}} + \mathrm{z_{js}} = d_{js} \qquad j = 1, \dots, \mathrm{m};\ s = 1, \dots, \mathrm{k} \tag{3}$$

$$x_{ijs} \geq 0;\ y_i \in \{0,1\};\ \mathrm{z_{js}} \geq 0 \qquad i = 1, \dots, n;\ j = 1, \dots, \mathrm{m};\ s = 1, \dots, \mathrm{k} \tag{4}$$

x_{ijs}	Transportmenge von Standort i zu Kunde j in Abhängigkeit des realisierten Szenarios s

„Klassische“ zweistufige stochastische Optimierung mit Rekurs

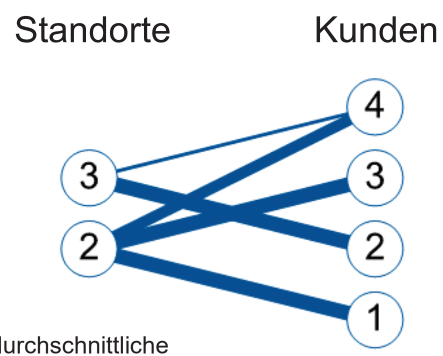
→ Transportentscheidungen x_{ijs} werden als zweitstufige Entscheidungen um Szenarioindex erweitert

WLP: Stochastische Optimierung mit Rekurs

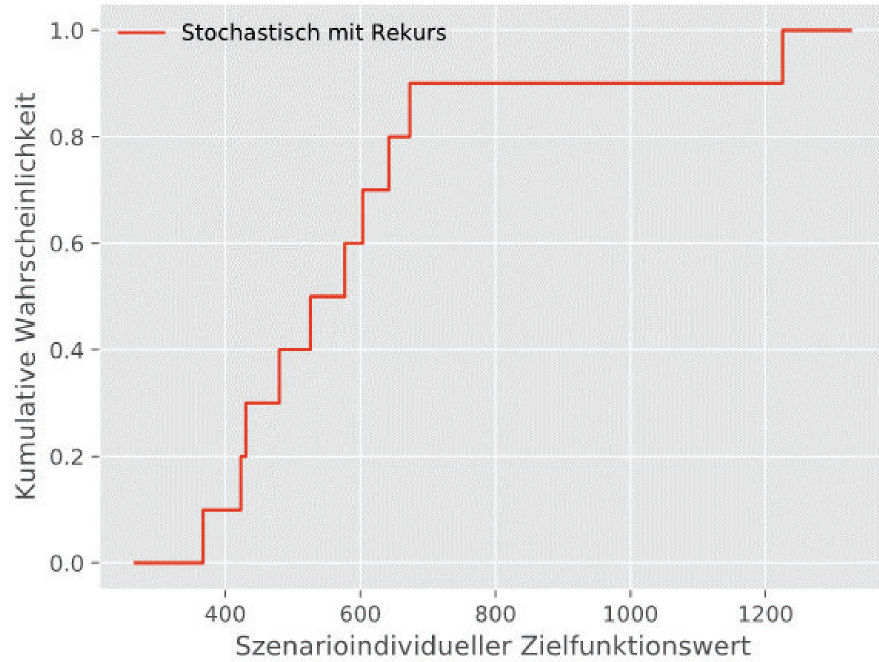
- Zielfunktionswert des Modells entspricht 594,92 (unter Berücksichtigung der Unsicherheit)
- Verbesserung im Vergleich zur Situation ohne Rekurs

Aber: Keine direkte Vergleichbarkeit,
da durch Rekurs mehr Flexibilität besteht

→ Transportentscheidungen unterscheiden
sich für jedes Szenario



(durchschnittliche
Transportentscheidungen)



Robustheit

- Robustheit ist die Fähigkeit eines Systems, Veränderungen standzuhalten
- Eintritt mehrerer Umweltzustände möglich
- Im Gegensatz zur stochastischen Optimierung werden keine Informationen zu Eintritts-wahrscheinlichkeiten benötigt (Entscheidung unter Ungewissheit)

Beispiele für robuste Entscheidungsregeln

- **Minimax-Regel (Wald-Regel):** Wahl einer Entscheidung, welche das Maximum der Kosten über alle Szenarien minimiert
  - Bestmögliches Ergebnis im Worst-case → Worst-case wird optimiert, daher ist die Regel mitunter sehr konservativ
- **Minimax-Regret-Regel (Savage-Niehans-Regel)**: Wahl einer Entscheidung, bei der das Bedauern minimiert wird, nicht eine andere Entscheidung getroffen zu haben
  - Bedauern: Abweichung der Lösungsqualität in Bezug auf die bestmögliche Entscheidung

[Vgl. Schöbel / Kratz 2009]

WLP: Robuste Optimierung mittels Minimax-Regel

$$\min f^{max} \qquad (1)$$

u.d.N

$$f^{max} \geq \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij} \cdot x_{ijs} + \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot y_i + h \cdot \sum_{j=1}^{m} z_{js} \qquad s = 1, \dots, k \qquad (2)$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ijs} \leq y_i \cdot b_i \qquad i = 1, \dots, n;\ s = 1, \dots, k \qquad (3)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ijs} + z_{js} = d_{js} \qquad j = 1, \dots, m;\ s = 1, \dots, k \qquad (4)$$

$$x_{ijs} \geq 0;\ y_i \in \{0,1\};\ z_{js} \geq 0;\ f^{max} \geq 0 \qquad i = 1, \dots, n;\ j = 1, \dots, m;\ s = 1, \dots, k \qquad (5)$$

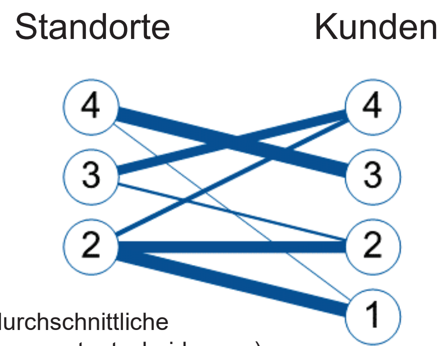
f^{max} Maximum des Zielfunktionswert über alle Szenarios

- Restriktion (2) setzt den Wert der kontinuierlichen Entscheidungsvariable f^{max} auf das Maximum der Kosten über alle Szenarios

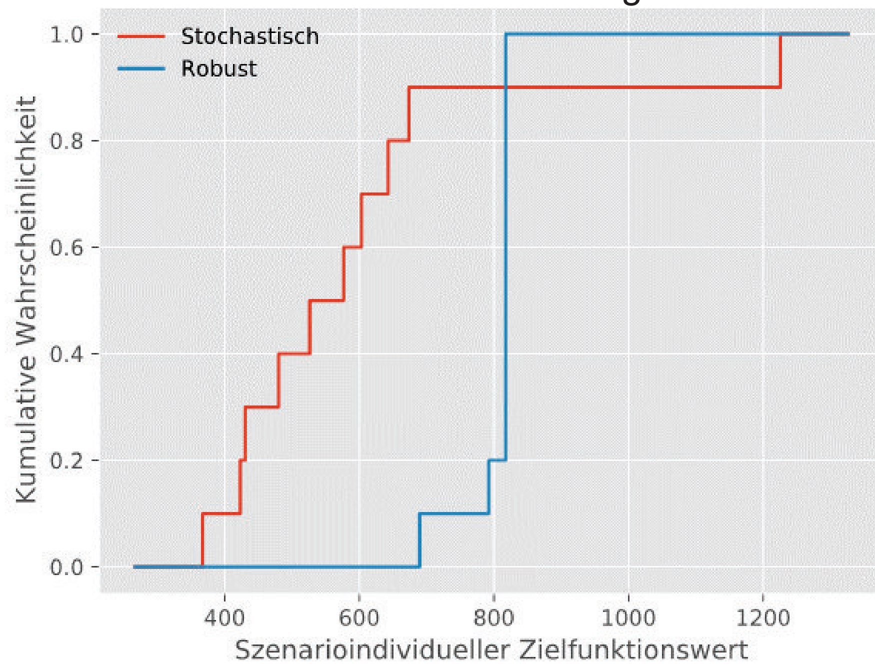
→ Robuste Lösung durch Minimierung der Kosten im Worst-Case

WLP: Robuste Optimierung mit Rekurs

- Zielfunktionswert des Modells entspricht 802,36 (unter Berücksichtigung der Unsicherheit)
- Eröffnung von drei Standorten, um genügend Kapazität auch bei hoher Kundennachfrage bereitzustellen
  → Robuste Lösung ist durchschnittlich teurer
- Maximum der Kosten:
  817,7 (robust) vs. 1225,5 (stochastisch)
  → deutlichere Verbesserung des Worst-Case, geringere Varianz des Zielfunktionswert



(durchschnittliche Transportentscheidungen)



Zusammenfassung

- Zur Berücksichtigung von Unsicherheit können verschiedene Methoden eingesetzt werden
- Dabei sind verschiedene Faktoren zu berücksichtigen
  - Möglichkeit des Rekurs und Zeitpunkt der Entscheidungen
  - Wahrscheinlichkeitsverteilung
  - Zielkriterien und Risikoeinstellung der Entscheidungsträger
- Wenn die Unsicherheit durch eine diskrete Szenariomenge ausgedrückt werden kann, kann die Unsicherheit durch Szenariooptimierung in mathematischen Modellen integriert werden
- Robuste Entscheidungen führen in der Regel zu einem höheren Erwartungswert der Kosten
  - Gleichzeitig werden bessere Ergebnisse in den Szenarien erzielt, die mit einem Erwartungswertansatz zu sehr hohen Kosten führen
  - Anwendung auch, wenn keine Eintrittswahrscheinlichkeiten bekannt sind
- Falls nur wenige mögliche Entscheidungen existieren, können Simulationsmodelle eingesetzt werden, um Entscheidungen unter Berücksichtigung von komplexen Wahrscheinlichkeitsverteilungen