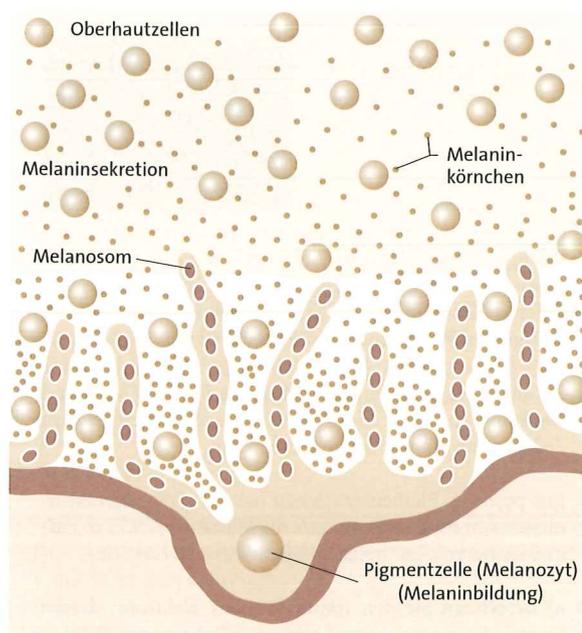


## 10 EINFÜHRUNG IN DIE QUANTENPHYSIK

Die Entdeckung des Wirkungsquantums durch Max PLANCK um die Wende zum 20. Jahrhundert steht am Beginn der Quantenphysik, die zusammen mit der Relativitätstheorie als Grundpfeiler der modernen Physik verstanden wird. Die Quantenphysik wurde entwickelt als Physik der Atomhülle, der Atomkerne und der Elementarteilchen. Sie ist im Wesentlichen also Mikrophysik. Die in diesem Bereich auftretenden Phänomene können nicht mehr im Rahmen der klassischen Physik gedeutet werden. Dieses einführende Kapitel stellt eine Verbindung zwischen der anschaulichen klassischen Physik und Elementen der Quantenphysik her.

### 10.1 Die Quantelung der Strahlung

In diesem Abschnitt werden Erscheinungen betrachtet, in denen die Gesetzmäßigkeiten der Quantenphysik in möglichst einfacher Form auftreten. Es handelt sich um die Wechselwirkung elektromagnetischer Strahlung mit Materie.



**376.1** Im Hautquerschnitt sind die Pigmentzellen (Melanozyten) dargestellt, die bei Bestrahlung mit Sonnenlicht das Pigment Melanin produzieren. Das Melanin wird in die Zellen der Oberhaut abgegeben. Das Licht einer Glühlampe bewirkt – unabhängig von der Intensität – keine Melaninbildung durch die Pigmentzellen und ruft damit keine Bräunung der Haut hervor.

#### 10.1.1 Der lichtelektrische Effekt

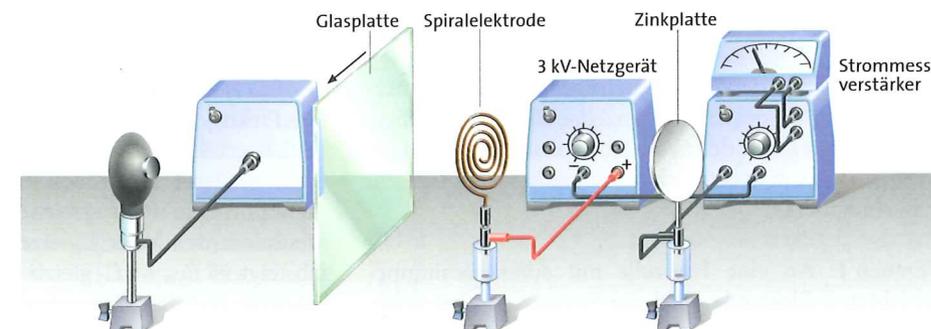
**Abb. 376.1** veranschaulicht die Vorgänge bei der Bräunung der Haut durch UV-Strahlung. Wie kommt es zur Bräunung der Haut? Bekanntlich wird die „energiereiche“ UV-Strahlung als Ursache für die Bräunung angeführt. Doch auch sichtbares Licht gibt Energie an die Haut ab, intensives Licht mehr als weniger intensives. Was bewirkt die sichtbare Strahlung einer Glühlampe, die mit gleicher Intensität wie die UV-Strahlung die Haut beleuchtet? Gleiche Intensität heißt, dass in einer Zeiteinheit von einem Flächenstück der Haut die gleiche Energie aufgenommen wird.

Erfahrungsgemäß verursacht sichtbares Licht im Gegensatz zu UV-Licht keine mit Bräunung verbundene chemische Reaktion. Die Art der Übertragung der in beiden Fällen gleichen Energie in einer Zeiteinheit an die Haut muss sich also für die Strahlungsarten grundlegend unterscheiden. Weiterhin ist die Frage offen, welche physikalische Bedeutung die Formulierung „energiereiche UV-Strahlung“ besitzt.

Aus der Erfahrung ist bekannt, dass die Bräunung der Haut mit Sonnenlicht durch eine Fensterglasscheibe behindert wird. Denn die Glasscheibe ist für die UV-Strahlung weitgehend undurchlässig.

Dieser Zusammenhang lässt sich auch mit einem einfachen Experiment zeigen. Dazu wird das chemisch-biologische System in der Haut, welches für die Melaninbildung zuständig ist und damit die Bräunung der Haut bewirkt, durch zwei Elektroden, ähnlich einem aufgeladenen Kondensator, ersetzt. Statt des Sonnenlichts wird das Licht einer Quecksilberdampflampe verwendet. Der Aufbau entspricht dem zum **lichtelektrischen Effekt** (→ 5.3.4).

**377.1** Grundversuch zum lichtelektrischen Effekt: Im elektrischen Feld zwischen den Elektroden fließt bei Beleuchtung der Zinkplatte mit einer UV-Lampe ein elektrischer Strom. Die Glasscheibe zwischen der Lampe und den Elektroden verhindert den Effekt, ohne die sichtbare Helligkeit wesentlich zu verringern.



**Versuch 1:** Eine Zinkplatte wird mit dem Licht einer Quecksilberdampflampe bestrahlt (**Abb. 377.1**). Das Messgerät zeigt einen elektrischen Strom an.

**Erklärung:** Aus der Zinkplatte werden offenbar Elektronen herausgelöst, die sich im elektrischen Feld zu einer lichtdurchlässigen Spiralelektrode hin bewegen, sodass der Messverstärker einen Strom anzeigt. Die Stromstärke ist proportional zur Anzahl der in der Zeiteinheit ausgelösten Elektronen. ◀

Der folgende Versuch soll zeigen, wie die Zahl der ausgelösten Elektronen von der Intensität und der Frequenz des Lichts abhängt.

**Versuch 2:** Die Intensität des Lichtes auf der Zinkplatte wird geändert, indem der Abstand zwischen der Platte und der Lampe variiert wird. Der Zusammenhang zwischen Abstand und Intensität ist offensichtlich, da das Licht kegelförmig von der Lampe ausgeht. Davon unabhängig lässt sich die Frequenz des Lichtes ändern, wenn nacheinander eine Glasplatte und ein UV-Filter in den Strahlengang gestellt werden. Die Glasplatte absorbiert ultraviolettes Licht, das UV-Filter lässt nur ultraviolettes Licht durch.

**Beobachtung:** Mit zunehmender Intensität wächst die Stromstärke, also die Anzahl der in der Zeiteinheit ausgelösten Elektronen. Befindet sich die Glasplatte im Strahlengang, so geht die Stromstärke auf den Wert null zurück, auch bei erhöhter Intensität. Es werden also keine Elektronen mehr ausgelöst. Wird das UV-Filter verwendet, so fließt nach wie vor ein Strom.

**Ergebnis:** Eine Veränderung der Intensität des Lichtes, mit dem die Zinkplatte bestrahlt wird, führt zu einer entsprechend geänderten Anzahl der in der Zeiteinheit ausgelösten Elektronen, der **Fotoelektronen**. Jedoch ist offenbar nur das hochfrequente bzw. kurzwellige ultraviolette Licht in der Lage, Elektronen aus der Zinkplatte auszulösen. ◀

Die im Versuchsaufbau von **Abb. 377.1** betrachtete Auslösung von Fotoelektronen zeigt die gleiche Abhängigkeit

von der Frequenz und von der Intensität des Lichts wie die Bräunung der Haut. Die Frage, warum nur das hochfrequente bzw. kurzwellige ultraviolette Licht in der Lage ist, Elektronen auszulösen bzw. die Bräunung der Haut zu bewirken, wird an einem weiteren Experiment (→ 10.1.2) quantitativ untersucht werden.

Der Frage der Energieübertragung vom Licht auf die Fotoelektronen lässt sich dadurch konsequent nachgehen, dass die Zinkplatte mit Licht unterschiedlicher Frequenz, aber gleicher Intensität beleuchtet wird. In einer Sekunde wird dann an gleich große Flächenstücke der Metallplatte in allen Fällen die gleiche Energie abgegeben.

Wenn die Energie auf dem Flächenstück gleichmäßig und in gleichen Portionen an die Elektronen abgegeben wird, sollte für einzelne Elektronen kein Unterschied festzustellen sein. Da das ultraviolette Licht an einzelne Elektronen hohe Energiebeträge abgibt, wie es das Experiment zeigt, können wenige Elektronen diese Energie aufnehmen. Das sichtbare Licht liefert kleinere Energiebeträge, die einer im Vergleich größeren Zahl von Elektronen übertragen wird.

**Vermutung:** Ein einzelnes Elektron erhält durch die UV-Strahlung ausreichend Energie, um aus der Zinkplatte auszutreten. Bei sichtbarem Licht reicht die auf das einzelne Elektron übertragene Energie dafür nicht aus. Bei gleicher Intensität ist die Anzahl der Elektronen, denen Energie übertragen wird, deshalb unterschiedlich.

#### Aufgaben

1. a) Eine Metallplatte wird auf der einen Hälfte mit UV-Strahlung und auf der anderen mit sichtbarem Licht gleicher Intensität beleuchtet, ähnlich Versuch 2. Vergleichen Sie die zu erwartenden unterschiedlichen Ergebnisse.
- b) Angenommen, die Energie des Lichts würde *gleichmäßig* an die einzelnen Elektronen der Zinkplatte verteilt. Erläutern Sie die dann zu erwartenden Ergebnisse.

### 10.1.2 Das Planck'sche Wirkungsquantum

Der Frage nach den Energiebeträgen, die Licht unterschiedlicher Frequenz auf einzelne Elektronen überträgt, soll mit folgendem Versuchsaufbau nachgegangen werden, bei dem es möglich ist, mit sichtbarem Licht zu experimentieren.

**Versuch 1:** An eine Fozelle mit einer caesiumbeschichteten Elektrode wird ein Strommessgerät angeschlossen. Die Fozelle wird mit Tageslicht oder dem Licht einer Glühlampe durch eine Ringelektrode hindurch beleuchtet (Abb. 378.1a).

**Beobachtung:** Im Stromkreis fließt ein Strom, ohne dass zwischen den Elektroden der Fozelle eine Spannung angeschlossen ist.

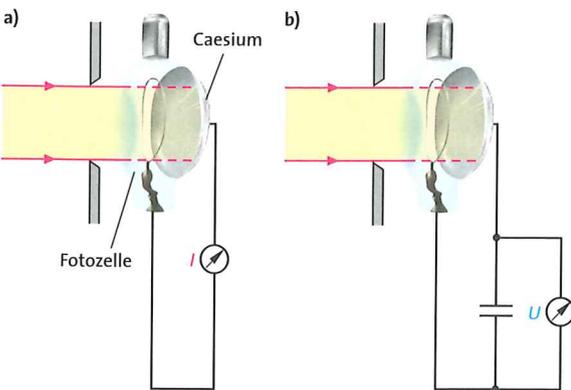
**Ergebnis:** Der Versuch zeigt, dass Elektronen, durch das sichtbare Licht ausgelöst, aus der Metallschicht austreten und sich zur gegenüberliegenden Elektrode bewegen. Diese Elektronen werden Fotoelektronen genannt. Sie müssen nach dem Verlassen des Metalls eine Geschwindigkeit besitzen, haben also eine kinetische Energie, die nur vom Licht stammen kann.

Mit dem nächsten Versuch soll die kinetische Energie der Fotoelektronen bestimmt werden.

**Versuch 2:** Parallel zur beleuchteten Fozelle werden ein Kondensator und ein Spannungsmessgerät angeschlossen (Abb. 378.1b).

**Beobachtung:** Die Spannung am Kondensator steigt bis auf einen Grenzwert an.

**Ergebnis:** Die Fotoelektronen laden den Kondensator auf. Da die Spannung  $U$  am Kondensator proportional zur Ladung ist, steigt auch die Spannung.



378.1 a) Sichtbares Licht löst Elektronen aus der rechten Metallschicht, die sich zur linken Elektrode bewegen. b) Die sogenannten Fotoelektronen laden einen Kondensator auf. Aus dem Grenzwert der Spannung lässt sich die kinetische Energie der Fotoelektronen zu Beginn der Bewegung bestimmen.

Die Elektronen haben, wenn sie gegen die Spannung  $U$  des Kondensators angelaufen sind, die Energie  $E_{\text{pot}} = eU$  ( $\rightarrow$  5.2.4) abgegeben. Diese Bewegung setzt voraus, dass die Elektronen zuvor über eine höhere oder zumindest gleich große kinetische Energie verfügen haben. Wenn keine weiteren Elektronen die gegenüberliegende Kondensatorplatte mehr erreichen, die Spannung des Kondensators den Wert  $U_0$  erreicht hat und nicht weiter ansteigt, ist  $E_{\text{pot}} = eU_0$  gleich der maximalen kinetischen Energie  $E_{\text{kin}}$  der Elektronen. Aus dem Grenzwert  $U_0$  lässt sich so auf  $E_{\text{kin}}$  schließen.

Bislang wurde die Fozelle mit „weißem“ Licht beleuchtet. Um Abhängigkeiten von der Frequenz des Lichts zu untersuchen, lassen sich aus dem weißen Licht Anteile bestimmter Frequenzen herausfiltern. Besonders einfach ist dies bei Verwendung des Lichts einer Quecksilberdampfampe. Ihr Licht weist, spektral zerlegt, wenige diskrete Linien unterschiedlicher Frequenz auf, die sich durch Farbfilter auswählen lassen.

**Versuch 3:** Die Fozelle wird jeweils mit einer bestimmten Wellenlänge bzw. Frequenz aus dem Licht der Quecksilberdampfampe bestrahlt (Abb. 378.1b). Ein  $t$ - $y$ -Schreiber zeichnet zu jeder Frequenz den zeitlichen Verlauf der Kondensatorspannung  $U$  auf.

**Ergebnis:** Der Fotostrom lädt den Kondensator auf. Bei  $\lambda = 546$  nm (grünes Licht) erreicht die Endspannung  $U_0 = 0,40$  V, bei  $\lambda = 436$  nm (blaues Licht)  $1,05$  V und bei  $\lambda = 405$  nm (violettetes Licht)  $1,19$  V (Abb. 379.1). Die aus den Wellenlängen mit  $f = c/\lambda$  berechneten Frequenzwerte zeigen, dass die Spannungsgrenzwerte mit der Frequenz wachsen. Das violette Licht überträgt offenbar mehr Energie auf das einzelne Elektron als das blaue oder grüne.

Beim lichtelektrischen Effekt erhält das einzelne Elektron einen Energiebetrag, der von der Frequenz der Strahlung abhängt. Je höher die Frequenz, desto größer der Energiebetrag.

Im Folgenden wird der Einfluss der Intensität untersucht. Dazu wird Versuch 3 mit Licht einer beliebigen Frequenz wiederholt.

**Versuch 4:** Bei unterschiedlichen Intensitäten bzw. unterschiedlichen Abständen zwischen Lichtquelle und Fozelle wird die Aufladung des Kondensators gemessen (Abb. 379.2).

**Beobachtung:** Die Zeitspanne, die der Kondensator zum Erreichen der Endspannung benötigt, verlängert sich bei geringerer Intensität. Der Grenzwert der Spannung bleibt dagegen konstant, ist also unabhängig von der Intensität.

**Ergebnis:** Die kinetische Energie der Fotoelektronen ist unabhängig von der Intensität des Lichtes. Eine geringere Intensität bedeutet offenbar nur, dass eine kleinere Anzahl von Elektronen im Zeitintervall ausgelöst wird. Durch den geringeren Ladestrom verzögert sich die Aufladung des Kondensators.

Die Intensität des Lichts bestimmt die Anzahl der in der Zeiteinheit ausgelösten Elektronen. Der auf das einzelne Elektron übertragene Energiebetrag ist von der Intensität unabhängig.

Mit der Spannung  $U_0$  des aufgeladenen Kondensators lässt sich also, unabhängig von der verwendeten Intensität, die potentielle Energie  $E_{\text{pot}} = eU_0$  berechnen und damit die gleich große kinetische Energie der ausgelösten Elektronen bestimmen. Der untere Graph in Abb. 379.3 zeigt die kinetische Energie  $E_{\text{kin}}$  für unterschiedliche Frequenzen. Es ergibt sich ein linearer Zusammenhang. Wird ferner der Energiebetrag  $E_A$ , die Austrittsenergie, berücksichtigt, den Fotoelektronen zum Austritt aus dem verwendeten Metall benötigen, dann ist  $E_{\text{kin}} + E_A = E$  die gesamte Energie  $E$ , die vom Licht an ein Elektron übertragen wird. Der obere Graph in Abb. 379.3 zeigt diese Energie  $E$  in Abhängigkeit von der Frequenz, verlängert ergibt sich eine Ursprungsgerade.

Licht der Frequenz  $f$  überträgt an ein ausgelöstes Elektron die Energie  $E = E_{\text{kin}} + E_A = hf$ .

Aus der Steigung der Geraden lässt sich die bei allen Versuchen gleiche Konstante  $h$  berechnen:

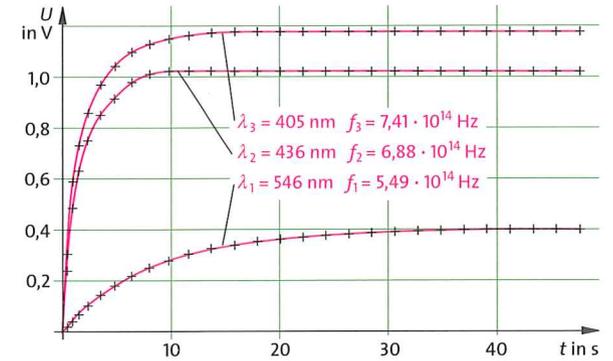
$$h = \frac{E_2 - E_1}{f_2 - f_1} = \frac{(1,91 - 0,64) \cdot 10^{-19} \text{ J}}{(7,40 - 5,49) \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}} = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$$

Die Konstante  $h$  erhielt von Max PLANCK den Namen **Wirkungsquantum**. Die Bezeichnung gründet sich auf den physikalischen Begriff der *Wirkung* mit der Einheit Js. Die folgenden Experimente zeigen:

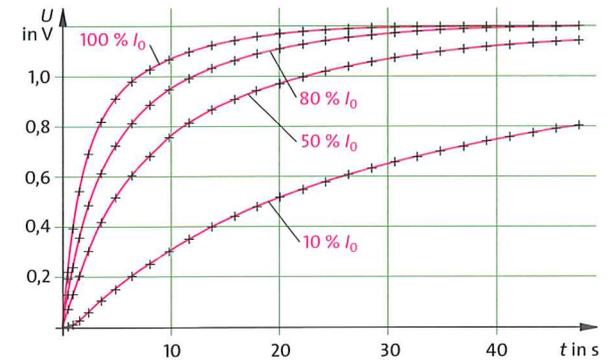
Das **Planck'sche Wirkungsquantum**  $h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$  ist die universelle Naturkonstante der Quantenphysik.

#### Aufgaben

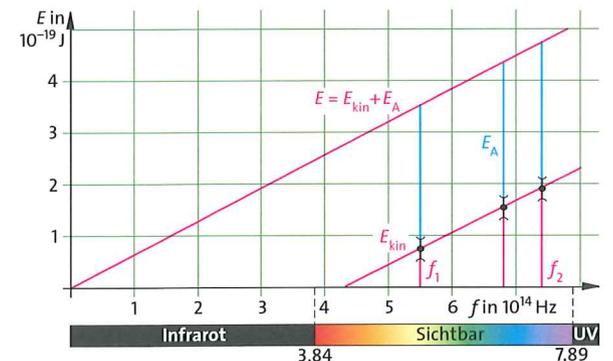
- Berechnen Sie die Energie, die Radiostrahlung ( $\lambda = 200$  m), Infrarotstrahlung ( $\lambda = 1 \mu\text{m}$ ) und Röntgenstrahlung ( $\lambda = 1$  nm) an ein Elektron übertragen können.
- Die Spannung am Kondensator in Abb. 378.1 ändert sich schrittweise mit jedem Fotoelektron. Erläutern Sie den zeitlichen Verlauf der Kondensatorspannung während der Aufladung, abhängig von der Intensität und der Frequenz des Lichts.



379.1 Licht mit höherer Frequenz überträgt mehr Energie auf das einzelne Elektron. Mit der höheren kinetischen Energie können die Fotoelektronen den Kondensator auf eine höhere Spannung aufladen. Erst wenn die Spannung des Kondensators  $U = U_0$  ist, erreichen keine weiteren Fotoelektronen die Kondensatorplatte und die Aufladung ist abgeschlossen.



379.2 Bei fester Wellenlänge ( $\lambda = 436$  nm) wird die Intensität geändert. Die Fotoelektronen laden den Kondensator auf. Je größer die Intensität der Strahlung, desto mehr Fotoelektronen werden im Zeitintervall erzeugt; damit steigt der Ladestrom und der Grenzwert der Spannung wird schneller erreicht. In allen Fällen wird der gleiche Grenzwert erreicht.



379.3 Die kinetische Energie  $E_{\text{kin}}$  der Fotoelektronen steigt linear mit der Frequenz. Die Gesamtenergie  $E$  ist proportional zur Frequenz. Licht der Frequenz  $f$  überträgt den Energiebetrag  $E = hf$  jeweils an ein Elektron. Die Steigung des  $f$ - $E$ -Graphen ist  $h$  mit dem Wert  $6,6 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$ .

## 10.1.3 Die Lichtquantenhypothese

Die Vorgänge der Lichtausbreitung wie z. B. Beugung, Brechung und Interferenz ( $\rightarrow$  7.3) lassen sich als Wellenvorgang verstehen. In dieser Vorstellung ist Licht einer Spektralfarbe eine Welle mit bestimmter Frequenz und Wellenlänge. Der im vorangegangenen Abschnitt behandelte lichtelektrische Effekt ist dagegen eine Wechselwirkung von Licht mit Materie. Eine Erklärung des lichtelektrischen Effekts bedeutet seine Einordnung in ein bestimmtes Vorstellungsbild, also etwa in die Wellenvorstellung von der Lichtausbreitung oder in die Teilchenvorstellung von Elektronen.

Dazu wird noch einmal deutlich herausgestellt, was zu erklären ist:

1. Aus einer Zinkplatte werden Elektronen nur durch UV-Licht, also durch Strahlung mit einer hohen Frequenz ausgelöst. Bei sichtbarem Licht, welches einen Bereich niedrigerer Frequenzen umfasst, führt auch eine Erhöhung der Intensität nicht zur Auslösung von Elektronen.
2. Die in einer Fotozelle von Licht einer bestimmten Frequenz ausgelösten Elektronen besitzen kinetische Energie. Der Betrag der kinetischen Energie der Elektronen hängt nur von der Frequenz, nicht jedoch von der Intensität des Lichts ab.

*Zu 1:* Zur Auslösung eines Elektrons wird eine bestimmte Energie, die *Austrittsenergie*, benötigt. Nach der Wellenvorstellung von der Lichtausbreitung ist die in einem Zeitintervall an ein Volumenelement abgegebene Energie proportional zur Intensität bzw. zum Quadrat der Amplitude der Welle, nämlich der elektrischen Feldstärke ( $\rightarrow$  6.3.7). Die Auslösung von Elektronen aus einer Metalloberfläche ließe sich damit erklären, dass die Elektronen in dem schwingenden elektrischen Feld eine der Feldstärke proportionale Kraft erfahren und so zum Mitschwingen angeregt werden. Dabei nehmen sie aus dem Feld Energie auf und können bei einem ausreichenden Wert der Energie das Metall verlassen. Bei einer Erhöhung der Intensität, also einer Erhöhung der elektrischen Feldstärke, müssten also bei jeder beliebigen Frequenz Elektronen ausgelöst werden. Dass dies bei Frequenzen unterhalb einer ganz bestimmten Frequenz, der beobachteten Grenzfrequenz nicht der Fall ist, lässt sich mit klassischen Vorstellungen nicht verstehen.

*Zu 2:* Elektronen im Metall können grundsätzlich jeden beliebigen Wert kinetischer Energie annehmen. Der Versuch zeigt jedoch, dass sie in diesem Fall nur einen bestimmten Betrag an kinetischer Energie haben, dessen Wert von der Frequenz des Lichtes abhängt.

Durch Variation der Intensität des Lichtes wird die in einem Zeitintervall und einem bestimmten Raumbereich zur Verfügung gestellte Energie verändert. Dennoch ist der Höchstbetrag der Energie der ausgelösten Elektronen bei einer bestimmten Frequenz konstant. Auch dies ist im Rahmen der klassischen Vorstellungen unverständlich.

*Fazit:* Die Energieübertragung beim lichtelektrischen Effekt vom Licht auf Elektronen kann nicht mit der Vorstellung von Licht als Welle erklärt werden.

Eine Beschreibung der Energieübertragung fand Albert EINSTEIN im Jahre 1905, für die er den Nobelpreis erhielt.

- Der Energieaustausch von Licht mit Materie erfolgt beim lichtelektrischen Effekt in Energiebeträgen der Größe  $E = hf$ . Diese quantisierten Energiebeträge werden von **Lichtquanten** oder **Photonen** übertragen. Mit der Absorption eines Photons wird die Energie  $E = hf$  auf ein Elektron übertragen. Die Größe der absorbierten Energiebeträge ist der Frequenz  $f$  des Lichtes proportional.
- Ein Elektron absorbiert jeweils nur die Energie eines Photons. Die Energie des Lichtes wird damit nicht kontinuierlich, sondern nur in festen Energiebeträgen absorbiert.
- Eine Erhöhung der Intensität des Lichtes bedeutet eine Vergrößerung der Anzahl der Photonen, die in einer bestimmten Zeit in einem Volumen absorbiert werden.

Nach dieser Vorstellung wird der lichtelektrische Effekt folgendermaßen erklärt: Aus dem Energiestrom des Lichts absorbieren die Elektronen des Metalls Energie in den Beträgen  $E = hf$ , wobei ein einzelnes Elektron stets nur die Energie eines Photons absorbiert. Nur dann, wenn der Betrag  $E = hf$  größer ist als die zum Austritt aus der Metalloberfläche benötigte Energie, wird ein Elektron auch tatsächlich ausgelöst. Die Energie eines ausgelösten Elektrons ist gleich der Differenz aus der absorbierten Energie  $E = hf$  und der Austrittsenergie. Diese Energiedifferenz besitzt das Elektron als kinetische Energie.

Eine Erhöhung der Intensität des Lichtes führt zu einer Vergrößerung der Anzahl der pro Zeiteinheit und Flächeneinheit absorbierten Photonen, nicht jedoch zu einer Vergrößerung der von den Elektronen absorbierten Energiebeträge. Von intensiverem Licht werden also pro Zeiteinheit und Flächeneinheit mehr, jedoch nicht energiereichere Elektronen ausgelöst. Dies ist eine überraschende Feststellung.

## 10.1.4 Umkehrung des lichtelektrischen Effekts mit Leuchtdioden

Die Vorgänge in einer Leuchtdiode sind in gewisser Weise eine Umkehrung des lichtelektrischen Effekts. Eine Leuchtdiode besteht wie eine Halbleiterdiode aus zwei unterschiedlichen aneinander angrenzenden Materialien. Bei einer Spannung  $U_0$  in Durchlassrichtung an der Diode setzt ein Elektronenstrom durch die Grenzschicht ein ( $\rightarrow$  12.1.3). Die Elektronen besitzen nach der Beschleunigung durch die Spannung  $U_0$  die Energie  $E = eU_0$  als kinetische Energie. Ein Teil der Elektronen gibt die Energie an die Gitteratome ab und erhöht deren Schwingungsenergie. Ein anderer Teil überträgt seine Energie vollständig auf die Strahlung. Die Wellenlängen dieser Strahlung liegen bei Leuchtdioden im sichtbaren Bereich des Spektrums.

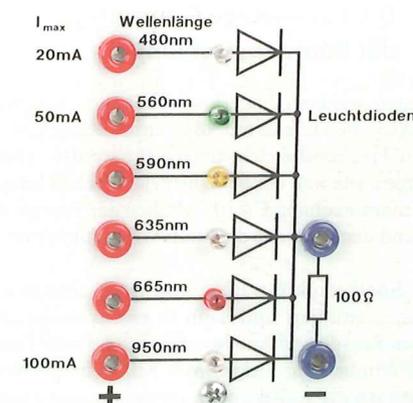
Abhängig von den verwendeten Materialien weisen Leuchtdioden unterschiedliche Werte für die Durchlassspannung  $U_0$  und die Wellenlänge  $\lambda$  bzw. die Frequenz  $f$  der emittierten Strahlung auf. Der Zusammenhang zwischen der Spannung  $U_0$  und der Wellenlänge  $\lambda$  soll untersucht werden.

**Versuch 1:** Ein Schaltbrett enthält Leuchtdioden für Licht unterschiedlicher Farben und Wellenlängen (Abb. 381.1). Die Dioden werden nacheinander an eine regelbare Spannungsquelle angeschlossen. Die Spannung wird so lange erhöht, bis die jeweils angeschlossene Diode leuchtet.

*Ergebnis:* Die Dioden leuchten bei unterschiedlichen Spannungen  $U_0$ , und zwar ist  $U_0$  umso höher, je kleiner die Wellenlänge  $\lambda$  ist.  $\blacktriangleleft$

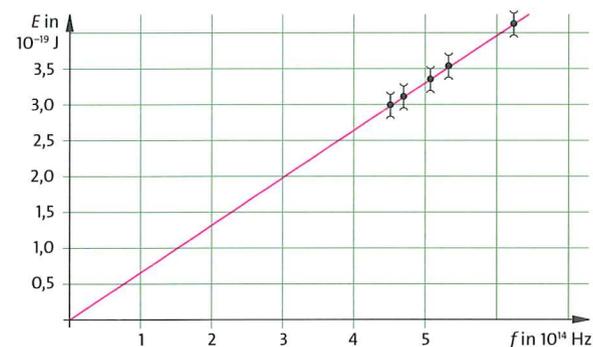
Die Elektronen geben ihre Energie an das Licht ab. Je höher die Spannung ist, desto mehr Energie besitzt das Elektron und desto kurzwelliger ist die emittierte Strahlung (Tab. 381.1).

Wie bei der Untersuchung des lichtelektrischen Effekts interessiert auch hier der Zusammenhang zwischen der Energie der Elektronen und der Frequenz der Strahlung. Die Energie  $E$  lässt sich aus der Spannung  $U_0$  mit  $E = eU_0$  berechnen. Auf dem Schaltbrett in Abb. 381.1 sind die Wellenlängen  $\lambda$  der Dioden bereits angegeben. Sie wurden aus dem Gitterspektrum ( $\rightarrow$  7.3.3) ermittelt. Mit den Werten für  $\lambda$  lässt sich mit  $f = c/\lambda$  die Frequenz  $f$  berechnen. Jede Messung liefert damit ein Wertepaar  $(f|E)$ . Abb. 381.2 zeigt diesen Zusammenhang zwischen der Energie der Elektronen und der Frequenz des emittierten Lichts. Die Messpunkte liegen auf einer Geraden mit der Steigung  $h$ . Die Energie  $E$  des Elektrons wird also vollständig an ein Photon übertragen.



Farbe	$U_0$ in V	$\lambda$ in nm	$f$ in $10^{14}$ Hz
Rot	1,85	665	4,51
Orange	1,95	635	4,72
Gelb	2,10	590	5,08
Grün	2,20	560	5,35
Blau	2,60	480	6,25

381.1 Oben: Leuchtdioden für unterschiedliche Wellenlängen; unten: Messwerte für  $U_0$  und  $\lambda$



381.2 Die Energie der Elektronen über der Frequenz der Strahlung aufgetragen ergibt eine Ursprungsgerade. Das Licht benötigt keine Austrittsenergie. Die Steigung der Geraden liefert den Wert von  $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$  Js.

In einer Leuchtdiode erzeugen Elektronen mit der Energie  $E = eU$  Strahlung der Frequenz  $f$ . Für die dabei emittierten Photonen gilt  $E = hf = eU$ .

## Aufgaben

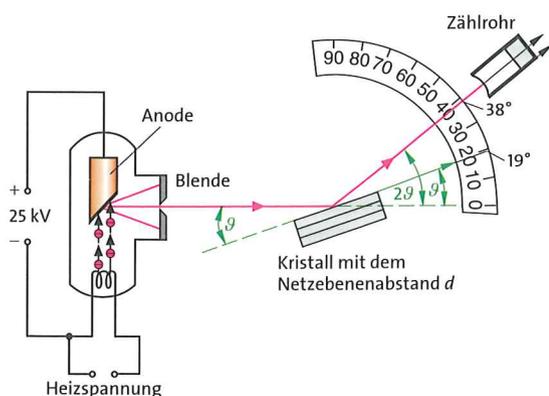
1. Eine Diode hat die Durchlassspannung  $U_0 = 0,65$  V. Berechnen Sie die Wellenlänge des abgestrahlten Lichts.
2. Die in Abb. 381.1 gezeigte untere Leuchtdiode für 950 nm leuchtet trotz der Stromstärke 10 mA nicht. Berechnen Sie die Spannung  $U_0$  bei dieser Wellenlänge. Vergleichen Sie die Strahlung mit der anderer Leuchtdioden.

### 10.1.5 Die kurzwellige Grenze der Röntgenstrahlung

Mit einem weiteren Experiment soll die Umkehrung des lichtelektrischen Effekts mit Röntgenstrahlung, also in einem anderen Frequenzbereich, untersucht werden. Dabei wird sich zeigen, wie weit der beim lichtelektrischen Effekt gefundene Zusammenhang  $E = hf$  zwischen der Energie der Photonen und der Frequenz der Strahlung gültig bleibt.

In der Röntgenröhre werden von einer geheizten Katode Elektronen emittiert und dann in einem elektrischen Feld zwischen Katode und Anode auf eine kinetische Energie von einigen zehntausend Elektronvolt beschleunigt (Abb. 382.1). Die energiereichen Elektronen werden an der Anode abgebremst und geben einen Teil ihrer Energie in Form von Röntgenstrahlung ab. Wie bei der Untersuchung des lichtelektrischen Effekts interessiert auch hier der Zusammenhang zwischen der Energie der Elektronen und der Frequenz bzw. der Wellenlänge der Strahlung. Die Messung von Wellenlängen in der Größenordnung von 100 pm erfolgt mit der Drehkristallmethode.

**Versuch 1 – Drehkristallmethode:** Entsprechend Abb. 382.1 wird die Abhängigkeit der Intensität der Röntgenstrahlung von der Wellenlänge untersucht ( $\rightarrow$  7.4.3). Nach der Bragg-Gleichung  $2d \sin \vartheta = n \lambda$  mit  $n = 1$  reflektiert der Kristall die unter dem Winkel  $\vartheta$  einfallende Strahlung der Wellenlänge  $\lambda$  in Richtung  $2\vartheta$ . Das Zählrohr in der Stellung  $2\vartheta$  misst die Intensität, die zur Strahlung der Wellenlänge  $\lambda$  gehört. Die schrittweise geänderte Stellung des Zählrohrs von  $2\vartheta = 5^\circ$  bis hin zu  $2\vartheta = 90^\circ$  ermöglicht, bei jeder Einstellung die Intensität der Strahlung zu messen. Das Ergebnis ist die Abhängigkeit der Intensität vom Winkel  $\vartheta$  und nach der Umrechnung mit  $\lambda = 2d \sin \vartheta$  von der Wellenlänge  $\lambda$ . **Ergebnis:** Im Spektrum von Abb. 382.2 sind die Messwerte zusammengetragen. Die Intensität ist kontinuierlich über einen Wellenlängenbereich oberhalb einer Grenzwellenlänge verteilt. Zu den kurzen Wellenlängen hin bricht das Spektrum abrupt ab.



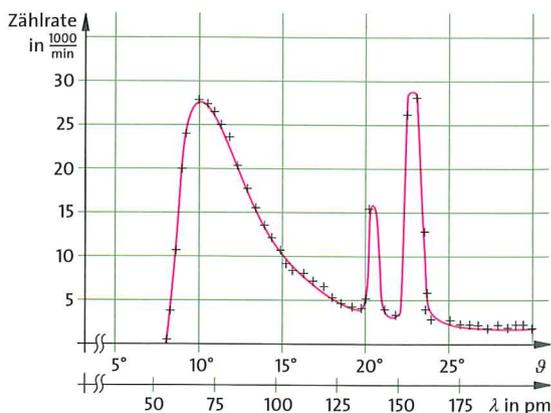
**382.1** Schematischer Versuchsaufbau zur Bestimmung der kurzwelligen Grenze der Röntgenstrahlung. Der Wert von  $\lambda$  ergibt sich aus der Messung des Winkels  $\vartheta$  aus der Bragg-Gleichung  $2d \sin \vartheta = \lambda$ .

**Versuch 2:** Der Versuch 1 wird mit unterschiedlichen Beschleunigungsspannungen  $U_A$  wiederholt. **Ergebnis:** Je größer die Beschleunigungsspannung ist, umso kleiner ist die Wellenlänge, bei der das Spektrum abbricht, die sogenannte kurzwellige Grenze des jeweiligen Spektrums (Abb. 383.1).

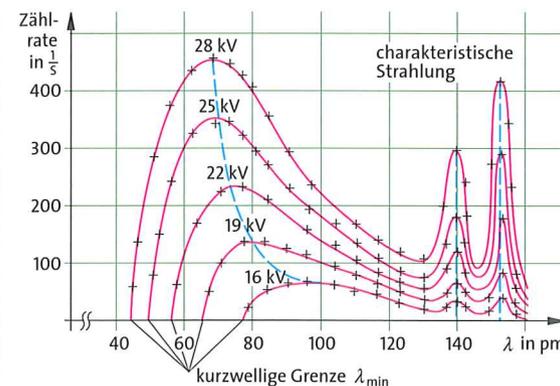
**Versuch 3:** Der Versuch 1 wird bei gleicher Beschleunigungsspannung  $U_A$  mit Anoden aus unterschiedlichen Metallen wiederholt. **Ergebnis:** Es ergeben sich Spektren, wie sie z. B. in Abb. 383.2 dargestellt sind. Bei recht unterschiedlichem Verlauf der Spektren liegt die kurzwellige Grenze für alle untersuchten Metalle bei demselben Wert. Die Spektren unterscheiden sich durch die Lage weniger schmaler Maxima der Intensität. Diese für das jeweilige Anodenmaterial **charakteristische Strahlung** hat keinen Einfluss auf die kurzwellige Grenze.

#### Auswertung der Spektren

Zum Verständnis der Versuchsergebnisse sollen die Vorgänge beschrieben werden, in denen die Elektronen im Anodenmaterial ihre Energie verlieren. Ein wesentlicher Teil der Energie der Elektronen wird als Schwingungsenergie an die Gitteratome abgegeben und führt zu einer starken Temperaturerhöhung der Anode, die daher gekühlt werden muss. Die Elektronen können andererseits Energie beim Abbremsen im Anodenmaterial abgeben. Wie bei der Behandlung der elektromagnetischen Wellen gezeigt wurde ( $\rightarrow$  6.3.7), emittieren beschleunigte Ladungen elektromagnetische Strahlung. Auf diese Weise wird kinetische Energie der Elektronen ganz oder teilweise in Energie der Strahlung bzw. der Photonen umgewandelt. Es entsteht die sogenannte **kontinuierliche Strahlung** oder **Bremsstrahlung**. Die Elektronen geben dabei unterschiedlich große Anteile ihrer kinetischen Energie ab. Je nach Größe des Energiebetrags  $E$  wird wegen  $E = hf$  ein Photon der Frequenz  $f$  bzw. der zugehörigen Wellenlänge  $\lambda$  erzeugt. Es entsteht das in Versuch 1 gemessene kontinuierliche Spektrum (Abb. 382.2). Jedoch kann ein Elektron nicht mehr als seine gesamte Energie  $E = e U_A$  an ein



**382.2** Spektrum der Strahlung einer Röntgenröhre mit Cu-Anode in Abhängigkeit von der Wellenlänge  $\lambda$ . Bremsstrahlung und charakteristische Strahlung überlagern sich. Die Beschleunigungsspannung  $U_A$  ist konstant.



**383.1** Intensität der Röntgenstrahlung (Cu-Anode) in Abhängigkeit von  $\lambda$  bei verschiedenen Beschleunigungsspannungen  $U_A$  und entsprechenden Werten für die kurzwellige Grenze  $\lambda_{\min}$ . Die Wellenlängen der charakteristischen Strahlung bleiben gleich.

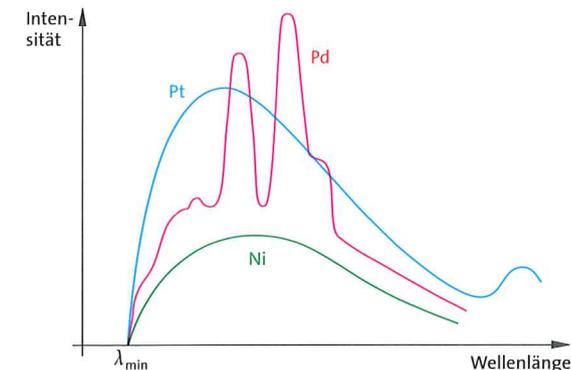
Photon abgeben. Dann wird ein Photon mit maximaler Frequenz erzeugt. Zum höchsten Wert der Frequenz gehört ein kleinster Wert der Wellenlänge, die **kurzwellige Grenze** des Spektrums. Die Ergebnisse in Abb. 383.1 zeigen, wie die kurzwellige Grenze von der Spannung abhängt, mit der die Elektronen beschleunigt werden. Da die Energie  $E$  eines einzelnen Elektrons mit der Spannung  $U_A$  entsprechend  $E = e U_A$  ansteigt, wächst der Energiebetrag, den ein Elektron höchstens einem Photon übertragen kann. Die kurzwellige Grenze der Strahlung verschiebt sich mit steigender Spannung zu niedrigeren Wellenlängen.

Das Bremsspektrum der Röntgenstrahlung besitzt eine durch die Anodenspannung  $U_A$  bestimmte untere Grenze, die kurzwellige Grenze  $\lambda_{\min}$  der emittierten Strahlung.

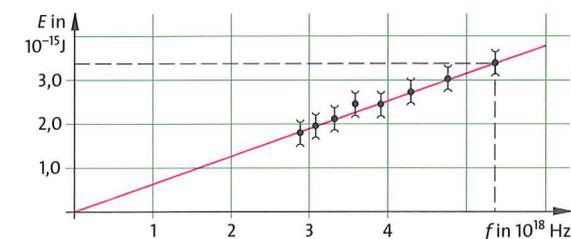
Zum Vergleich mit den Ergebnissen beim lichtelektrischen Effekt soll die Energie der Elektronen über der maximalen Frequenz der Strahlung aufgetragen werden. Aus der jeweils eingestellten Anodenspannung  $U_A$  und der gemessenen kurzwelligen Grenze  $\lambda_{\min}$  sind Energie und Frequenz zu berechnen. Beispielsweise erhalten die mit der Anodenspannung  $U_A = 20,2 \text{ kV}$  beschleunigten Elektronen die Energie  $E = e U_A = 3,2 \cdot 10^{-15} \text{ J}$ . Die Strahlung setzt mit der Wellenlänge  $\lambda_{\min} = 5,6 \cdot 10^{-11} \text{ m}$  ein. Aus  $\lambda_{\min} f_{\max} = c$  ergibt sich die Frequenz  $f_{\max} = 5,4 \cdot 10^{18} \text{ Hz}$ . Für weitere Werte der Anodenspannung  $U_A$  und der kurzwelligen Grenze  $\lambda_{\min}$  sind die zugehörigen Energie- und Frequenzwerte berechnet und als Wertepaare  $(f|E)$  in Abb. 383.3 eingezeichnet.

Weiterhin ist in Abb. 383.3 zum Vergleich mit den Ergebnissen des lichtelektrischen Effekts eine Gerade mit der Steigung  $h$  eingezeichnet. Sie zeigt, dass die Messergebnisse den Zusammenhang  $E = hf$  für Röntgenstrahlung bestätigen.

Bei der Wechselwirkung von Elektronen der Energie  $E = e U_A$  mit Materie entstehen Photonen mit der maximalen Energie  $E_{\max} = hf_{\max} = e U_A$ . Deren Wellenlänge ist  $\lambda_{\min} = c/f_{\max} = hc/e U_A$ .



**383.2** Die Intensität der Strahlung einer Röntgenröhre in Abhängigkeit von  $\lambda$  bei gleicher Beschleunigungsspannung für verschiedene Anodenmaterialien wie Platin (Pt), Nickel (Ni) und Palladium (Pd).



**383.3** Die Energie der Elektronen für unterschiedliche Anodenspannungen in Abhängigkeit von der maximalen Frequenz der erzeugten Strahlung (gestrichelt die Beispielmessung). Die Steigung des Graphen hat den Wert von  $h$ .

#### Aufgaben

- a) In einer Röntgenröhre durchlaufen Elektronen eine Potentialdifferenz  $U_A = 40 \text{ kV}$ . Berechnen Sie die kurzwellige Grenze  $\lambda_{\min}$  der Röntgenstrahlung.  
b) Zeigen Sie, dass zwischen der kurzwelligen Grenze  $\lambda_{\min}$  und der Beschleunigungsspannung  $U_A$  die Beziehung  $\lambda_{\min} = 1240 \text{ nm}/U_A$  gilt.
- Die vom Zählrohr registrierten Impulse unterstützen die Sichtweise, dass einzelne Photonen absorbiert werden. Angenommen, der Wert von  $h$  sei halbiert. Diskutieren Sie unter dieser Voraussetzung das Ergebnis von Versuch 1.
- Mithilfe der Bragg-Reflexion an einem Lithiumfluoridkristall mit der Gitterkonstanten  $d = 201 \text{ pm}$  werden bei verschiedenen fest eingestellten Reflexionswinkeln  $\vartheta$  die Beschleunigungsspannungen  $U_A$  gemessen, bei denen eine Emission von Röntgenstrahlung einsetzt:

$\vartheta$	$8^\circ$	$9^\circ$	$10^\circ$	$11^\circ$	$12^\circ$	$13^\circ$
$U_A$ in kV	19,8	17,6	15,8	14,6	13,5	12,5

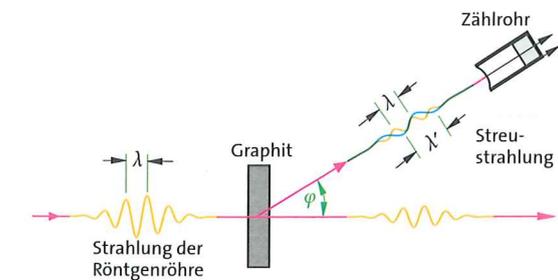
- Berechnen Sie mit der Bragg-Gleichung die Wellenlängen und die Frequenzen und zeichnen Sie den Graphen der Spannung  $U_A$  in Abhängigkeit von der Frequenz  $f$ .
- Bestimmen Sie aus der grafischen Darstellung den Wert des Planckschen Wirkungsquantums  $h$ .

### 10.1.6 Der Compton-Effekt

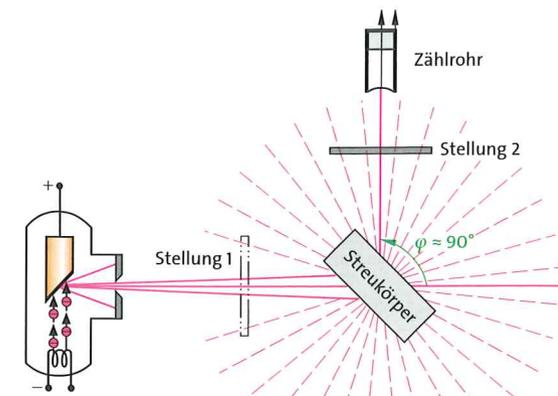
#### Masse und Impuls des Photons

Bei den bislang untersuchten Wechselwirkungen von Licht mit Materie wurde die gesamte Energie des Photons auf jeweils ein Elektron des Festkörpers übertragen. Weitere Untersuchungen zeigen, dass neben der Energie auch Impuls übertragen wird, jedoch nicht an das einzelne Elektron, sondern an den gesamten Festkörper der Fozelle. Die Messung des Impulses der Fotoelektronen liefert deshalb keine verwertbare Aussage über den Impuls  $p$  des Photons bzw. für das Produkt aus dessen Masse  $m$  und Geschwindigkeit  $c$ .

Erste Hinweise zu Impuls und Masse der Photonen liefert die Relativitätstheorie ( $\rightarrow$  9.3.2). Nach der Relativitätstheorie sind Energie und Masse zueinander äquivalente Größen:  $E = mc^2$ . Damit hat ein Photon mit der Energie  $E = hf$  die Masse  $m_{ph} = E/c^2 = hf/c^2$ . Da der Energietransport mit Lichtgeschwindigkeit vor sich geht, ist der Impuls  $p_{ph}$  des Photons das Produkt aus seiner Masse  $m_{ph}$  und seiner Geschwindigkeit  $c$ , also



384.1 Schematische Darstellung des Compton-Effekts: Unter dem Winkel  $\varphi$  wird neben der Strahlung der ursprünglichen Wellenlänge  $\lambda$  auch solche mit größerer Wellenlänge  $\lambda'$  beobachtet.



384.2 Schematische Darstellung des Versuchsaufbaus zum Compton-Effekt: Die gestreute Strahlung wird stärker absorbiert, wenn sich der Absorber in Stellung 2 befindet.

$p_{ph} = m_{ph}c = hf/c = h/\lambda$ , mit der für Wellen geltenden Beziehung  $c = \lambda f$ . So erhalten Photonen neben der Energie die Eigenschaften Masse und Impuls, die von Elektronen oder Protonen bekannt sind, abhängig von  $f$  bzw.  $\lambda$ .

Photonen haben die **Energie**  $E = hf$  und den **Impuls**  $p_{ph} = h/\lambda$ . Ihre **Masse** ist

$$m_{ph} = \frac{E}{c^2} = \frac{hf}{c^2}$$

#### Der Compton-Effekt als Nachweis

Impuls und Masse von Photonen treten z.B. bei der Wechselwirkung hochenergetischer Photonen mit einzelnen Elektronen in Erscheinung. Im Jahre 1922 untersuchte der Amerikaner A.H. COMPTON die Streuung von Röntgenstrahlung an Kohlenstoff und fand, dass neben einer Streustrahlung, die dieselbe Frequenz und Wellenlänge wie die einfallende Strahlung besitzt, ein weiterer Strahlungsanteil mit einer etwas größeren Wellenlänge vorhanden war (Abb. 384.1). Aus der Änderung der Wellenlänge folgt mit  $p = h/\lambda$  eine Impulsänderung des Photons.

Ein nach Abb. 384.2 durchgeführtes Experiment bestätigt die Impulsänderung von Photonen der Röntgenstrahlung beim Stoß mit Elektronen. Dabei wird die Eigenschaft genutzt, dass die Absorption von Röntgenstrahlung durch eine Aluminiumplatte von der Frequenz der Strahlung abhängt. Röntgenstrahlung geringerer Frequenz, also geringerer Energie, wird stärker absorbiert als Strahlung größerer Energie.

**Versuch 1:** Die Intensität der an einem Plexiglasblock gestreuten Strahlung wird gemessen, wobei sich eine Aluminiumplatte als Absorber in Abb. 384.2 erst in der Stellung 1, dann in der Stellung 2 befindet.

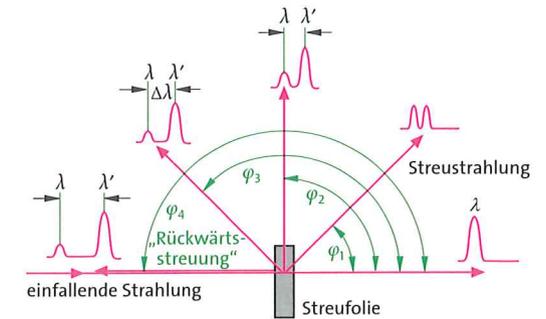
**Ergebnis:** Mit dem Absorber in Stellung 1 ist die Zählrate höher als mit dem Absorber in Stellung 2. Der Unterschied der Zählraten beträgt etwa 10 %.

Der Versuch zeigt, dass die Absorption der gestreuten Strahlung stärker ist als die der noch nicht gestreuten Strahlung. Da Röntgenstrahlung geringerer Energie von der Aluminiumplatte stärker absorbiert wird als Strahlung größerer Energie, zeigt der Versuch, dass die Energie der gestreuten Strahlung geringer ist. Sie hat Energie und Impuls an die Elektronen im Streukörper abgegeben.

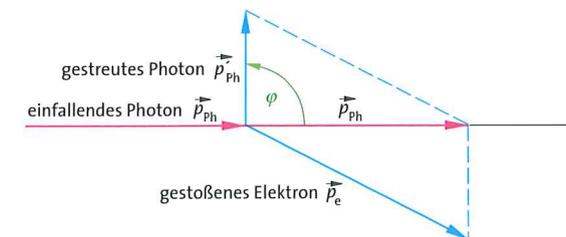
**Compton-Effekt:** Beim Stoß von Photonen mit Elektronen werden wie bei einem elastischen Stoß Energie und Impuls übertragen. Nach dem Stoß haben die Photonen deshalb eine größere Wellenlänge.

#### Die Compton-Formel

Die Änderung der Wellenlänge von Röntgenphotonen wird in Abhängigkeit vom Streuwinkel untersucht. Dabei stellt sich heraus, dass der Unterschied der Wellenlängen der beiden gestreuten Strahlungsanteile mit dem Streuwinkel zunimmt (Abb. 385.1).



385.1 Intensität der einfallenden Röntgenstrahlung mit der Wellenlänge  $\lambda$  und der gestreuten Strahlung mit  $\lambda'$  für verschiedene Streuwinkel  $\varphi$ . Für  $\varphi = 180^\circ$  sind die Intensität der gestreuten Strahlung und die Wellenlängenänderung maximal.



385.2 Darstellung der Impulse des Photons und des Elektrons vor und nach der Streuung.

Der Wellenlängenunterschied soll im Folgenden für  $\varphi = 90^\circ$  berechnet werden. Dabei wird die Wechselwirkung zwischen dem Photon und dem Elektron wie ein elastischer Stoß zwischen zwei Teilchen behandelt, d.h. es gelten der Energieerhaltungssatz und der Impulserhaltungssatz. Die Erklärung der Streustrahlung mit veränderter Frequenz geht davon aus, dass ein Photon mit einem zunächst ruhenden Elektron zusammenstößt und einen Teil seiner Energie und seines Impulses auf das Elektron überträgt. Wegen der Größe der Geschwindigkeit der Elektronen nach dem Stoß muss die Rechnung relativistisch durchgeführt werden ( $\rightarrow$  9.3).

Mit  $m_{0e}$  als Ruhemasse eines Elektrons und  $m_e$  als dynamische Masse ist  $E_{0e} = m_{0e}c^2$  die Energie des Elektrons vor dem Stoß und  $E_e = m_e c^2$  die Energie nach dem Stoß. Das Photon hat vor dem Stoß die Energie  $E_{ph} = hf$  und nach dem Stoß die Energie  $E' = hf'$ .

Energieerhaltungssatz:  $E_{ph} + E_{0e} = E'_{ph} + E_e$

Entsprechende Bezeichnungen gelten für die Impulse (siehe Abb. 385.2).

Impulserhaltungssatz:  $p_{ph}^2 = p_e^2 + p'^2_{ph}$

Die Terme werden in den Impuls-Energie-Zusammenhang für das Elektron  $E_e^2 - p_e^2 c^2 = m_{0e}^2 c^4$  eingesetzt ( $\rightarrow$  9.3.1):

$$m_{0e} c^2 (E_{ph} - E'_{ph}) = E_{ph} E'_{ph}$$

$$m_{0e} c^2 \left( \frac{1}{E'_{ph}} - \frac{1}{E_{ph}} \right) = 1$$

Mit  $E_{ph} = hf$  und  $E'_{ph} = hf'$  folgt

$$\frac{1}{f'} - \frac{1}{f} = \frac{h}{m_{0e} c^2}$$

und mit  $\lambda = cf$  schließlich

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_{0e} c}$$

Für beliebige Winkel gilt

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \frac{h}{m_{0e} c} (1 - \cos\varphi)$$

Bei einer Streuung von Röntgenlicht an Elektronen vergrößert sich die Wellenlänge der um den Winkel  $\varphi$  gestreuten Strahlung um

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_{0e} c} (1 - \cos\varphi)$$

Die Vergrößerung der Wellenlänge hängt nur vom Streuwinkel  $\varphi$  und nicht von der Frequenz oder der Wellenlänge des eingestrahelten Röntgenlichts ab.

Für einen Streuwinkel von  $\varphi = 90^\circ$  ergibt sich eine Wellenlängenänderung von

$$\Delta\lambda_{90^\circ} = \lambda_C = 2,43 \cdot 10^{-12} \text{ m} = 2,43 \text{ pm},$$

die **Compton-Wellenlänge** genannt wird.

Da die Wellenlängenänderung sehr gering ist, kann der Effekt nur bei Strahlung mit kleiner Wellenlänge wie Röntgenlicht nachgewiesen werden.

#### Aufgaben

- Der Schweif eines Kometen ist stets von der Sonne weg gerichtet. Erklären Sie dieses Verhalten durch die Wechselwirkung von Photonen mit Elektronen. Vergleichen Sie mit der Wechselwirkung von Protonen mit Elektronen.
- Bestimmen Sie die maximale Wellenlängenänderung beim Compton-Prozess. Ermitteln Sie den Winkel, unter dem die Strahlung auftritt.
- Übertragen Sie die Ergebnisse des Compton-Effekts auf sichtbares Licht der Wellenlänge  $\lambda = 550 \text{ nm}$ . Berechnen Sie die maximale Wellenlängenänderung und die dabei an ein Elektron übertragene Energie. Beurteilen Sie die Bedeutung des Compton-Effekts für sichtbares Licht.
- Die Frequenz der gestreuten Strahlung bei einem Compton-Prozess beträgt  $f' = 0,990 \cdot 10^{19} \text{ Hz}$  und die der ursprünglichen Strahlung  $f = 1,000 \cdot 10^{19} \text{ Hz}$ . Berechnen Sie die an ein Elektron abgegebene Energie.
- Die Frequenz der einfallenden Strahlung beträgt bei einem Compton-Prozess  $f = 1,2 \cdot 10^{20} \text{ Hz}$ , die Geschwindigkeit der Elektronen nach dem Stoß  $v = 1,5 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ . Berechnen Sie die Frequenz der gestreuten Strahlung.

## 10.2 Verteilung der Photonen im Raum

In den vorangehenden Kapiteln sind die Vorstellungen über das Licht erweitert worden. Einerseits sind Beugung, Brechung und Interferenz zu erklären und zu verstehen, wenn Licht als elektromagnetische Welle behandelt wird, andererseits treten bei der Absorption, bei der Emission und bei der Streuung von Licht Effekte auf, die nicht in die Wellenvorstellung passen und eher auf Eigenschaften des Lichts hindeuten, die als Teilcheneigenschaften bekannt sind.

Es soll nunmehr geklärt werden, wie sich die beiden gegensätzlichen Vorstellungen vom Licht zu einer stimmigen neuen Betrachtungsweise hinführen lassen. Es wäre unbefriedigend, beide Betrachtungsweisen für den einen physikalischen Bereich Licht bzw. elektromagnetische Strahlung beziehungslos nebeneinander beizubehalten. Deshalb wird in diesem Kapitel auch eine Verbindung der beiden Vorstellungen von elektromagnetischer Strahlung hergestellt. Dass zwischen den beiden Betrachtungsweisen ein Zusammenhang besteht, ist an der Energie und dem Impuls der Photonen zu erkennen. Mit dem Energiebetrag  $E = hf$  ( $\rightarrow$  10.1.3) und dem Impuls  $p = h/\lambda$  ( $\rightarrow$  10.1.6) werden dem „Photon“ einerseits Teilcheneigenschaften zugeschrieben, doch gehören die beiden Größen Frequenz  $f$  und Wellenlänge  $\lambda$  andererseits eindeutig zur Wellenvorstellung.

Weder die Teilchen- noch die Wellenvorstellung reicht für sich allein aus, um alle Phänomene zu erklären, wie weitere Untersuchungen und Betrachtungen der im vorangegangenen Abschnitt behandelten Effekte zeigen. Wird z. B. beim lichtelektrischen Effekt linear polarisiertes Licht verwendet, so ergibt sich, dass in der Polarisationsrichtung, also in Richtung des elektrischen Feldstärkevektors der zugehörigen elektromagnetischen Welle, mehr Elektronen emittiert werden als in andere Richtungen. Also scheint die Welleneigenschaft des Lichts hier auf die Energie- und Impulsübertragung an die Elektronen Einfluss zu nehmen.

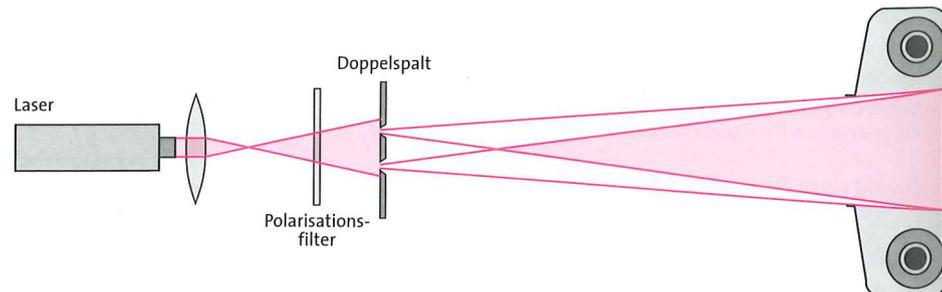
### 10.2.1 Die Photonverteilung hinter dem Doppelspalt

Eine Verbindung zwischen den beiden Vorstellungen vom Licht lässt sich herstellen, wenn beachtet wird, dass mithilfe der **Wellenvorstellung** vom Licht die **Ausbreitung** des Lichts im Raum und mit der **Teilchenvorstellung** die Absorption oder Emission von Photonen, also die **Wechselwirkung** mit Materie, beschrieben werden.

Die Interferenz am Doppelspalt ist aufgrund des einfachen Aufbaus und der mathematisch einfach zu beschreibenden Ergebnisse besonders geeignet, um die Zusammenhänge zu veranschaulichen.

Von einer kohärenten punktförmigen Lichtquelle geht Licht aus und erzeugt hinter einem Doppelspalt eine Interferenzfigur. Die Interferenzfigur besteht aus Bereichen, auf die viel Licht auftrifft, die sich mit Bereichen abwechseln, in denen wenig oder gar kein Licht beobachtet wird. Die von den beiden Doppelspalten kommende Lichtenergie wird also in einer ganz bestimmten Weise im Raum verteilt. Um diese Verteilung der Energie berechnen zu können, werden die Wegdifferenzen der Wellen von den beiden Spalten zum Ort der Beobachtung benötigt. Daraus lässt sich die Phasendifferenz der sich überlagernden Schwingungen bestimmen. Die vektorielle Addition der Teilschwingungen führt auf die Gesamtamplitude ( $\rightarrow$  7.3.5), deren Quadrat proportional zur Intensität ist. Für Licht bedeutet das: Die Intensität, d. h. die an ein Flächenelement in einer Zeiteinheit übertragene Energie ( $\rightarrow$  4.6), ist proportional zum Quadrat der Amplitude der elektrischen Feldstärke  $I \sim \hat{E}^2$ . Durch diese Betrachtungen ist es also möglich, über die Verteilung der Energie in einem Zeitintervall im Raum, über die Intensität, mithilfe der Wellenvorstellung Voraussagen zu machen. Dabei bleibt zunächst die Frage offen, welcher Zusammenhang zur Anzahl und Verteilung von Photonen besteht, deren Energie an die Elektronen der Materie am Beobachtungsort übertragen wird.

**386.1** Registrierung der Intensitätsverteilung hinter einem Doppelspalt mit einer Filmkamera oder einer speziellen elektronischen Kamera (Kameragehäuse jeweils ohne Objektiv). Mit zwei gekreuzten Polarisationsfiltern lässt sich die Intensität einstellen.



### Messung der Intensitätsverteilung

Bei der Untersuchung von Interferenzerscheinungen stand bislang die Berechnung der Orte der Intensitätsmaxima und -minima im Vordergrund, weniger die Registrierung der an den jeweiligen Orten absorbierten Photonen. Das soll jedoch in den folgenden Versuchen geschehen.

**Versuch 1:** Das aufgeweitete Lichtbündel eines Lasers fällt auf einen Doppelspalt (Abb. 386.1). Die Interferenzfigur wird mit einer Fotokamera ohne Objektiv ca. 1 m hinter dem Doppelspalt chemisch oder elektronisch als Bildfolge registriert.

**Beobachtung:** Auf dem Filmnegativ bzw. am Sichtschirm (Abb. 387.1) sind die Orte, an denen Photonen registriert wurden, markiert. ◀

Die linke Bildleiste zeigt, dass sich das Muster der Orte, an denen Photonen registriert wurden, von Bild zu Bild unterscheidet. Die Photonen sind jeweils unregelmäßig verteilt.

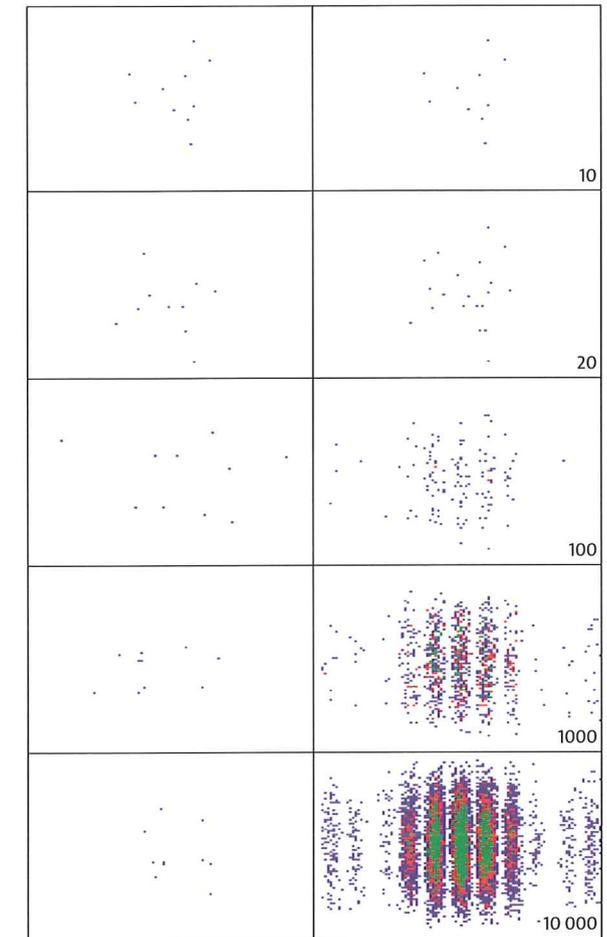
Es ist keine Vorhersage möglich, an welchem Ort das nächste Photon registriert wird.

**Versuch 2:** Die Intensitätsverteilung hinter einem Doppelspalt wird gemessen, indem die Orte, an denen Photonen registriert wurden, markiert werden. In das jeweils nächste Bild werden die bereits gesammelten Markierungen übernommen.

**Beobachtung:** Die rechte Bildleiste (Abb. 387.1) zeigt die im Verlauf der Zeit gesammelten Markierungen. Das zweite Bild der Leiste rechts zeigt die Markierungen des ersten und des zweiten Bildes der linken Leiste. Mit jedem Zeitschritt steigt die Anzahl der registrierten Photonen, damit auch die übertragene Energie und letztlich die Anzahl der Markierungen an den Orten der jeweiligen Wechselwirkungen. ◀

Im Verlauf der Zeit entsteht aus einzelnen markierten Wechselwirkungsorten ein Interferenzbild. In den Intensitätsmaxima des Lichts liegen die Markierungen dicht, und die Zahl der Photonen, die ein Sensor registriert, steigt an. Hier wurde viel Energie pro Flächeneinheit übertragen. In den Minima fehlen die Markierungen. Dort ist die Intensität null, es werden keine Photonen nachgewiesen. Es wurde dorthin keine Energie übertragen.

Die Dichte der Photonen bzw. ihre Anzahl, die ein Sensor mit einem bestimmten Volumen in einer Zeiteinheit registriert, ist proportional zur Intensität  $I$  und damit proportional zum Quadrat der Amplitude der elektrischen Feldstärke  $\hat{E}^2$ .



**387.1** Mit dem Aufbau von Abb. 386.1 wird das Interferenzbild auf einem Film oder elektronisch registriert. Die linke Bildleiste zeigt eine Folge von Einzelaufnahmen mit  $\frac{1}{50}$  s Belichtungszeit. An den Markierungspunkten wurde ein Photon registriert. In der rechten Bildleiste werden die Markierungspunkte gesammelt, erst weitere 10, dann 100, 1000 und 10 000. Im Verlauf der Bildfolge entwickelt sich das Interferenzbild des Doppelspalts. Die Farben kodieren die Anzahl der Photonen.

### Aufgaben

- Die Sehschwelle, an der das menschliche Auge noch etwas wahrnehmen kann, liegt bei  $5 \cdot 10^{-17}$  W. Das Auge erkennt ein Bild in 1/24 Sekunde. Bestimmen Sie die Anzahl der in dieser Zeit aufgenommenen Photonen ( $\lambda = 560$  nm).
- Ein Laser habe eine Strahlungsleistung von 1 mW bei 632,8 nm und einen Strahlquerschnitt von  $4 \text{ mm}^2$ .
  - Bestimmen Sie die Anzahl der Photonen, die in der Sekunde auf  $1 \text{ mm}^2$  einer Fläche senkrecht zum Strahl treffen.
  - Vergleichen Sie die Intensität des Laserlichtes mit der des Sonnenlichts ( $I = 1,36 \text{ kW/m}^2$ ).
- Erklären Sie, warum sich aus der Art und Weise, in der ein Film geschwärzt wird, schließen lässt, dass die Energie des Lichtes ungleichmäßig über die Wellenfront verteilt ist.

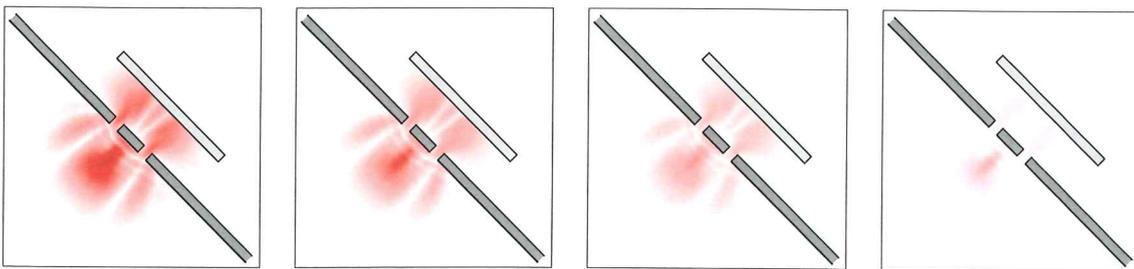
### 10.2.2 Photonenverteilung bei geringer Intensität

Im vorangegangenen Abschnitt 10.2.1 wurde gezeigt, dass die Anzahl der Photonen, die in einem Volumenelement in einer Zeiteinheit registriert wird, proportional zum Quadrat der Amplitude der Welle ist. Unter der Annahme, dass die Photonen in der Lichtquelle erzeugt werden, sich durch den Raum bewegen und dann an einer anderen Stelle im Raum in einem Interferenzbild registriert werden, stellt sich die Frage, ob die Interferenzphänomene vielleicht durch eine Wechselwirkung zwischen den Photonen zustandekommen.

#### Das Experiment von TAYLOR

Um diese Frage zu beantworten, hat der englische Physiker G.I. TAYLOR (1886–1975) im Jahre 1909 Interferenzversuche mit sehr geringer Intensität durchgeführt. Er fotografierte das Beugungsmuster einer Stecknadel, die von einer extrem schwachen Lichtquelle angestrahlt wurde. Die Intensität war so gering, dass er sicher sein konnte, dass die Photonen einzeln in großem zeitlichen Abstand auf dem Film absorbiert werden, d. h. dass keine Wechselwirkung zwischen den Photonen stattfinden konnte. Um dennoch ein sichtbares Bild zu erhalten, musste der Film über eine Zeit von 2000 Stunden belichtet werden. Das Interferenzbild war danach so klar, als wäre es mit großer Intensität zustande gekommen. Das Experiment zeigt weiterhin, dass die Interferenz des Lichtes bei niedrigen Intensitäten nicht als Folge einer Wechselwirkung von Photonen untereinander erklärt werden kann.

Damit war experimentell gezeigt, dass sich auch bei äußerst geringer Intensität des Lichtes auf einem Film mit der Zeit das bekannte Interferenzbild entwickelt. Das Ergebnis entspricht insofern den Erwartungen, als es die Unabhängigkeit der Intensitätsverteilung vom Wert der Intensität zeigt. Dieses Ergebnis ist aus der Wellenoptik bekannt und gilt offenbar auch bei sehr geringer Intensität. **Abb. 388.1** zeigt zur Veranschaulichung einen kurzen Lichtimpuls, der sich durch einen Doppelspalt hin zu einem Schirm bewegt. In der Bildfolge wird  $\hat{E}^2$ , das Amplitudenquadrat der elektrischen Feldstärke, schrittweise verringert. Die Form der Verteilung bleibt davon unbeeinflusst. Das bedeutet, dass beim Aufbau eines Interferenzbildes aus nacheinander registrierten Photonen die einzelnen Photonen in derselben Weise verteilt sind wie bei den mit großer Intensität erzeugten Interferenzbildern, bei denen die Photonen nahezu gleichzeitig auftreten.



**388.1** Durchgang eines kurzen Lichtimpulses durch einen Doppelspalt auf einen Schirm zu: berechnete Verteilung des Amplitudenquadrats der elektrischen Feldstärke  $\hat{E}^2$  zu einem bestimmten Zeitpunkt;  $\hat{E}^2$  wird als Farbsättigung dargestellt. Bei schrittweise verringerter Feldstärke bleibt die Form der Verteilung erhalten.

#### Intensität und Wahrscheinlichkeit

Wenn einerseits die Dichte der in der Zeiteinheit registrierten Photonen proportional zur Intensität  $I$  ist und andererseits die zeitliche Folge der Photonen keinen Einfluss auf die Verteilung nimmt, sollte es möglich sein, über die Registrierung eines einzelnen Photons eine Aussage zu machen.

In der Bildfolge von **Abb. 388.1** erreicht ein Lichtimpuls hinter einem Doppelspalt die Registriereinrichtung. Es zeigen sich Maxima und Minima der Intensität. Offenbar ist in den Bereichen des Interferenzbildes, bei denen die größte Intensität vorliegt, auch die **Wahrscheinlichkeit** am größten, ein Photon zu registrieren. An den Stellen der Intensitätsminima ist die Wahrscheinlichkeit für das Photon null. Die Intensität ist damit proportional zur Wahrscheinlichkeit, ein Photon in einem Volumenelement hinter der Oberfläche zu registrieren. In einem kleineren Volumen sind bei gleicher Intensität weniger Photonen nachzuweisen, sodass die Wahrscheinlichkeit für ein Punktvolumen null wird. Es ist daher nur sinnvoll, die Wahrscheinlichkeitsaussagen auf Raumbereiche zu beziehen.

Die Wahrscheinlichkeit  $w$ , ein Photon in einem Raumbereich  $\Delta V$  zu registrieren, ist proportional zur Intensität  $I$  und damit zum Quadrat der Amplitude der elektrischen Feldstärke  $\hat{E}^2$  der Strahlung in diesem Raumbereich. Der Quotient aus  $w$  und  $\Delta V$

$\frac{w}{\Delta V}$  heißt **Wahrscheinlichkeitsdichte**.

Die Aussagen über die Wahrscheinlichkeit einer Wechselwirkung von Strahlung mit Materie lassen sich nicht auf die Ausbreitung der Strahlung übertragen, wenn keine Wechselwirkungen stattfinden.

#### Aufgaben

- Entwickeln Sie Aussagen über einzelne Photonen aufgrund der Kenntnis der Intensitätsverteilung hinter einem Doppelspalt.
  - Entwickeln Sie weitere Aussagen über sehr viele Photonen hinter einem Doppelspalt.
- Der Versuch von Taylor wird mit einem Laser der Wellenlänge  $\lambda = 633 \text{ nm}$  nachgestellt. Der Weg von der Lichtquelle zum Registrierschirm beträgt  $l = 1 \text{ m}$ . Ermitteln Sie die Laserleistung, die sicherstellt, dass sich im Mittel nur jeweils ein Photon in der Anordnung befindet.

### 10.2.3 Simulation der Photonenverteilung

Nach den Überlegungen des letzten Abschnitts ergibt sich mithilfe der elektrischen Feldstärke der elektromagnetischen Welle eine Wahrscheinlichkeitsaussage über die Registrierung eines Photons in einem Volumen. Der Gedanke, dass die elektrische Feldstärke  $\hat{E}^2$  proportional zur Wahrscheinlichkeit ist, ein einzelnes Photon in einem Raumbereich  $\Delta V$  zu registrieren, wird sich als tragfähig erweisen, wenn sich für viele Photonen das bekannte Bild der Intensitätsverteilung aus der Wellenoptik ergibt.

#### Berechnung von Wahrscheinlichkeiten

Die Entstehung eines Interferenzbildes hinter einem Doppelspalt lässt sich mit einfachen Mitteln simulieren. In der Ebene des Schirms ist die Feldstärke  $\hat{E} \sim \cos(\Delta\varphi/2)$  ( $\rightarrow 7.3.5$ ) und die Intensität  $I \sim \hat{E}^2 \sim \cos^2(\Delta\varphi/2)$ . Hier bezeichnet  $\Delta\varphi$  die Phasendifferenz der beiden Teilschwingungen, die von den Spalten des Doppelspalts ausgehen und sich auf dem Schirm überlagern.

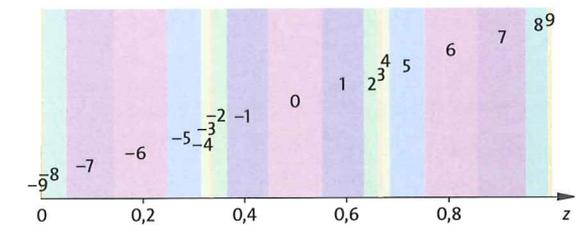
Die Intensität sei im Folgenden so gewählt, dass  $I = 1/(3\pi) \cos^2(\Delta\varphi/2)$  gilt. Der Faktor  $1/(3\pi)$  bewirkt, dass dann die Gesamtwahrscheinlichkeit  $w$  im Bereich  $-3\pi < \Delta\varphi < 3\pi$  den Wert 1 hat. Die Werte von  $w(\Delta\varphi)$  zeigen Maxima bei  $\Delta\varphi = -2\pi, 0, 2\pi$ . Es handelt sich um die bekannten Maxima der Intensität beim Doppelspalt.  $w(0) = 0,1061$  bedeutet beispielsweise, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 11 % ein Photon im Volumen um  $\Delta\varphi = 0$  nachgewiesen wird. Das Volumen ist das Produkt aus der Dicke der Absorptionsschicht und der Fläche mit den Rändern bei  $\Delta\varphi = \pm 0,5$ .

#### Verteilung der Photonen

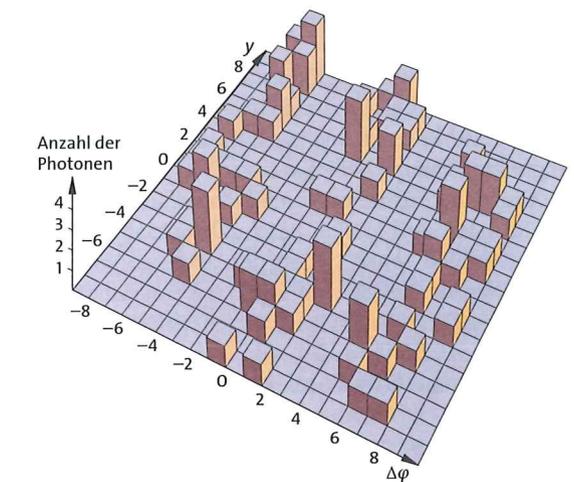
Die Verteilung mehrerer Photonen erfolgt in Abhängigkeit von der Wahrscheinlichkeit der jeweiligen Intervalle. Besonders einfach wird das Verteilen, wenn für jedes Intervall ein Streifen mit der Breite der zugehörigen Wahrscheinlichkeit hergestellt wird. Die aneinandergelagerten Streifen bilden das Streifenmuster in **Abb. 389.1**. Eine Zufallszahl  $z$  aus dem Intervall  $[0; 1]$ , die ein Taschenrechner oder ein Computer liefert, bestimmt aus dem Streifenmuster von **Abb. 389.1** eine Phasendifferenz  $\Delta\varphi$ . Mit  $z = 0,61$  erhält man beispielsweise in **Abb. 389.1**  $\Delta\varphi = 1$ .

Diese Phasendifferenz bestimmt das Intervall  $\Delta\varphi = 1 \pm 0,5$  und damit eine Zeile von Flächenelementen in **Abb. 389.2**. Die Spalte wird über eine weitere Zufallszahl aus dem Intervall  $[-3\pi, 3\pi]$  ermittelt, z. B. 8. Da die Intensität in dieser Richtung nahezu konstant ist, folgt eine für alle Flächenelemente gleiche Wahrscheinlichkeit. Die so ermittelten Koordinaten  $(\Delta\varphi | y) = (1 | 8)$  bestimmen die Teilfläche, in der das simulierte Photon registriert wurde. Die Markierung kann beispielsweise wie in **Abb. 389.2** als Würfel erfolgen.

Die Durchführung des Verfahrens für sehr viele Photonen kann einem Computer überlassen werden. **Abb. 389.2** zeigt die Ergebnisse für 100 Photonen. Die Simulation der Verteilung für sehr viele Photonen hinter einem Doppelspalt unterstützt die Auffassung, dass das Quadrat der Amplitude der Lichtwelle proportional zur Wahrscheinlichkeit ist, ein Photon in einem Messvolumen nachzuweisen.



**389.1** Die den Streifen für  $\Delta\varphi = -9 \pm 0,5$  bis  $\Delta\varphi = 9 \pm 0,5$  zugeordneten Wahrscheinlichkeiten zeigen sich als Streifenbreite. Streifen mit hohen Wahrscheinlichkeitswerten sind entsprechend breiter gezeichnet. Die aneinandergelagerten Streifen haben die Breite 1. In der Simulation wird mit der Zufallszahl  $0 < z < 1$  ein Ort auf dem Streifen und damit eine Phasendifferenz  $\Delta\varphi$  und damit im Weiteren das Flächenelement der Wechselwirkung ausgewählt.



**389.2** Simulation der Verteilung von Photonen hinter einem Doppelspalt mit einem Computer. Das Bild zeigt eine Verteilung von 100 Photonen. Mehrere im selben Flächenelement registrierte Photonen sind übereinander aufgetragen, sodass die Höhe der Säule proportional zur Anzahl der Photonen ist.

Die relative Häufigkeit, mit der Photonen in einem Raumbereich  $\Delta V$  registriert werden, grenzt für eine große Anzahl von Photonen an die Wahrscheinlichkeit  $w$  dieses Raumbereichs.  $w$  ist proportional zur Intensität  $I$  und damit zum Quadrat der Amplitude der elektrischen Feldstärke  $\hat{E}^2$  der Strahlung im Volumen  $\Delta V$ .

#### Aufgaben

- Der Nachweis der Photonen soll hinter Flächenelementen halbiertes Länge und Breite erfolgen (**Abb. 389.2**).
  - Bestimmen Sie die geänderten Wahrscheinlichkeiten für die Flächenelemente.
  - Erläutern Sie die Änderungen im Bildaufbau.

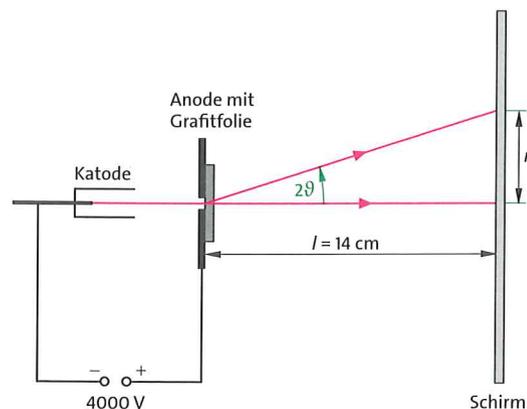
## 10.3 Welleneigenschaften der Elektronen

In diesem Kapitel soll gezeigt werden, dass – ebenso wie Strahlung Teilcheneigenschaften besitzt – Teilchen Welleneigenschaften aufweisen. Teilchen wie z. B. Elektronen haben im Gegensatz zu Photonen eine Ruhemasse ( $\rightarrow$  9.3.1). Dass nun auch Elektronen Welleneigenschaften besitzen, wirkt zunächst befremdend. Elektronen sind aus der klassischen Physik als punktförmige Teilchen mit Eigenschaften wie Masse, Impuls, Energie usw. aus Experimenten bekannt. Ihre Welleneigenschaften wie Interferenz und Beugung sind, wie sich zeigen wird, zwar nicht einfach nachzuweisen, aber doch beobachtbar.

### 10.3.1 De-Broglie-Wellen

Im Jahre 1923 veröffentlichte der Franzose Louis DE BROGLIE (ausgesprochen: de broj) als Erster Gedanken über eine Wellentheorie von Teilchen. Bei der Herleitung seiner Theorie ließ er sich von der Analogie zum Licht leiten: Die Ausbreitung von Licht lässt sich mithilfe von Strahlen und Wellen beschreiben. Dabei stehen die Lichtstrahlen senkrecht zu den Wellenfronten. In beiden Fällen handelt es sich um Modellvorstellungen, mit denen man Phänomene der Lichtausbreitung beschreibt und erklärt.

Dementsprechend ordnete DE BROGLIE nun allen Teilchen, z. B. den Elektronen, bei ihrer Ausbreitung Wellen zu. Vom Licht sind Eigenschaften, die sich in den Formeln  $E = hf$ ,  $E = mc^2$  und  $p = h/\lambda$  ausdrücken, bekannt. Es ist zu untersuchen, in welcher Weise diese Zusammenhänge auf Elektronen und eventuell andere Teilchen übertragbar sind.



390.1 Schematische Darstellung des Aufbaus der Röhre zur Elektronenbeugung. Mit der Formel  $\tan 2\theta = r/l$  und der Bragg'schen Gleichung  $2d \sin \theta = \lambda$  lässt sich die Wellenlänge berechnen.

DE BROGLIE stellte folgende Hypothesen auf:

#### Hypothesen von DE BROGLIE

- Teilchen zeigen Welleneigenschaften. Die Wellenlänge ist  $\lambda = h/p$ .  $h$  ist das Planck'sche Wirkungsquantum und  $p$  der Impuls des Teilchens.
- Zwischen der Frequenz  $f$  der Welle und der Gesamtenergie  $E$  des Teilchens besteht die Beziehung  $E = hf$ .

Die Gleichung  $\lambda = h/p$  wird als De-Broglie-Gleichung bezeichnet,  $\lambda$  ist die **De-Broglie-Wellenlänge**.

Die Wellenlänge, die demzufolge z. B. ein Elektron besitzt, lässt sich leicht abschätzen: Mit der Elektronenmasse  $m$  und der Elementarladung  $e$  ergibt sich aus der Beschleunigungsspannung  $U = 4000$  V und den Energietermen  $\frac{1}{2}mv^2 = eU$  die Geschwindigkeit  $v = 3,75 \cdot 10^7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ . Der Impuls  $p = mv$  ist  $p = 3,42 \cdot 10^{-23} \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}}$ , der sich in die De-Broglie-Gleichung  $\lambda = \frac{h}{p}$  einsetzen lässt. Daraus ergibt sich die De-Broglie-Wellenlänge des Elektrons zu:  $\lambda = 1,9 \cdot 10^{-11} \text{ m} = 19 \text{ pm}$ .

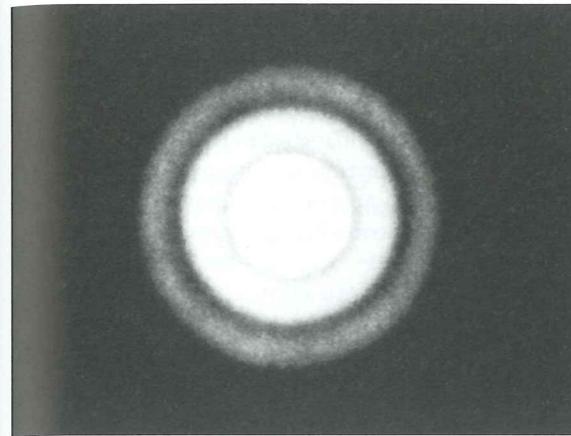
Die Wellenlänge liegt im Bereich der Röntgenstrahlung, sodass ein Nachweis von Welleneigenschaften bewegter Elektronen mit Methoden gelingen kann, die auch bei Röntgenstrahlung angewendet werden. Welleneigenschaften von Röntgenstrahlung zeigen sich in den Interferenzen bei der Durchstrahlung von Kristallen ( $\rightarrow$  7.4.3). Der experimentelle Nachweis der Welleneigenschaften von Elektronen gelang DAVISSON und GERMER 1927 mit einem Nickelkristall.

Sehr ähnlich ist der folgende Versuch, bei dem statt eines Einkristalls eine dünne Schicht kleiner Grafitkristalle verwendet wird.

**Versuch 1:** Auf der durchbohrten Anode einer Elektronenstrahlröhre ist eine dünne Folie mit Grafitkristallpulver angebracht (Abb. 390.1). Der gebündelte Elektronenstrahl durchläuft eine Spannung von ca. 4000 V, bevor er auf die Grafitkristalle trifft.

**Beobachtung:** Auf dem Leuchtschirm der Röhre erscheint ein kreisförmiges Bild mit einer ausgedehnten hellen Mitte und zwei deutlich voneinander getrennten hellen Ringen (Abb. 391.1). ◀

Da die Elektronen beim Durchdringen der Grafitschicht aus ihrer ursprünglichen Richtung abgelenkt, also gestreut werden, sollte erwartungsgemäß eigentlich auf dem Leuchtschirm eine kreisförmige helle Fläche erscheinen, bei der die Helligkeit von innen nach außen gleichmäßig abnimmt.



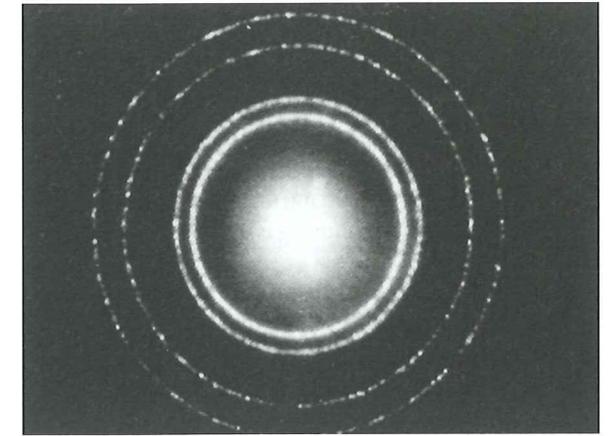
391.1 Beugungsbild eines Elektronenstrahls beim Durchgang durch eine Grafitfolie. Die Interferenzen entstehen durch Netzebenen im Abstand  $d_1 = 123 \text{ pm}$  und  $d_2 = 213 \text{ pm}$ .

Das Auftreten der Ringe ist jedoch überraschend und deutet auf eine Interferenzerscheinung hin. Eine ganz ähnliche Figur ergibt sich beim Durchstrahlen von Metallfolien (Abb. 391.2).

**Deutung:** Für Interferenzerscheinungen mit Röntgenstrahlen an Kristallen gilt die Bragg'sche Gleichung  $n\lambda = 2d \sin \theta$ , mit  $n = 1, 2, \dots$ . Dabei ist  $d$  der Abstand der Netzebenen eines Kristalls und  $\theta$  der Winkel, unter dem die Strahlung auf die Netzebene fällt und reflektiert wird, wenn die Intensität der reflektierten Strahlung ein Maximum erreicht ( $\rightarrow$  7.4.3).

Die Interferenzringe kommen folgendermaßen zustande: Die Grafitschicht ist aus vielen einzelnen Mikrokristallen aufgebaut, die ungeordnet nebeneinanderliegen. Die Netzebenen der Mikrokristalle bilden mit dem einfallenden Strahl alle möglichen Winkel und u. a. auch stets solche, für die die Bragg'sche Gleichung  $\lambda = 2d \sin \theta$  erfüllt ist. In diesem Fall wird der Elektronenstrahl um den Winkel  $2\theta$  abgelenkt. Andere Mikrokristalle, die um die Achse der Ausbreitungsrichtung gedreht vorliegen, werden von den Elektronen unter dem Winkel  $\theta$  getroffen und bewirken ebenfalls eine Ablenkung um  $2\theta$ . Daher verlassen die Strahlen die Grafitkristalle auf dem Mantel eines Kegels, dessen Achse der einfallende Elektronenstrahl ist und dessen Spitze in der Grafitschicht liegt (Abb. 390.1). Der senkrecht zur Kegelachse stehende Leuchtschirm zeigt ein kreisförmiges Maximum.

**Auswertung:** Bei den beiden hellen Ringen handelt es sich um Maxima 1. Ordnung, die durch Reflexionen an Netzebenen im Abstand  $d_1 = 123 \text{ pm}$  und  $d_2 = 213 \text{ pm}$  entstehen. Für die Wellenlänge ergibt sich also  $\lambda = 2d \sin \theta$ . Aus der Geometrie des Aufbaus (Abb. 390.1)



391.2 Interferenzbilder beim Durchgang von Elektronen durch eine Aluminiumfolie. (Aus dem PSSC-Film Matter Waves, Atkins, Physik, de Gruyter)

folgt  $\tan 2\theta = r/l$ . Mit den Werten  $r = 2,2 \text{ cm}$  und  $l = 14 \text{ cm}$  aus dem Experiment lässt sich bei  $d = 123 \text{ pm}$  die De-Broglie-Wellenlänge  $\lambda = 19 \text{ pm}$  berechnen. Dieser Wert stimmt mit dem zuvor mit der Formel  $\lambda = h/p$  bestimmten Wert überein. ◀

Das Experiment ermöglicht es ferner, die Abhängigkeit der Wellenlänge vom Impuls zu zeigen: Eine höhere Beschleunigungsspannung führt zu kleineren Wellenlängen der Elektronen und zu Beugungsringen mit kleineren Radien. Insgesamt bestätigt der Versuch die Hypothese von DE BROGLIE:

Elektronen mit dem Impuls  $p$  haben die Wellenlänge  $\lambda = h/p$ .

Für Elektronen, die sich mit Geschwindigkeiten in der Größenordnung der Lichtgeschwindigkeit  $c$  bewegen, muss der Zusammenhang zwischen Impuls und Energie relativistisch gerechnet werden ( $\rightarrow$  9.3.1).

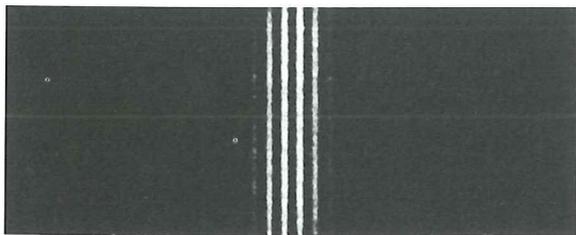
#### Aufgaben

1. Berechnen Sie die De-Broglie-Wellenlänge von Elektronen, die verschiedene Beschleunigungsspannungen durchlaufen haben:  $U_1 = 1 \text{ V}$ ;  $U_2 = 10^3 \text{ V}$ ;  $U_3 = 10^6 \text{ V}$ .  
Vergleichen Sie jeweils kinetische Energie, Geschwindigkeit, Impuls und De-Broglie-Wellenlänge.
2. Berechnen Sie für Photonen und Elektronen der Wellenlänge  $\lambda = 100 \text{ pm}$  den Impuls und die kinetische Energie.
- \*3. a) Angenommen, der Wert der Konstanten  $h$  ändert sich um den Faktor 10 (um  $\frac{1}{10}$ ). Diskutieren Sie unter diesen Voraussetzungen das Ergebnis von Versuch 1.  
b) Schätzen Sie Werte von  $h$  ab, bei denen keine Interferenzerscheinungen zu beobachten wären.

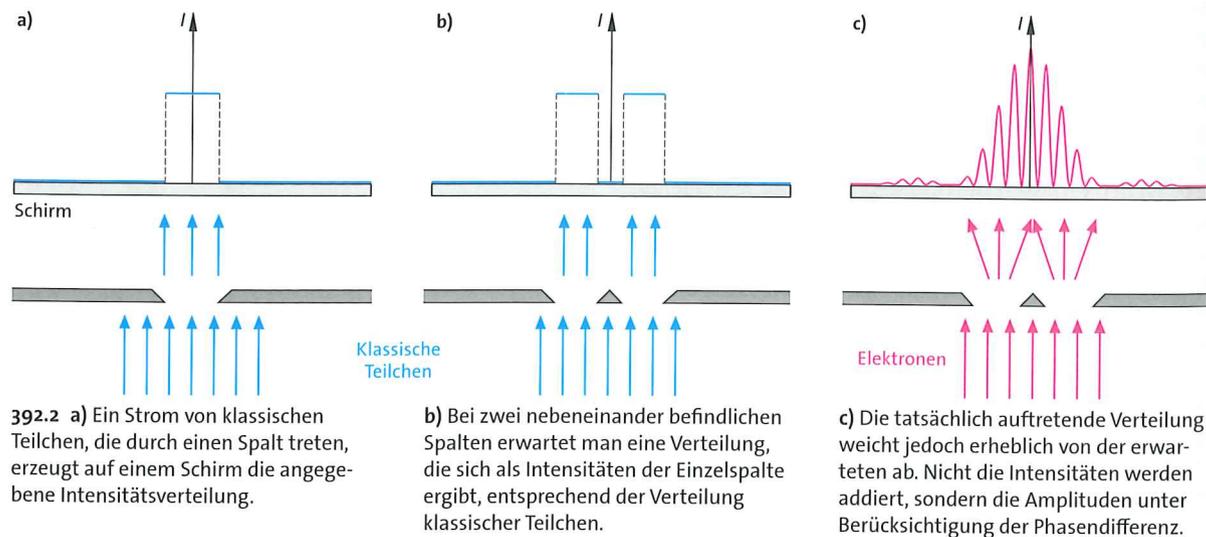
### 10.3.2 Das Elektron – kein klassisches Teilchen

Im vorangegangenen Kapitel sind für die Ausbreitung von Elektronen Welleneigenschaften postuliert worden. Dass beim Durchgang von Elektronen durch Kristalle Interferenzerscheinungen auftreten, ist ein Indiz dafür, dass dieses Postulat vernünftig ist.

Weitere Versuche, die die Welleneigenschaften von Elektronen zeigen, können sich im Prinzip an den Interferenzexperimenten mit Licht orientieren. Es zeigt sich allerdings, dass es sehr schwierig ist, die entsprechenden Experimente zu realisieren. Dafür verantwortlich ist im Wesentlichen der kleine Wert der De-Broglie-Wellenlänge von etwa 5 pm, der sich aus der für eine elektronenoptische Fokussierung erforderlichen Beschleunigungsspannung von ca. 50 kV nach den Zusammenhängen  $eU = p^2/2m$  und  $p = h/\lambda$  ergibt. Ein **Doppelspaltversuch mit Elektronen** wurde 1959 von C. JÖNSSON mit eng zusammenliegenden, feinen Spalten durchgeführt.



392.1 Elektronenstrahlinterferenzen an einem Doppelspalt nach JÖNSSON in ca. 10 000-facher Vergrößerung. Die Beobachtung der Interferenzfigur erfolgt wegen ihres geringen Streifenabstands mit einem Elektronenmikroskop.



Eine wesentliche Schwierigkeit lag für JÖNSSON damals darin, außerordentlich feine metallische Spalte herzustellen. Es gelang ihm, eine Spaltbreite von 0,5  $\mu\text{m}$  mit einem Spaltabstand von 2  $\mu\text{m}$  herzustellen. Im Vergleich zur De-Broglie-Wellenlänge der Elektronen ist dieser Abstand um viele Größenordnungen größer, sodass mit einem sehr engen Abstand der Interferenzstreifen zu rechnen war. Zur Beobachtung verwendete JÖNSSON ein Elektronenmikroskop, welches das Interferenzmuster vergrößert abbildete (Abb. 392.1).

Der experimentelle Nachweis von Interferenzen gelingt nicht nur mit Elektronen. Entsprechende Experimente zeigen auch Interferenzen von Protonen, Neutronen, Atomen und sogar Molekülen.

#### Welleneigenschaften in der Ausbreitung

Der Doppelspaltversuch ist geeignet, um noch einmal über die Teilchen- und Wellenvorstellung bei Elektronen nachzudenken. Die Elektronen werden aufgrund des glühelektrischen Effekts aus der Metalloberfläche emittiert, in einem elektrischen Feld beschleunigt, treffen auf die Doppelspaltanordnung und werden dann auf einem Bildschirm registriert.

Bei der Emission und beim Auftreffen der Elektronen auf dem Bildschirm scheint es sich um einzelne Teilchen zu handeln. Dann wäre es eigentlich auch naheliegend sich vorzustellen, dass die Elektronen genauso als kleine Teilchen durch den Raum zum Doppelspalt gelangen und dort entweder durch den einen oder den anderen Spalt fliegen usw. Doch genau dann, wenn angenommen wird, dass die Elektronen entweder durch den einen oder den anderen Spalt fliegen, lässt sich die Interferenzerscheinung nicht mehr erklären.

Abb. 392.2 a) zeigt, wie die Verteilung von klassischen Teilchen, die durch einen schmalen Spalt fliegen und dabei ein wenig abgelenkt werden, vorstellbar ist. Sind nun beide Spalte offen, so müsste die Summe der beiden Verteilungen die neue Verteilung ergeben (Abb. 392.2 b). Genau das ist aber nicht der Fall, sondern es ergibt sich ein Interferenzbild mit eng beieinanderliegenden Maxima und Minima (Abb. 392.2 c).

Es ist also falsch anzunehmen, dass ein Elektron durch einen bestimmten Spalt geht, denn dies würde zu der absonderlichen Vorstellung führen, dass das Elektron wissen müsste, ob der andere Spalt offen oder geschlossen ist. Ist nur ein Spalt geöffnet, so treffen Elektronen in Bereichen auf dem Schirm auf, in denen sich bei zwei offenen Spalten keine Elektronen nachweisen lassen (Abb. 392.2 b). Wie bei Licht ist das Verhalten von Elektronen nur dann vollständig beschrieben, wenn für ihre Ausbreitung Welleneigenschaften verwendet werden.

#### Exkurs

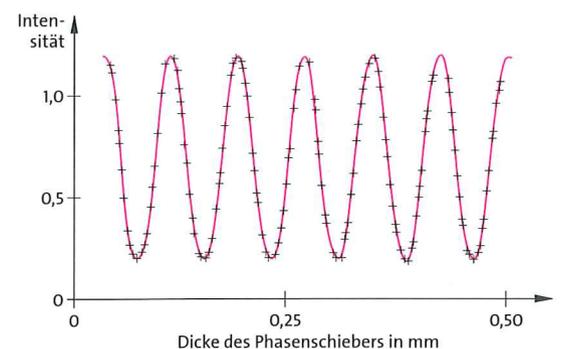
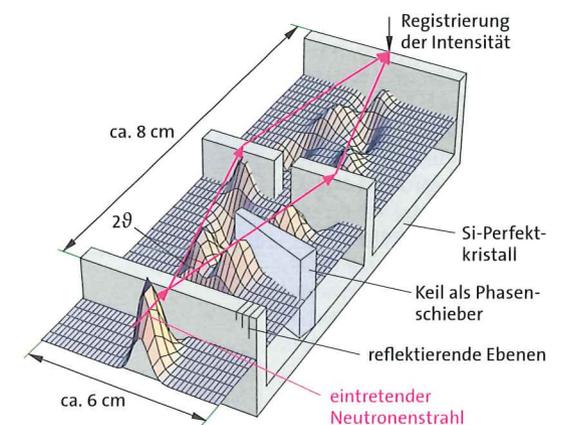
##### Interferenzen von Neutronen

1974 gelang es H. RAUCH, Interferenzen mit Neutronen nachzuweisen. Er verwendete ein ca. 8 cm großes Interferometer aus einem perfekten Siliciumkristall. Die eintretenden Neutronen mit der Wellenlänge  $\lambda$  werden mit einer ersten Kristallplatte ähnlich einem Strahlteiler aufgespalten. Entsprechend der Bragg-Gleichung  $2d \sin \vartheta = \lambda$  wird ein Teil der eintretenden Welle unter dem Winkel  $2\vartheta$  abgelenkt. Die Teilwellen sind damit um den doppelten Bragg-Winkel  $\vartheta$  voneinander getrennt. Die Dicke der Kristallplatten ist so gewählt, dass die beiden Teilwellen nahezu gleiche Amplituden aufweisen.

In einer zweiten Kristallebene wiederholt sich die Aufspaltung in Teilwellen durch Bragg-Beugung. Ein Teil der Neutronenwellen wird in Einfallsrichtung austreten. Diese Anteile sind nicht eingezeichnet. Die um den doppelten Bragg-Winkel  $\vartheta$  abgelenkten Teilwellen treffen auf eine dritte Kristallebene, an der die Registrierung stattfindet.

Die weite räumliche Trennung der Teilwellen vereinfacht die Erzeugung von Phasendifferenzen bei der Überlagerung der Teilwellen. In den einen Strahlengang wird ein Aluminiumkeil eingebaut, der die Ausbreitungsgeschwindigkeit für Neutronen verändert. Abhängig von der Stärke der durchlaufenen Schicht verändert sich die Phase dieser Teilwelle. Die Überlagerung der Teilwellen liefert, abhängig von der Phasendifferenz, Maxima und Minima für die Zahl der nachgewiesenen Neutronen.

Die Qualität des Interferenzbildes, die sich in den Intensitätsunterschieden der Maxima und Minima zeigt, hängt von der Perfektheit des verwendeten Kristalls und der Konstanz der Wellenlänge der verwendeten Neutronen ab.



Das Verhalten von Elektronen wird nur dann vollständig beschrieben, wenn zur Beschreibung ihrer Ausbreitung Welleneigenschaften und für die Beschreibung der Wechselwirkung Teilcheneigenschaften verwendet werden.

#### Aufgaben

1. Zum Versuch von JÖNSSON: Elektronen werden mit einer Spannung  $U_A = 54,7$  kV beschleunigt und hinter einem Doppelspalt (Spaltabstand  $d = 2$   $\mu\text{m}$ ) im Abstand  $e = 40$  cm registriert. Berechnen Sie die Wellenlänge  $\lambda$  der Elektronen und den Abstand  $a$  der Interferenzmaxima.
2. Der Versuch von JÖNSSON (Aufgabe 1) soll mit Protonen statt mit Elektronen bei sonst gleichen Aufbauwerten durchgeführt werden. Berechnen Sie die Wellenlänge und den Abstand der Interferenzmaxima.
- \*3. Berechnen Sie die De-Broglie-Wellenlänge einer Metallkugel der Masse 1 g, die sich mit  $v = 1$  m/s bewegt. Bewerten Sie die Möglichkeit, in diesem Fall Interferenzen nachzuweisen.

## Exkurs

## Grenzgänger: Welleneigenschaften großer Moleküle

## Interferenzen großer Teilchen

Eine erste Neuorientierung, weg von der klassischen Physik, erforderten die mit der Elektronenbeugungsröhre gezeigten Welleneigenschaften von Elektronen. Das Experiment zeigt, dass ein Elektron die Wellenlänge  $\lambda$  hat, die nach de Broglie von seinem Impuls  $p$  abhängt:  $\lambda = h/p$ . Mit der Erklärung des Experiments wird noch eine weitere Eigenschaft des Elektrons vermittelt, wenn auch vielfach nicht explizit genannt: *seine Größe*. Die Bewegung des Elektrons erfolgt als Welle oder besser als räumlich ausgedehntes Wellenpaket, dessen Kohärenzbereich durch die Eigenschaften der Quelle festgelegt ist. Die Welleneigenschaften, die sich in der Interferenz zeigen, treten im Überlagerungsbereich von kohärenten Wellenpaketen auf.

Eine interessante Aufgabe ist, die Interferenz *größerer Objekte* nachzuweisen.

Die Interferenzfähigkeit von Elektronen als Vertreter kleiner Objekte wurde bereits demonstriert ( $\rightarrow$  10.3.1). Mit Protonen, Neutronen und selbst mit Atomen lassen sich Interferenzen nachweisen. Wenn an dieser Stelle von „kleineren“ und „größeren“ Objekten gesprochen wird, ist damit nicht der Kohärenzbereich des zugehörigen Wellenpaketes gemeint. Es stellt sich deshalb die Frage, welche experimentellen Ergebnisse denn auf *große* Moleküle und *kleine* Elektronen hinweisen. Offensichtlich findet hier eine andere, weitere „Größe“ Anwendung.

Zurzeit finden Experimente mit aus vielen Atomen zusammengesetzten, großen Molekülen statt. Es wird versucht, bei immer größeren Objekten Interferenzen nachzuweisen. Die Frage nach einer fundamentalen Grenze für die Kohärenz von De-Broglie-Wellen hinsichtlich der Größe der beteiligten Teilchen ist noch offen.

## Experimente mit Fullerenen

Zurzeit liegen die Ergebnisse von Interferenz-Experimenten mit sehr großen Molekülen vor. Unter den vielen möglichen Kandidaten haben sich die Fullerene  $C_{60}$  und  $C_{70}$  als besonders geeignete Objekte herausgestellt. Sie sind in ausreichenden Mengen verfügbar und haben aufgrund ihrer inneren Struktur eine sehr hohe Stabilität. Das *Buckminsterfulleren*  $C_{60}$ , wegen seiner Fußballform oft auch als „buckyball“ bezeichnet, besteht aus 60 Kohlenstoffatomen, die 12 Fünfecke und 20 Sechsecke auf einem gekappten Ikosaeder von 1,0 nm Durchmesser formen.

Die Masse der Fullerene übersteigt die der bislang für Interferenzversuche verwendeten Moleküle um eine Größenordnung. Vor allem aber unterscheidet sie ihre komplexe innere Struktur von einfacheren Systemen, wie z. B. Atomen und Molekülen aus wenigen Atomen.

## Das Experiment

Das Fullerenexperiment ist in Analogie zum Doppelspaltexperiment aufgebaut. Es gibt eine Quelle, eine beugende Struktur und einen ortsauffösenden Detektor. Alle gemeinsam sind in eine Vakuumapparatur bei  $5 \cdot 10^{-7}$  mbar eingebaut, um sicherzustellen, dass Stöße mit dem Hintergrundgas keine Rolle spielen. Die thermische Quelle ist ein  $600^\circ\text{C}$  heißer Stahlofen, der Fullerenpulver verdampft und so einen breiten Molekularstrahl erzeugt.

Die Moleküle in diesem Strahl sind aufgrund der thermischen Bewegung sehr schnell. Bei der wahrscheinlichsten Geschwindigkeit von rund 220 m/s hat ein  $C_{60}$  Molekül eine De-Broglie-Wellenlänge von 2,5 pm, die damit etwa 400-mal kleiner ist als der Durchmesser des Moleküls. Die komplette Geschwindigkeitsverteilung und damit auch das De-Broglie-Spektrum wird mittels Flug-

zeitmessungen ( $\rightarrow$  4.2.2) aufgenommen.

Die Geschwindigkeitsverteilung zeigt, dass die Quelle bei weitem nicht monochromatisch ist. Für den Versuch ist auch die Kohärenz senkrecht zur Ausbreitungsrichtung wichtig; sie ist ein Maß für die „Ausdehnung“ der kohärenten Wahrscheinlichkeitswelle eines Moleküls über die Stäbe des Beugungsgitters und wird durch die beiden 10  $\mu\text{m}$  breiten Kollimations-spalte bestimmt, die etwa 1 m voneinander entfernt zwischen der Quelle und dem Beugungsgitter angeordnet sind. Die Impulsunschärfe ( $\rightarrow$  10.4.1) senkrecht zur Ausbreitungsrichtung bewirkt die kohärente „Ausleuchtung“ einiger weniger Gitterstriche.

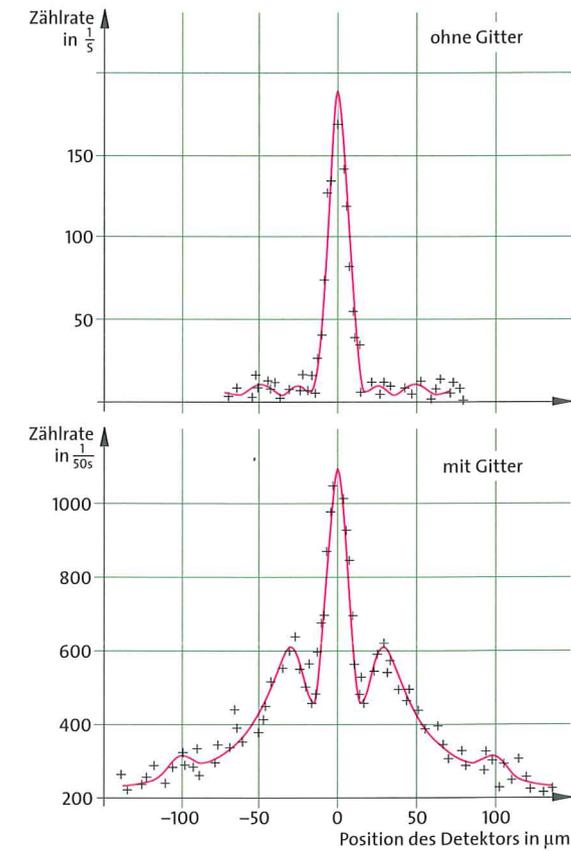
Das der Kollimation folgende SiN-Gitter hat eine Gitterkonstante von 100 nm und ein geometrisches Steg-Lücke-Verhältnis von etwa 1 : 1.

Wie bei der Beugung ebener Wellen an einem solchen Gitter sind im Überlagerungsbereich das Zentralmaximum sowie die beidseitigen ersten Nebenmaxima unter einem Winkel von etwa  $0,0014^\circ$  zu sehen. Die zweiten und höheren Nebenmaxima der Gitterbeugung werden vor allem durch das überlagerte Minimum der Einzelspaltbeugung unterdrückt.

Die mikroskopisch kleinen Beugungswinkel sowie die kleinen erwarteten Zählraten ( $< 100/\text{s}$ ) erfordern einen extrem empfindlichen, ortsauffösenden Fulleren-detektor rund 1,25 m hinter dem Gitter. Dieser besteht aus einem Laser, der das  $C_{60}$ -Molekül schlagartig ionisiert, sodass es elektrisch auf eine Fotokatode beschleunigt werden kann. Die aus der Katode herausgeschlagenen Elektronen zeigen das Fulleren-Molekül an. Um das Beugungsbild abzutasten, wird die Fokussiereinheit mit Mikrometeregenauigkeit über den Molekularstrahl gefahren.

Das Ergebnis eines solchen Abtast-durchlaufs ist zunächst *ohne* und dann *mit* Beugungsgitter dargestellt.

Der Vergleich zeigt deutlich die Aufweitung des Strahls durch die Beugung sowie klare erste Nebenmaxima rechts und links vom zentralen Maximum an den erwarteten Positionen. Die durchgezogene Kurve zeigt die theoretischen Werte.



## Die Größe

Dabei ist erwähnenswert, dass die zu dem Interferenzbild passende Einzelspaltbreite erheblich kleiner ist (ca. 38 nm) als die vom Gitterhersteller angegebene ( $55 \pm 5$  nm). Dafür gibt es verschiedene Erklärungen. Zum einen besitzt  $C_{60}$  eine große Polarisierbarkeit und damit auch eine starke Van-der-Waals-Wechselwirkung mit dem Gitter. Diese führt zu Phasenverschiebungen der De-Broglie-Wellen bei der Passage

durch die SiN-Struktur, von denen man erwartet, dass sie den Spalt effektiv verkleinern. Zum anderen lässt sich die *Größe* des Moleküls nennen, die Einfluss nimmt auf die effektive Spaltbreite. Das Molekül könnte die tatsächliche Spaltbreite aufgrund seiner eigenen Ausdehnung reduzieren. Möglicherweise sind auch beide Erklärungen zutreffend.

## Perspektiven

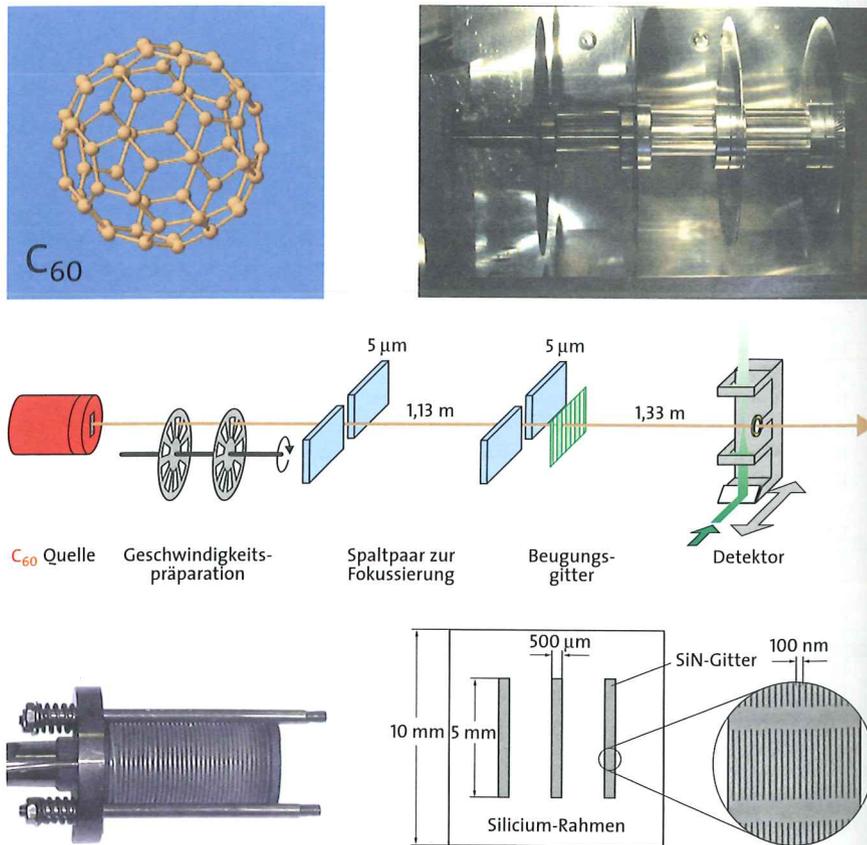
Die Versuche zeigen, dass selbst bei so komplexen Molekülen wie den Fullerenen die Messungen in voller Übereinstimmung mit der quantenmechanischen Erwartung Interferenzen zeigen. Selbst so große Moleküle wie die Fullerene  $C_{60}$  und  $C_{70}$  sind also durch eine *kohärente* De-Broglie-Welle zu beschreiben.

Abschätzungen weisen aber darauf hin, dass der Übergang von quantenmechanischem zu klassischem Verhalten schon bei den Fullerenen über eine kontrolliert einstellbare Wechselwirkung mit der Umgebung gesteuert werden kann. Diese Wechselwirkung führt, abhängig von ihrer Stärke, zu einer Verringerung des Kontrasts im Interferenzbild bis hin zur „Dekohärenz“, bei der keine Interferenz auftritt.

Diesen Übergang im Experiment quantitativ zu untersuchen, ist Gegenstand aktueller Forschungsarbeiten.

Bis zu welcher Größe der Objekte sich Interferenzen und damit Welleneigenschaften

zeigen lassen – über die Größe der Fullerene hinaus – ist eine noch völlig offene Frage. Abschätzungen zeigen aber, dass erst bei der Masse kleiner Viren oder bei Metallclustern eine Barriere auftreten kann. Die technischen Herausforderungen bei der Strahlerzeugung, Detektion und Trennung der Objekte von der Umgebung sind allerdings recht groß.

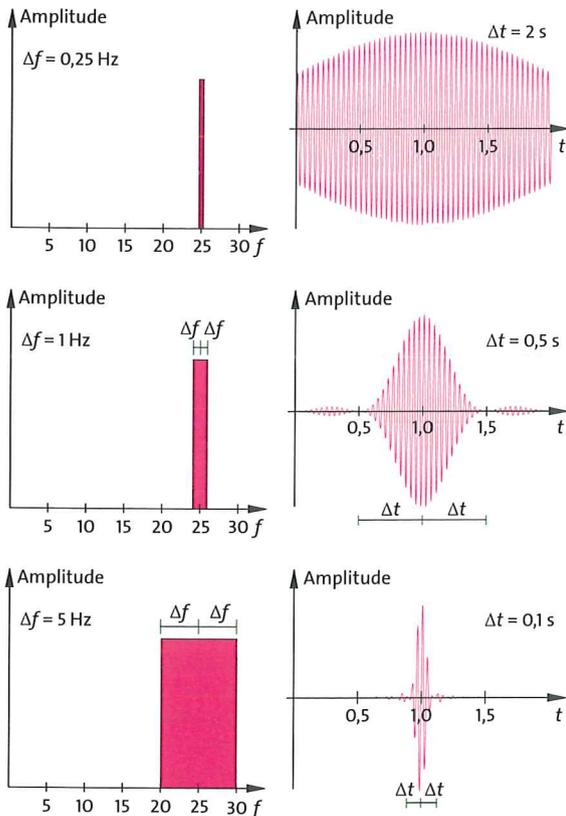


## 10.4 Quantenphysik und klassische Physik

Licht und Elektronen zeigen in der Ausbreitung und Wechselwirkung Eigenschaften, die sich nur schwer in das bislang recht brauchbare klassische physikalische System von Vorstellungen und Begriffen einfügen lassen. Deshalb ist fraglich, inwieweit Aussagen über Licht bzw. über Elektronen, die in der klassischen Physik entwickelt wurden, überhaupt noch gültig sind.

### 10.4.1 Das Unschärfeprinzip

Die Ausbreitung von Photonen und, wie im vorangegangenen Abschnitt 10.3 gezeigt, von Elektronen lässt sich als Ausbreitung von Wellen beschreiben. Das Quadrat der Wellenamplitude ist, wie für Photonen gezeigt ( $\rightarrow$  10.2.2), proportional zur Wahrscheinlichkeit, Photonen nachzuweisen. Für Elektronen lässt sich analog dazu eine Wellenfunktion mit entsprechenden Eigenschaften definieren.



**396.1** Ein Schwingungspaket wird durch Überlagerung von Frequenzen aus dem Intervall  $f + \Delta f$  und  $f - \Delta f$  erzeugt. Abhängig von der Breite  $\Delta f$  des Frequenzbandes ändert sich die Zeitspanne  $2\Delta t$  der Emission bzw. Absorption. Der mathematische Zusammenhang ist  $\Delta f \Delta t = \frac{1}{2}$  ( $\rightarrow$  3.2.3).

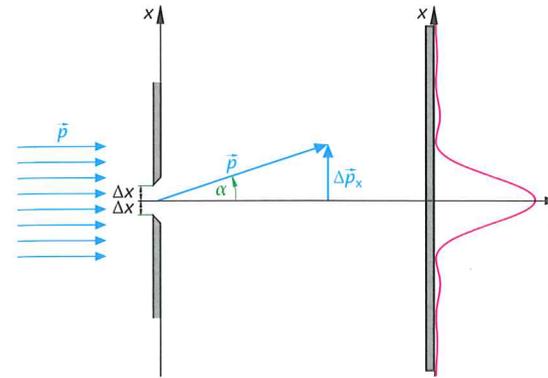
Zur Vereinfachung der Zusammenhänge wurde bislang angenommen, dass mit dem Ausbreitungsvorgang der Transport von Impuls  $p = h/\lambda$  und Energie  $E = hf$  erfolgt. Wenn in diesem Zusammenhang von der Wellenlänge  $\lambda$  und der Frequenz  $f$  gesprochen wird, bezieht sich die Aussage auf einen zeitlich und räumlich unendlich lang ausgedehnten Wellenzug. Dass diese Annahme die experimentellen Ergebnisse nur unzureichend beschreibt, zeigt die Messung der Kohärenzlänge ( $\rightarrow$  7.3.9), mit der für Licht die Länge eines Wellenzugs bzw. eines Wellenpakets bestimmt wird.

Ein kurzer Wellenzug kann nicht durch eine Sinus- bzw. Kosinusfunktion mit einer bestimmten Wellenlänge beschrieben werden, da diese sich durch eine von Ort und Zeit unabhängige konstante Amplitude auszeichnen. Erst die Überlagerung von unendlich vielen Sinus- und Kosinusfunktionen aus einem Frequenzintervall  $f \pm \Delta f$ , dessen Mitte den Wert  $f$  hat, ergibt eine Schwingung endlicher Dauer. Dieser Zusammenhang ist von der akustischen Unschärfe her bekannt ( $\rightarrow$  3.2.3). In der Ausbreitung entsteht ein Wellenpaket mit dem Wellenlängenintervall  $\lambda \pm \Delta\lambda$  aufgrund von  $\lambda = c/f$ . Dieses Wellenpaket liefert wegen  $E = hf$  Energiewerte aus dem Intervall  $E \pm \Delta E$ . Jeder Wellenlängen- bzw. Frequenzkomponente kommt entsprechend ihrem Amplitudenquadrat eine Wahrscheinlichkeit zu, sodass statt des Energiewertes  $E = hf$  Energiewerte im Bereich  $E \pm \Delta E = h(f \pm \Delta f)$  gemessen werden.

### Die Heisenberg'sche Unschärferelation

Zwischen der Breite des Bereichs der Impuls- und Energiewerte und der Länge des Wellenzuges lässt sich ein quantitativer Zusammenhang herstellen:

Ein Sender emittiert ein Wellenpaket in der Zeitspanne  $2\Delta t$ . Dieses Wellenpaket wird durch Sinus- und Kosinusfunktionen aus einem Frequenzintervall  $2\Delta f$  beschrieben, wobei entsprechend der akustischen Unschärfe  $\Delta f \Delta t = \frac{1}{2}$  gilt (Abb. 396.1). Mit dem Frequenzintervall  $\Delta f$  ist durch den Zusammenhang zur Energie  $E = hf$  ein Energieintervall, eine **Energieunschärfe**  $\Delta E = h \Delta f$  verbunden. Der Zusammenhang mit der Dauer der Emission ist  $\Delta E \Delta t = \frac{h}{2}$ . Für den Impuls ergibt sich mit der Geschwindigkeit  $v$  des Wellenpakets ein ähnlicher Zusammenhang. Das Wellenpaket legt den Weg  $\Delta x$  in der Zeit  $\Delta t = \Delta x/v$  zurück. Für die Frequenz  $f$  besteht mit den Formeln  $f\lambda = v$  und  $\lambda = h/p$  der Zusammenhang  $f = vp/h$  mit dem Impuls  $p$ . Durch Einsetzen von  $\Delta f = v \Delta p/h$  und  $\Delta t = \Delta x/v$  in die Formel für die akustische Unschärfe gilt für die **Impulsunschärfe**  $\Delta p$  die Gleichung  $\Delta x \Delta p = \frac{h}{2}$ .



**397.1** Treffen Elektronen auf einen schmalen Spalt, so tritt Beugung auf. Der Versuch, die  $x$ -Komponente des Ortes zu bestimmen, führt zu einer Unschärfe der  $x$ -Komponente des Impulses.

Für die in Abb. 396.1 gezeigten Schwingungspakete der Dauer  $2\Delta t$  bzw. der daraus hergestellten Wellenpakete der Länge  $2\Delta x$  gilt  $\Delta x \Delta p = \frac{h}{2}$ . Der Wert  $\frac{h}{2}$  hängt mit der Form des Wellenpakets zusammen. Für Einhüllende der Form  $f(x) = e^{-x^2}$  ergibt sich  $\Delta x \Delta p = \frac{h}{4\pi}$ , wie sich zeigen lässt, ein Minimalwert. Für eine beliebige Form gilt also  $\Delta x \Delta p \geq \frac{h}{4\pi}$ .

Die Erkenntnis, dass es grundsätzlich unmöglich ist, gleichzeitig die beiden Größen Ort und Impuls bzw. Energie und Zeit eines Teilchens bzw. eines Wellenpakets genau zu bestimmen, wurde von Werner HEISENBERG (1901–1976) im Jahre 1927 formuliert. Sie wird durch die **Unschärferelation** beschrieben:

#### Heisenberg'sche Unschärferelation

Bei einer Messung von Ort und Impuls ist das Produkt aus **Ortsunschärfe**  $\Delta x$  und **Impulsunschärfe**  $\Delta p$

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{h}{4\pi}$$

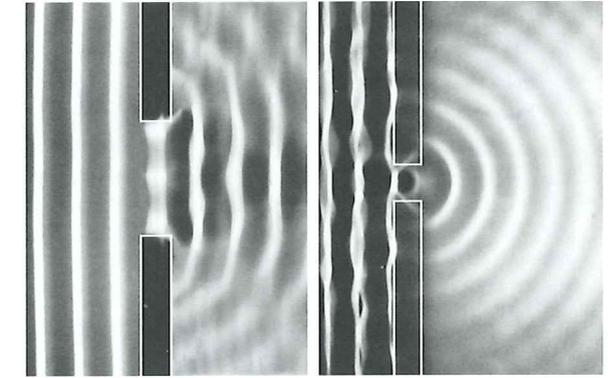
oder bei einer Messung von Energie und Zeit

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{h}{4\pi}$$

für **Energieunschärfe**  $\Delta E$  und **Zeitunschärfe**  $\Delta t$ .

Für jeden anderen Freiheitsgrad der vektoriellen Größen der Bewegung gilt eine entsprechende Ungleichung:  $\Delta y \Delta p_y \geq \frac{h}{4\pi}$  bzw.  $\Delta z \Delta p_z \geq \frac{h}{4\pi}$ .

Die Größen Ort und Impuls bzw. Energie und Zeit sind zueinander **komplementäre Größen**. Wenn die Ortsunschärfe abnimmt, wächst die Impulsunschärfe und umgekehrt. Die Unschärfe kommt also nicht durch messtechnische Unzulänglichkeiten zustande, sondern ist grundsätzlicher Natur.



**397.2** Sinkt der Durchmesser der Blendenöffnung auf die Größenordnung der Wellenlänge ab (rechts), dann fächert der Strahl durch Beugung auf, wie der Versuch in der Wellenwanne anschaulich zeigt.

### Messung der Unschärfe bei Elektronen

Abb. 397.1 zeigt das Verhalten von Elektronen bzw. von Wellenpaketen, die auf einen schmalen Spalt treffen. Die Elektronen haben eine Beschleunigungsstrecke durchlaufen und besitzen den Impuls  $p_y = p$ . Der Impuls in  $x$ - und in  $z$ -Richtung ist null.

Bekanntlich entsteht auf einem Schirm hinter dem Spalt eine Beugungsfigur, d.h. die nachgewiesenen Elektronen haben auch Impulse in  $x$ -Richtung. Durch diese Anordnung wird ein Versuch realisiert, der es ermöglicht, die  $x$ -Komponente des Ortes und des Impulses zu bestimmen. Je genauer man den Ort in  $x$ -Richtung durch die Verengung der Spaltbreite eingrenzt, umso größer wird die Impulsunschärfe  $\Delta p_x$  in  $x$ -Richtung (Abb. 397.2). Genau genommen lässt sich keine Grenze für den  $x$ -Impuls angeben, da die Verteilung mit abnehmender Amplitude beliebig ausgeweitet ist. Für die Ausweitung wird der Abstand zum ersten Minimum als Maß für  $\Delta p_x$  angesehen. Die so festgelegte Impulsunschärfe  $\Delta p_x$  lässt sich durch die Lage des Minimums erster Ordnung am Einfachspalt abschätzen ( $\rightarrow$  7.3.4). Es gilt  $\sin \alpha = \lambda/(2\Delta x)$ ; mit  $\lambda = h/p$  ergibt sich  $\sin \alpha = h/(p 2\Delta x)$ . Aus Abb. 397.1 ist  $\sin \alpha \approx \Delta p_x/p$  zu entnehmen, sodass aus beiden Gleichungen  $\Delta x \Delta p_x \approx h/2$  folgt, entsprechend der Unschärferelation.

### Aufgaben

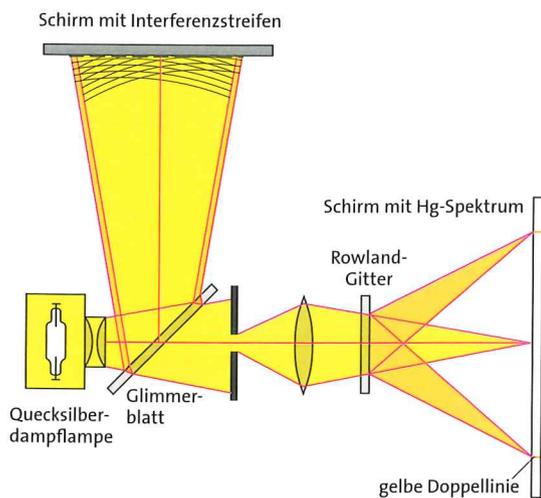
- Bei einem Farbmonitor werden Elektronen mit  $U = 25$  kV beschleunigt und treten durch eine Streifenmaske, deren Spaltöffnungen  $2\Delta x = 0,25$  mm betragen.
  - Vergleichen Sie die De-Broglie-Wellenlänge der Elektronen mit der Spaltbreite.
  - Bewerten Sie die Unschärfe auf dem Leuchtschirm in 1 cm Abstand hinter der Streifenmaske.

### 10.4.2 Messung der Unschärfe bei Photonen

Für Licht einer Quecksilberhochdrucklampe lässt sich die Unschärferelation eindrucksvoll bestätigen. Dabei werden einmal die Interferenzen nach Reflexion an einem Glimmerblatt beobachtet (→ 7.3.8), woraus sich eine Aussage über die Länge des Wellenzugs und damit über die Ortsunschärfe ergibt. Gleichzeitig wird das Licht mit einem Rowland-Gitter spektral zerlegt und die beiden gelben Linien des Quecksilbers beobachtet, woraus eine Aussage über die Impulsunschärfe zu gewinnen ist.

**Versuch 1:** Der Versuch ist wie in **Abb. 398.1** aufgebaut. Der hinter dem Glimmerblatt angeordnete Spalt wird mit dem nicht reflektierten Licht der Quecksilberdampfampe beleuchtet. Sofort nach dem Einschalten der Lampe erscheinen in dem langsam intensiver werdenden Licht auf dem einen oberen Schirm Interferenzringe und auf dem rechten Schirm die beiden eng benachbarten gelben Linien (**Abb. 399.1a**). Doch nach ca. vier Minuten beginnen die Interferenzen zu verschwimmen und die beiden gelben Linien werden unscharf. Nach einiger Zeit sind die Interferenzen völlig verschwunden und die gelben Linien verbreitern sich und sind nicht mehr voneinander zu trennen (**Abb. 399.1b**).

**Erklärung:** Die Interferenzen am Glimmerblatt entstehen durch die Überlagerung von Wellen, die an der vorderen und an der hinteren Grenzfläche der Schicht reflektiert werden (**Abb. 398.2**). Interferenzen kommen jedoch nur dann zustande, wenn der Wegunterschied der Wellen kleiner ist als die Kohärenzlänge des Wellenzugs (→ 7.3.8). Wenn die Interferenzen gerade verschwinden, kann die Länge des Wellenzugs durch die Wegdifferenz abgeschätzt werden.



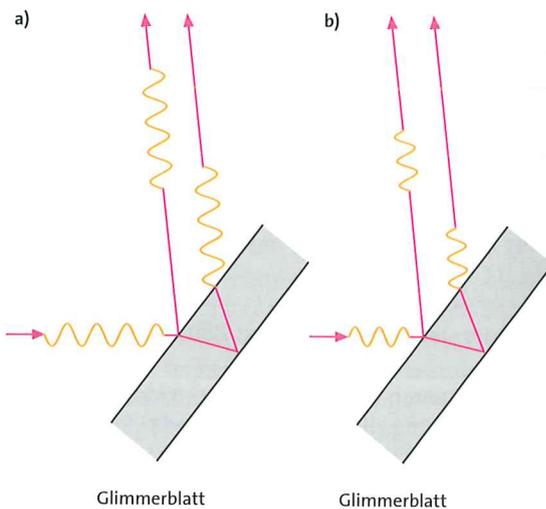
**398.1** Bestätigung der Unschärferelation mit Licht. Die Interferenzstreifen und das Spektrum werden gleichzeitig beobachtet. Ungefähr vier Minuten nach dem Einschalten der Quecksilberhochdrucklampe verschwimmen die Interferenzen, die Linien im Hg-Spektrum verbreitern sich.

Der geometrische Lichtweg (→ 7.3.12) durch das Glimmerblatt ist von dessen Dicke  $d = 0,07$  mm und dem Einfallswinkel des Lichts abhängig. Der mit  $2d = 0,14$  mm genäherte Weg führt, mit dem Brechungsindex  $n = 1,5$  multipliziert, zur optischen Weglänge von  $0,24$  mm. Dem entspricht die Länge des Wellenzugs  $2\Delta x$ ; also ist  $\Delta x \approx 1,2 \cdot 10^{-4}$  m.

Die Veränderung der Kohärenzlänge beruht auf einer Störung der Lichtemission. Durch den mit zunehmender Brenndauer der Lampe ansteigenden Druck stoßen die das Licht emittierenden Quecksilberatome häufiger zusammen. Unter der Annahme, dass durch einen Stoß die Emission des Wellenzugs unterbrochen wird, verringert sich mit der Zeit die Kohärenzlänge. Eine Verringerung der Länge des Wellenzugs bedeutet, dass seine Frequenzkomponenten einem breiteren Frequenzbereich angehören. Dem entspricht eine Vergrößerung des Wellenlängenintervalls  $\Delta\lambda$ . Dies ist an der Verbreiterung der Linien im Spektrum zu erkennen. Wenn die beiden zunächst getrennten gelben Linien mit  $577$  nm und  $579$  nm ineinander übergehen, besitzt jede der Linien eine Unschärfe von  $\Delta\lambda = 1$  nm zu beiden Seiten des jeweiligen Maximums im Spektrum.

Zur Bestätigung der Heisenberg'schen Unschärferelation ist die Impulsunschärfe zu bestimmen. Aus der De-Broglie-Gleichung  $p = h/\lambda$  ergeben sich für die Mitte  $\lambda_1 = 579$  nm und den Rand  $\lambda_2 = \lambda_1 - \Delta\lambda = 578$  nm der einen Linie die Impulse  $p_1 = h/\lambda_1 = 1,144 \cdot 10^{-27}$  kg m/s und  $p_2 = h/\lambda_2 = 1,146 \cdot 10^{-27}$  kg m/s, also ein  $\Delta p = 2 \cdot 10^{-30}$  kg m/s. Die Impulsdifferenz zum anderen Rand der Linie mit der Wellenlänge  $\lambda_3 = \lambda_1 + \Delta\lambda$  hat den gleichen Wert.

Die Photonen der einen Linie übertragen offensichtlich Impulse, deren Werte um einen Mittelwert  $p_1 = 1,144 \cdot 10^{-27}$  kg m/s mit  $\Delta p = 2 \cdot 10^{-30}$  kg m/s streuen.



**398.2** Interferenzen entstehen nur dann, wenn die Kohärenzlänge größer ist als die optische Wegdifferenz. In **a)** überlagern sich die beiden reflektierten Wellenzüge noch teilweise, sodass noch Interferenzen entstehen. In **b)** findet keine Überlagerung mehr statt, da die Wegdifferenz größer ist als die Länge der Wellenzüge.

Aus den Werten von  $\Delta x$  und  $\Delta p$  folgt

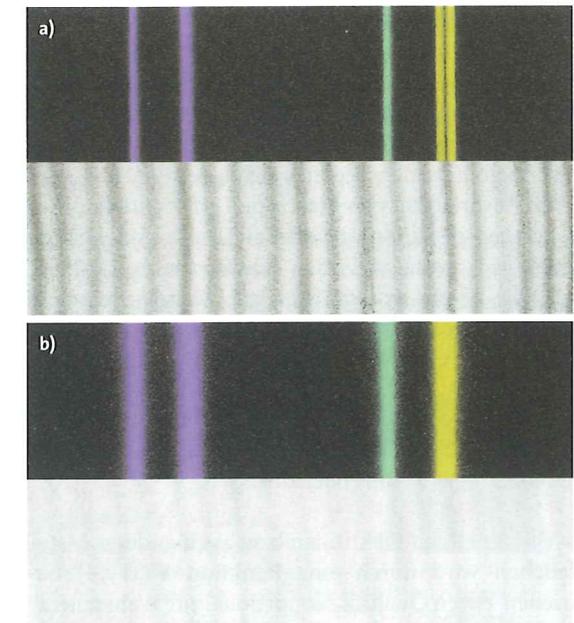
$$\Delta x \Delta p = 1,2 \cdot 10^{-4} \text{ m} \cdot 2 \cdot 10^{-30} \text{ kg} \frac{\text{m}}{\text{s}} = 2,4 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \approx \frac{h}{2}$$

Das Experiment bestätigt also die Unschärferelation. Das im Vergleich zu  $\frac{h}{2}$  kleinere Messergebnis weist darauf hin, dass die gemessenen Wellenzüge keine rechteckförmige Einhüllende besitzen wie in dieser einfachen Abschätzung unterstellt. Für beliebige Formen der Wellenzüge gilt  $\Delta x \Delta p \geq \frac{h}{4\pi}$  in Übereinstimmung mit den Messergebnissen. ◀

Die gleichzeitige Messung von Ort und Impuls ist durch die Heisenberg'sche Unschärferelation  $\Delta x \Delta p \geq \frac{h}{4\pi}$  eingeschränkt.

#### Aufgaben

- Das Licht von der Sonne besitzt eine Kohärenzlänge von  $2\Delta x = 600$  nm bei einer mittleren Wellenlänge von  $500$  nm. Bestimmen Sie die Frequenzunschärfe  $\Delta f$  und berechnen Sie daraus die Wellenlängen, die das Spektrum begrenzen.
- Die spektrale Breite der Linie eines He-Ne-Lasers beträgt  $2\Delta f = 100$  Hz. Berechnen Sie die Kohärenzlänge.
- Für eine Na-Dampf-Lampe wird eine Kohärenzlänge von  $0,3$  m gemessen. Bestimmen Sie die Dauer des Emissionsvorgangs und die Energieunschärfe.



**399.1 a)** Das Quecksilberspektrum (oben) mit den beiden getrennten gelben Linien und (unten) die Interferenzen durch die Reflexion am Glimmerblatt. **b)** Nach wenigen Minuten sind die Linien stark verbreitert, die Interferenzen sind verschwunden.

#### Exkurs

##### Der Welle-Teilchen-Dualismus

Die gleichartige Beschreibung der Ausbreitung von Elektronen und Photonen soll zum Anlass genommen werden, noch einmal über den Wellen- und Teilchencharakter von Elektronen und Photonen nachzudenken.

Nach der klassischen Theorie wird Licht als Welle aufgefasst. Es weist aber Teilcheneigenschaften auf, die mit dem Begriff *Photon* charakterisiert werden, wenn es mit Materie wechselwirkt. Dagegen zeigen z. B. Elektronen, die klassisch als Teilchen beschrieben werden, Welleneigenschaften wie Interferenz und Beugung.

Die Aussagen lassen sich verallgemeinern und zusammenfassen: Jeder Transport von Energie und Impuls zeigt Wellen- und Teilcheneigenschaften.

Die beiden Eigenschaften werden miteinander in der Feststellung zusammengefasst, dass z. B. ein Elektron *sowohl Teilchen als auch Welle* sei. Teilchen und Welle werden als zwei mögliche Seiten eines dualen Verhaltens, des Welle-Teilchen-Dualismus, dargestellt. Diese

Aussage erhellt die Zusammenhänge jedoch nicht, denn in der klassischen Physik schließen sich die Konzepte „Teilchen“ und „Welle“ gegenseitig streng aus:

Ein **klassisches Teilchen** ist ein kleiner massiver Körper. Er befindet sich zu einem bestimmten Zeitpunkt an einem Punkt im Raum, hat Impuls und Energie und bewegt sich auf einer Bahn, die sich durch die Bewegungsgleichungen theoretisch mit beliebiger Genauigkeit beschreiben lässt.

Eine **klassische Welle** bewegt sich ebenfalls im Raum, zeigt dabei aber im Gegensatz zum klassischen Teilchen Interferenz- und Beugungsphänomene. Es lässt sich auch kein Bahnverlauf angeben, da Energie und Impuls kontinuierlich im Raum verteilt sind. Mit endlichen Werten für Energie und Impuls pro Raumvolumen einer Welle werden Energie wie Impuls in einem Punkt null.

Elektronen oder Photonen sollten daher nicht als Teilchen oder als Welle,

sondern als **Mikroobjekt** oder **Quantenobjekt** bezeichnet werden. Eine fortgeführte Charakterisierung des Elektrons als Teilchen oder des Lichts als Welle sollte die geänderte Bedeutung dieser Beschreibung von Eigenschaften bewusst unterstützen. Dies wird erforderlich, wenn Welleneigenschaften oder Teilcheneigenschaften herausgestellt werden und an das klassische Verhalten erinnert oder darauf Bezug genommen werden soll.

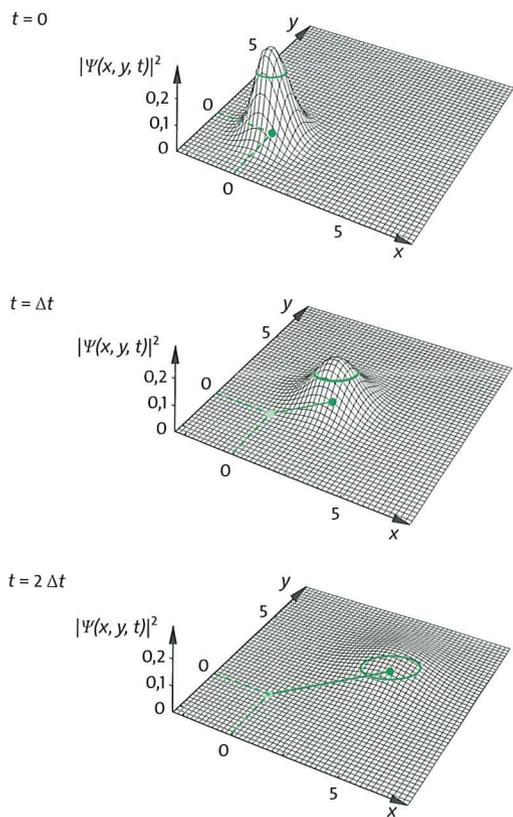
Bei den **Welleneigenschaften** betrifft es das Verhalten eines Quantenobjekts bei seiner Ausbreitung, wenn die Wellenlänge in der Größenordnung der beugenden Objekte liegt. Ebenso betrifft es die Beschreibung eines in einem Raumbereich von der Größenordnung der Wellenlänge eingeschlossenen Quantenobjekts durch stehende Wellen.

Überträgt ein Quantenobjekt in einem Prozess dagegen Impuls und Energie, so treten die **Teilcheneigenschaften** und mit ihnen die Begriffe Elektron und Photon in den Vordergrund.

### 10.4.3 Die Wellenfunktion

Die Aussagen der vorangegangenen Kapitel über Teilchen- und Wellenvorstellungen bei Licht und Elektronen gelten für alle Teilchen im Bereich der Mikrophysik. Deshalb liegt der Gedanke nahe, den Wellenaspekt bei der Ausbreitung von Elektronen oder anderen Materieteilchen in ähnlicher Form zu beschreiben, wie es mit dem elektromagnetischen Feld für die Ausbreitung von Licht bereits erfolgt ist. Das Quadrat der elektrischen Feldstärke  $\vec{E}^2(x, y, t)$  ist proportional zur Wahrscheinlichkeit, ein Photon an der Stelle  $P(x|y)$  zur Zeit  $t$  zu registrieren ( $\rightarrow$  10.2.3). Bei bekannter Verteilung des elektromagnetischen Feldes im Raum lässt sich damit die Wahrscheinlichkeit angeben, ein Photon in einem Teilvolumen des Raums nachzuweisen.

Das Verhalten von Elektronen bzw. auch anderer Materieteilchen wird durch eine Funktion  $\Psi(x, y, t)$  beschrieben, deren Quadrat proportional zur Wahrscheinlichkeit ist, ein Teilchen anzutreffen (Abb. 400.1). Die



400.1 Ein Wellenpaket beschreibt die Bewegung eines Quantenobjekts, welches bei  $P(0|0)$  startet und sich in Richtung  $P(5|5)$  bewegt, für drei aufeinanderfolgende Zeitpunkte. Der grüne Punkt markiert die jeweilige Position des klassischen Teilchens.

Funktion wird kurz  $\Psi$ -Funktion (Psi-Funktion) oder auch **Wellenfunktion** genannt, weil sie analog zur elektromagnetischen Welle die Welleneigenschaften bei der Ausbreitung von Quantenobjekten beschreibt. Auf die Idee einer Wellenfunktion war Erwin **SCHRÖDINGER** (1887–1961) im Jahre 1925 gestoßen, als er sich mit dem Problem befasste, eine Wellengleichung für bewegte Elektronen aufzustellen. Mit seiner Theorie gelingt es, die Funktion  $\Psi(x, y, t)$  für Quantensysteme zu berechnen. **Abb. 400.1** zeigt ein Beispiel für die berechnete Ausbreitung eines Quantenobjekts, welche mehr der eines Wellenpakets als der eines Teilchens entspricht. Das Quadrat der  $\Psi$ -Funktion, nach oben aufgetragen, ist proportional zur Wahrscheinlichkeit, das Quantenobjekt in einem Raumbereich  $\Delta V$  anzutreffen.

Den Physikern damals war zunächst nicht klar, wie die Werte der  $\Psi$ -Funktion physikalisch zu interpretieren seien. Unter den verschiedenen Deutungsmöglichkeiten hat sich die zuerst von Max **BORN** (1882–1970) gegebene statistische Interpretation durchgesetzt, entsprechend der die in den vorangegangenen Abschnitten dargestellten Überlegungen auch entwickelt wurden:

- Die  $\Psi$ -Funktion beschreibt die Ausbreitung von Teilchen oder genauer die Wahrscheinlichkeit, Teilchen in einem bestimmten Raumbereich nachzuweisen.
- Die  $\Psi$ -Funktion ist eine Wellenfunktion. Sie beschreibt im Raum Interferenzphänomene wie Interferenzmaxima und -minima. Die Amplituden an einem Ort sind aus Teilamplituden unter Berücksichtigung der Phasen zu bestimmen.
- Die  $\Psi$ -Funktion selbst hat keine unmittelbare physikalische Bedeutung. Erst das Quadrat der Funktion – wenn es sich um komplexe Funktionswerte handelt der Betrag  $|\Psi(\vec{r}, t)|^2$  – ist proportional zur Wahrscheinlichkeit, das Teilchen in einem Raumbereich  $\Delta V$  anzutreffen. Diese Wahrscheinlichkeit wird **Antreffwahrscheinlichkeit** genannt.

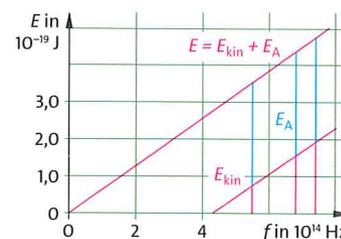
Das Produkt aus dem Amplitudenquadrat  $|\Psi(\vec{r}, t)|^2$  der Wellenfunktion und dem Volumen  $\Delta V$  gibt die **Antreffwahrscheinlichkeit**  $w(\vec{r}, t) = |\Psi(\vec{r}, t)|^2 \Delta V$  eines Teilchens in einem Raumbereich  $\Delta V$  in der Umgebung vom Ort  $\vec{r}$  abhängig von der Zeit  $t$  an.

Die formale mathematische Beschreibung der Quantenphänomene liefert keine Hinweise darauf, was man sich unter einem Elektron oder einem Photon in der Ausbreitung und der Wechselwirkung vorstellen soll. Bemerkenswert ist, dass trotz unterschiedlicher Interpretationsansätze Physiker darin übereinstimmen, wie in konkreten Fällen der mathematische Formalismus der Quantentheorie anzuwenden ist.

### Wechselwirkung von Photonen mit Materie Quantisierter Energieaustausch: Photonen

Der Energieaustausch von Licht mit Materie erfolgt in Quanten, den sogenannten **Photonen**. Bei der Absorption eines Photons werden die Energie  $E_{ph} = hf$  und der Impuls  $p = m_{ph}c$  übertragen. Die Masse des Photons ist  $m_{ph} = E_{ph}/c^2$ . Photonen von Licht der Frequenz  $f$  übertragen nur Energiebeträge der Größe  $E_{ph} = hf$ .  $h = 6,62607 \cdot 10^{-34}$  Js ist das Planck'sche Wirkungsquantum. Die Energieübertragung erfolgt also quantisiert.

Beim **lichtelektrischen Effekt** wird ein Anteil der Energie des Photons zum Austritt eines Elektrons aus dem Kathodenmaterial verwendet, den restlichen Anteil besitzt das Elektron als kinetische Energie:  $E_{ph} - E_A = E_{kin}$  bzw.  $hf - E_A = E_{kin}$ .



Die **Umkehrung des lichtelektrischen Effekts**: In einer Leuchtdiode erzeugen Elektronen mit der Energie  $E = eU$  Strahlung der Frequenz  $f$ . Dabei gilt

$$eU = hf \quad \text{bzw.} \quad eU = hc/\lambda.$$

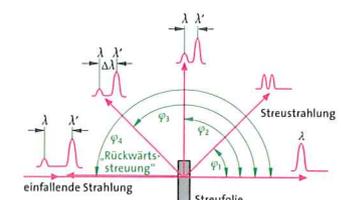
Das **Spektrum der Röntgenstrahlung** besitzt eine durch die Energie der Elektronen  $E = eU_A$  bestimmte maximale Frequenz  $f_{max}$ . Daraus folgt die **kurzwellige Grenze**  $\lambda_{min} = c/f_{max}$  der emittierten Strahlung. Dabei gilt

$$eU_A = E = hf_{max} \quad \text{bzw.} \quad eU_A = E = hc/\lambda_{min}.$$

Der **Compton-Effekt** ist die Streuung von Röntgenlicht an Elektronen; dabei wird ein Teil der Energie des Röntgenphotons an ein Elektron übertragen. Die Wellenlänge der gestreuten Strahlung vergrößert sich um

$$\Delta\lambda = \frac{h}{m_0c} (1 - \cos\varphi).$$

Für  $\varphi = 90^\circ$  ist die Wellenlängenänderung gleich der **Comptonwellenlänge**  $\lambda_C = 2,42631$  pm. Die Vergrößerung der Wellenlänge hängt nur vom Streuwinkel  $\varphi$  und nicht von der Frequenz bzw. der Wellenlänge des eingestrahlteten Röntgenlichts ab.

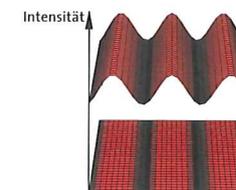


### Verteilung von Photonen und Elektronen

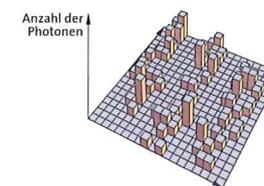
Die **Wellenvorstellung** beschreibt die Ausbreitung der Lichtenergie im Raum, die **Teilchenvorstellung** die Absorption oder Emission von Photonen, also die **Wechselwirkung** mit Materie.

Die Dichte der Photonen bzw. die Wahrscheinlichkeit  $w$ , ein Photon im Volumen  $\Delta V$  zu registrieren, ist proportional zur Intensität bzw. proportional zum Quadrat der Amplitude der elektrischen Feldstärke.

Für die Amplitude der Lichtwelle hinter einem Doppelspalt gilt  $\vec{E} \sim \cos(\Delta\varphi/2)$ , wobei  $\Delta\varphi$  die Phasendifferenz angibt. Damit ist  $w \sim E^2 \sim \cos^2(\Delta\varphi/2)$  die Wahrscheinlichkeit für die Registrierung eines Photons.



Für eine zunehmende Zahl von Photonen ergibt sich eine Verteilung der Energie, deren Verlauf sich der Wahrscheinlichkeit  $w$  immer mehr annähert.



### De-Broglie-Wellenlänge

Die Wellenlänge von Materieteilchen, die sogenannte De-Broglie-Wellenlänge, ergibt sich zu

$$\lambda = h/p.$$

Ein Elektron hat nach dem Durchlaufen der Spannung  $U$  die Energie  $\frac{1}{2}mv^2 = eU$ . Mit  $p = mv$  folgt für die De-Broglie-Wellenlänge  $\lambda = h/\sqrt{2meU}$ .

### Die Wellenfunktion

Die Wellenfunktion  $\Psi(\vec{r}, t)$  eines Teilchens gibt die Verteilung seiner Antreffwahrscheinlichkeit in Raum und Zeit an. Die Wahrscheinlichkeit  $w$ , ein Teilchen zum Zeitpunkt  $t$  in einem Raumbereich  $\Delta V$  in der Umgebung vom Ort  $\vec{r}$  anzutreffen, ist proportional zum Produkt aus dem Amplitudenquadrat der Wellenfunktion und dem Raumbereich  $w = |\Psi(\vec{r}, t)|^2 \Delta V$ .

### Heisenberg'sche Unschärferelation

Für die Genauigkeit der gleichzeitigen Messung komplementärer Größen gibt es eine prinzipielle Grenze, die eine Eigenschaft der Mikroobjekte ist. Die Produkte aus Ortsunschärfe  $\Delta x$  und Impulsunschärfe  $\Delta p$  bzw. Energieunschärfe  $\Delta E$  und Zeitunschärfe  $\Delta t$  sind

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{h}{4\pi} \quad \text{und} \quad \Delta E \Delta t \geq \frac{h}{4\pi}.$$

Exkurs

Interpretationsprobleme der Quantenphysik

Klassische Physik – Quantenphysik

Die klassische Physik ist die im makroskopischen Bereich geltende Physik der Newtonschen Mechanik und der Maxwell'schen Elektrodynamik, die Physik des strengen Determinismus, in der es möglich ist, aus der Kenntnis aller Größen, die den Zustand eines Systems beschreiben, mithilfe der bekannten Gesetzmäßigkeiten den zukünftigen Zustand im Prinzip exakt zu berechnen (→ S. 106).

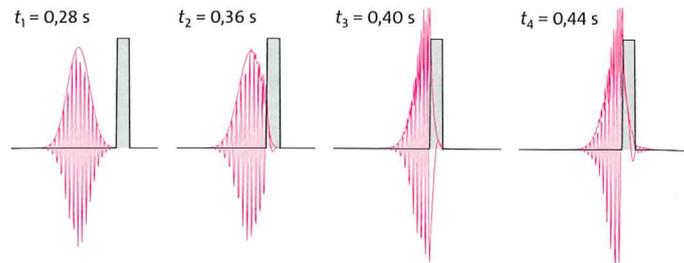
Praktische Schwierigkeiten bereiten lediglich die Messungenauigkeiten, die im Bereich der klassischen Physik mit entsprechendem Aufwand stets zu verringern sind.

Die Quantenphysik hat gezeigt, dass im mikroskopischen Bereich anderes gilt:

- Für die komplementären Messgrößen eines Zustands von Quantenobjekten gibt es eine grundsätzliche Grenze, die durch die Heisenberg'sche Unschärferelation beschrieben wird. Diese Grenze ergibt sich nicht aufgrund von Unzulänglichkeiten der angewendeten Messverfahren, sondern sie folgt aus den Eigenschaften der Quantenobjekte selbst.

- Jeder Messprozess im Bereich der Quantenphysik stellt einen Eingriff dar, der das weitere Verhalten des Messobjekts entscheidend beeinflusst, sodass einem Quantenobjekt stets nur die Eigenschaft zugeordnet werden kann, die gerade gemessen wurde. Es ist nicht davon auszugehen, dass die gemessene Eigenschaft bereits vor der Messung vorgelegen hat und dass andere, nicht gemessene Eigenschaften vorhanden sind.

- Eine strenge Determiniertheit wie in der klassischen Physik ist dementsprechend in der Quantenphysik nicht vorhanden. Jedoch gestattet die  $\Psi$ -Funktion eine Wahrscheinlichkeitsaussage über das Eintreten eines Ereignisses, z. B. über den Nachweis eines Quantenobjektes durch seine Ladung oder seine Masse, in einem Raumelement zu machen, sodass in diesem Sinne ein Determinismus vorhanden ist.



Kopenhagener Interpretation der Quantenphysik

Von Niels BOHR stammt die sogenannte Kopenhagener Interpretation, die in die philosophische Richtung des Positivismus (→ 16.2) einzuordnen ist. Sie befasst sich mit der Frage, die sich aus den Erkenntnissen über den quantenphysikalischen Messprozess ergibt, welche Eigenschaften einem Quantenobjekt selbst zuzuschreiben sind. Die wahrgenommenen bzw. gemessenen Eigenschaften hängen sowohl von dem Quantenobjekt selbst ab als auch von der verwendeten Messapparatur, z. B. dem Einfachspalt und der Registriereinrichtung.



Reale physikalische Eigenschaften besitzt ein Quantensystem nur im Zusammenhang mit einer Messapparatur, die diese Eigenschaft auch registriert. Es ist deshalb sinnlos, einem isolierten Quantensystem einen Zustand zuzuschreiben. Eine physikalische Größe kann nur dann als real angesehen werden, wenn sie gemessen wird oder gemessen worden ist.

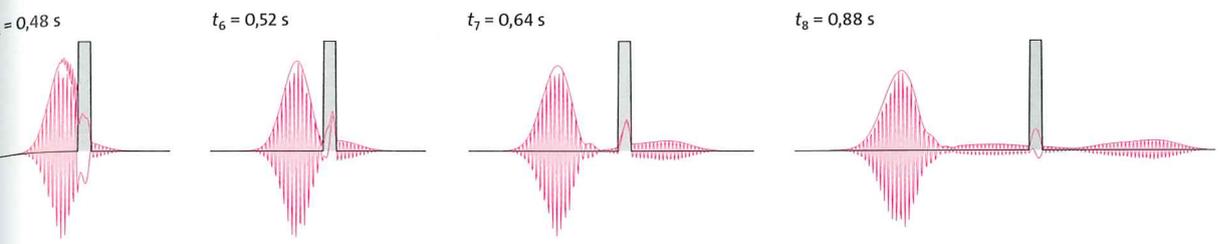
Kritik an der Kopenhagener Interpretation

Diese Kopenhagener Sichtweise oder Interpretation hat weitere Konsequenzen: Kann nur dann etwas als *real existierend* angesehen werden, wenn es

von einem Subjekt wahrgenommen wird? Dies würde bedeuten, dass die streng objektive Naturwissenschaft Physik die Existenz eines Subjekts bzw. eines Bewusstseins benötigen würde, um die Welt zu verstehen. Mit dieser Thematik haben sich zahlreiche Denker auseinandergesetzt und die unterschiedlichsten Lösungsvorschläge gefunden, die jedoch alle nicht recht befriedigen können. Die Existenz der Quantenobjekte bzw. des physikalischen Systems ist jedoch nicht infrage gestellt.

Die Kritik an der Kopenhagener Interpretation wurde häufig durch Gedankenexperimente verschärft, deren Aussagen allerdings ohne weitere physikalische Vorkenntnisse nur schwer zu interpretieren sind. Deshalb soll erst einmal ein vergleichsweise einfaches Experiment vorgestellt werden. Mit einem Wellenpaket wird die Ausbreitung eines Quantenobjekts, z. B. eines Elektrons, beschrieben. Die Bildleiste oben zeigt, wie sich der Wellenzug auf ein Hindernis bewegt. Bei dem Hindernis soll es sich im Fall der Lichtausbreitung um einen halbdurchlässigen Spiegel handeln, der einen Teil des Lichts durchlässt und den anderen Teil reflektiert. Für Elektronen lässt sich eine solche Anordnung durch den grau gezeichneten Verlauf der potentiellen Energie herstellen. Ein Teil der Welle, mit der die Ausbreitung des Elektrons beschrieben wird, wird in Bewegungsrichtung durchgelassen. Ein anderer Teil wird reflektiert und kehrt seine Bewegungsrichtung um. Die Abbildungen oben zeigen die Aufspaltung und das Auseinanderlaufen der Teilwellen. Das einlaufende Wellenpaket ist damit in zwei sich voneinander entfernende Teilwellen zerlegt, deren Amplitudenquadrat proportional zur Antreffwahrscheinlichkeit des Quantenobjekts ist. Angenom-

men, im nach links laufenden Wellenpaket wird ein Elektron nachgewiesen, dann hätte dieses Messergebnis zur Konsequenz, dass in allen anderen Bereichen die Amplitude der Welle unmittelbar auf null zusammenfallen müsste, um das Elektron nicht noch einmal an einem anderen Ort nachzuweisen. Dieser sogenannte „Kollaps der Wellenfunktion“, der an allen Orten gleichzeitig erfolgen und sich deshalb mit Überlichtgeschwindigkeit ausbreiten müsste, wird als ungläubwürdig angesehen und als Argument gegen die Kopenhagener Interpretation der Quantenphysik verwendet.



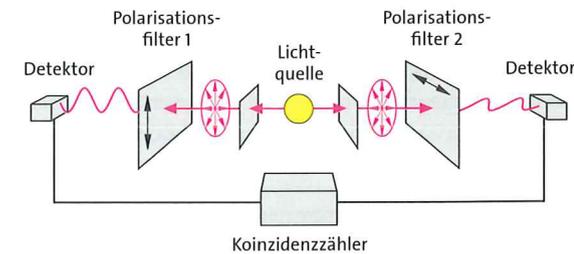
Das EPR-Paradoxon

Auch EINSTEIN konnte sich mit diesen Konsequenzen der Quantenphysik nicht abfinden und versuchte zu zeigen, dass man im Gegensatz zu der von BOHR gegebenen Interpretation recht wohl davon ausgehen kann, dass Quantenobjekte physikalische Eigenschaften besitzen, ohne diese vorher gemessen zu haben. Bereits im Jahre 1935 hatten sich EINSTEIN, PODOLSKY und ROSEN ein Experiment ausgedacht, das nach den Urhebern EPR-Paradoxon genannt wird. Dieser damalige Gedankenversuch ist in den letzten Jahren mit aufwändigen Apparaturen verwirklicht worden. Den Grundgedanken des EPR-Paradoxons soll ein vereinfachtes Modellexperiment zeigen, das auf Überlegungen mit polarisiertem Licht aufbaut.

Von angeregten Atomen wird elektromagnetische Strahlung ausgesandt, die sich zu den Detektoren links und rechts in der Skizze hin ausbreitet. Mit den Detektoren werden Photonen der Strahlung nachgewiesen. Zusätzlich wird gemessen, wie oft die beiden Detektoren gleichzeitig ansprechen. Das Besondere an die-

sem ausgesuchten System ist die Tatsache, dass diese Gleichzeitigkeit der Nachweise, auch Korrelation genannt, sehr häufig gegeben ist. Der Gedanke, nach gemeinsamen Eigenschaften des einen und des anderen Photons zu suchen und sie auf einen gemeinsamen Entstehungsprozess zurückzuführen, ist deshalb naheliegend.

Zu diesem Zweck sind im Experiment zwei Polarisationsfilter 1 und 2 vorhanden, mit denen eine Messung der Polarisationsrichtung erfolgt. Bei gleicher Einstellung der Polarisationsfilter sind häufig Korrelationen zu messen, bei zueinander senkrecht eingestellten Filtern nur selten. Die Eigenschaften des auf der einen Seite registrierten Photons hängen also davon ab, welche Messung an dem räumlich entfernten Photon auf der an-



deren Seite durchgeführt wurde. Dieser Zusammenhang erscheint paradox, wenn man wie die Autoren des EPR-Paradoxons annimmt, dass die Zustände von räumlich voneinander getrennten Dingen voneinander unabhängig sind, und weiter, dass die beiden Photonen bereits vor der Messung über die Eigenschaften verfügen, die durch die Messung aufgedeckt werden. Woher soll das eine Photon „wissen“, in welchem Experiment und mit welchem Ergebnis das andere Photon nachgewiesen wurde? Die Formulierung des EPR-Paradoxons legt nahe, intuitiv an zwei getrennte Sys-

teme zu denken, zwischen denen keine physikalische Wechselwirkung besteht, wie es klassische Teilchen auch zeigen. Sollte das eine im linken Detektor nachgewiesene Photon bereits in der Ausbreitung mit bestimmten physikalischen Eigenschaften ausgestattet sein, dann müssten diese Eigenschaften sich abhängig von der Messung des anderen Photons verändern. Ein solcher Zusammenhang erscheint nicht denkbar. Die aus dem physikalischen Hintergrundwissen zu erwartende Annahme, Systeme in voneinander unabhängige Teilsysteme trennen zu können, führt bei Quantenobjekten zu einem Widerspruch mit den Experimenten.

Nicht-lokale Theorien

Der Physiker J. S. BELL konnte 1969 sogar zeigen, dass jede „lokale“ Theorie, also eine Theorie der voneinander unabhängigen Teilsysteme, in Widersprüche zu den experimentellen Ergebnissen gerät. Eine Theorie, die davon ausgeht, dass das Messergebnis bei 1 vom Messergebnis bei 2 oder von der Stellung der Polarisationsfilter abhängt, ist somit widerlegt.

Die Quantenphysik stellt mit der Forderung nach einer globalen, raum-zeitlichen Systembeschreibung nicht die Realität infrage, aber sie zwingt dazu, unsere Alltagserfahrungen und die im Rahmen der klassischen Physik gebildeten Vorstellungen über die Realität wesentlich zu modifizieren. Der mathematische Formalismus der Quantenmechanik sagt die Messergebnisse wie die betrachteten Korrelationen korrekt voraus. Er gibt aber keinerlei Hilfe zu verstehen, wie diese Korrelationen zustande kommen und in welcher Weise sich Quantensysteme geeignet veranschaulichen lassen.