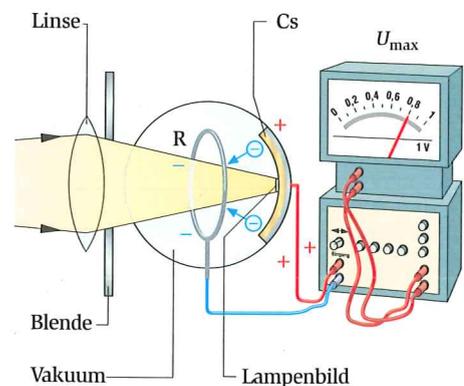


V1 UV-Licht einer Quecksilberdampf-Lampe entlädt die frisch geschmirgelte, negativ geladene Zinkplatte Zn, erkennbar am Elektroskop. Bringt man die Glasplatte in den Strahlengang, so absorbiert sie UV-Licht und verhindert die Entladung.



V2 a) Die Fotozelle ist innen mit dem Metall Caesium (Cs) beschichtet. Zwischen Cs und dem Ring R liegt ein Spannungsmesser (Messbereich 1 V; Widerstand $R > 10^{10} \Omega$). Seine Anzeige steigt, wenn Licht auf das Caesium fällt, obwohl eine Spannungsquelle fehlt. Denn das Licht befreit aus dem Metall Elektronen. Diese landen auf dem Ring R und laden ihn negativ auf, bei blauem Licht bis zur Spannung $U_{\max} = 0,8 \text{ V}$. Um dagegen anzulaufen, braucht ein Elektron die Energie $W_{\max} = e \cdot U_{\max} = 0,8 \text{ eV}$ ($1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$). Da U nicht über $0,8 \text{ V}$ steigt, gibt blaues Licht keinem Elektron mehr Energie. Langsamere Fotoelektronen erreichen den Ring nicht. Bei gelbem Licht steigt die Spannung nur bis zum Maximalwert $U_{\max} = 0,13 \text{ V}$.
b) Wir verkleinern die Blendenöffnung. Das von der Linse auf dem Metall erzeugte Lampenbild wird dunkler. Trotzdem sinkt die Spannung U_{\max} nicht, also auch nicht die Energie $W_{\max} = e \cdot U_{\max}$ der schnellsten Fotoelektronen. Diese hängt nicht von der Lichtintensität ab.

1. Quantenphysik revolutioniert das physikalische Denken

Im Jahre 1900 läutete der Physiker Max PLANCK (Nobelpreis 1918) eine neue Ära der Physik ein. Er fand Gesetze, die grundlegenden Prinzipien der damaligen, der sog. klassischen Physik widersprachen. 30 Jahre vorher hatte man ihm abgeraten, Physik zu studieren: Der Energiesatz sei entdeckt, die Physik an ihrem Ende angelangt, man könne höchstens noch das eine oder andere „Stäubchen“ abwischen.

2. Licht befreit Elektronen aus Metallen

Als ein „Stäubchen“ sahen viele den Versuch von W. HALLWACHS an (1888; \rightarrow V1). Dort setzt UV-Licht Elektronen aus einer Zinkplatte frei; diese wird entladen. Elektronen sind zwar im Metallinnern frei beweglich, können es aber nicht von selbst verlassen. Um sie abzulösen braucht man Energie. Diese bringt UV-Licht auf, nicht aber das sichtbare Licht von Glühlampen, selbst wenn sie aus kurzem Abstand mit großer Intensität einwirken. Bei diesem **Fotoeffekt**, d.h. beim Ablösen von Elektronen aus Metallen durch Licht, kommt es auf die *Art* des Lichts an, auf dessen *Frequenz* f , nicht aber auf die *Intensität*, die Helligkeit.

3. Fotoeffekt in der Fotozelle

Im Vakuum einer **Fotozelle** untersuchen wir den Fotoeffekt \rightarrow V2. Wir fragen nach der Energie W_{\max} , welche die schnellsten **Fotoelektronen** haben, die Licht aus Caesium-Metall (Cs) freisetzt. Bei diesem Alkalimetall genügt sichtbares Licht. Bei Blau finden wir die Maximalenergie $W_{\max} = 0,8 \text{ eV}$, bei Gelb nur $0,13 \text{ eV}$. \rightarrow T1 zeigt die bei der Lichtfrequenz f gemessene Energie W_{\max} . Danach sind die Geraden in \rightarrow B1 gezeichnet. Sie sind parallel zueinander und zeigen:

- Die Energie W_{\max} der schnellsten Fotoelektronen steigt linear mit der Frequenz f des Lichts, das sie aus dem Metall abgelöst hat.
- Die Steigung aller Geraden ist gleich, vom Metall unabhängig. Man bezeichnet diese für alle Metalle gleiche Steigung mit h . Damit lauten die Geradengleichungen $W_{\max} = hf - b$.
- Die negativen Achsenabschnitte $-b$ der Geraden hängen vom Metall ab, nicht vom Licht, nicht von dessen Frequenz f .

4. Licht gibt seine Energie portionsweise ab

- a) Wir deuten die Geradengleichung $W_{\max} = hf - b$. Da W_{\max} eine Energie ist, stellen auch die andern Terme hf und b Energien dar:
- Der Term hf zeigt etwas unerhört Neues. Er hängt nur vom Licht ab, nicht vom Metall. A. EINSTEIN deutete ihn 1905 als *Energieportion*, die Licht der Frequenz f an jeweils *ein* Elektron im Metall abgibt. Er nannte diese Energieportion $W_L = hf$ **Lichtquant**. Sie ist zur Frequenz f des Lichts proportional.
- Der Term $-b$ tritt als Vertikalpfeil und negativer Achsenabschnitt der Geraden in \rightarrow B1 auf. Er verkleinert die vom Lichtquant an das Elektron abgegebene Energie $W_L = hf$ um b auf $W_{\max} = hf - b$. Er gibt die **Ablöseenergie** W_A an, die dem Elektron beim Ablösen aus dem Metall entzogen wird. W_A hängt vom Metall ab, nicht vom Licht. Wir ersetzen b durch W_A und schreiben $W_{\max} = hf - W_A$.

Von der *Intensität* des Lichts hängt W_{\max} nicht ab \rightarrow V2b. Dies widerspricht der **klassischen Physik** (Mechanik, Optik, Elektrizitäts- und Wärmelehre). Nach ihr sollte mit der Lichtintensität die Feldstärke E der Welle steigen und damit die Kraft $F = eE$ auf ein Elektron. W_{\max} sollte bei hellem Licht größer sein.

b) Alle Geraden haben die gleiche Steigung h . Da diese in $W_L = hf$ auftritt, kennzeichnet sie das Neue. Als **Planck-Konstante** h wird sie uns durch die ganze Quantenphysik begleiten. Wir berechnen sie aus den Messwerten an Caesium Cs für die violette (v) und die gelbe (g) Spektrallinie \rightarrow T1. Die Steigungsdreiecke der Geraden in \rightarrow B1 liefern die Frequenzdifferenz $\Delta f = f(v) - f(g)$ und die zugehörige Energiedifferenz ΔW_{\max} :

$$\Delta W_{\max} = W_{\max}(v) - W_{\max}(g) = (1,02 - 0,13) \text{ eV} = 0,89 \text{ eV},$$

$$\Delta f = f(v) - f(g) = (7,41 - 5,19) \cdot 10^{14} \text{ Hz} = 2,22 \cdot 10^{14} \text{ Hz}.$$

Die Geradensteigung, d.h. die Planck-Konstante h , beträgt $h = \Delta W_{\max} / \Delta f = 6,4 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$ (genauer: $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$).

c) Die Ablöseenergie folgt aus $W_{\max} = hf - W_A$ zu $W_A = hf - W_{\max}$. Bei Cs liefert die violette Spektrallinie die Ablöseenergie $W_{A,Cs} = hf(v) - W_{\max}(v) = 1,93 \text{ eV}$.

d) Die Geraden in \rightarrow B1 schneiden die f -Achse bei der **Grenzfrequenz** f_{gr} . Licht mit $f < f_{gr}$ kann keine Fotoelektronen ablösen. Dort ist $W_{\max} = hf_{gr} - W_A = 0$. Aus $hf_{gr} - W_A = 0$ folgt $f_{gr} = W_A/h$. Nun ist bei Cs $W_A = 1,93 \text{ eV} = 3,1 \cdot 10^{-19} \text{ J}$. Also beträgt die Grenzfrequenz $f_{gr} = W_A/h = 3,1 \cdot 10^{-19} \text{ J} / (6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}) = 4,7 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$. Die Grenzfrequenz liegt bei Cs im Orange. Ablöseenergie W_A und Grenzfrequenz $f_{gr} = W_A/h$ anderer Stoffe zeigt \rightarrow T2.

Merksätze

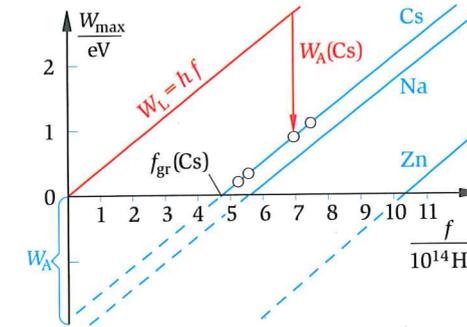
Licht der Frequenz f gibt an ein Elektron die Energie $W_L = hf$ ab, ein Lichtquant. Dessen Energie $W_L = hf$ ist proportional zur Lichtfrequenz f , hängt aber nicht von der Intensität des Lichts ab. Die Ablöseenergie W_A ist nötig, um ein Elektron vom Metall zu lösen. Die Maximalenergie eines Fotoelektrons beträgt $W_{\max} = hf - W_A$. Die Planck-Konstante ist $h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$. Sie das Markenzeichen der Quantenphysik und tritt in der klassischen Physik nicht auf.

Beispiel Wie rechnet man mit $W_{\max} = hf - W_A$?

UV-Licht mit $\lambda = 150 \text{ nm}$ und Frequenz $f = c/\lambda = 20 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$ fällt auf die Zinkplatte in \rightarrow V1. Dort nimmt ein Elektron das Lichtquant $hf = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot 20 \cdot 10^{14} \text{ 1/s} = 1,33 \cdot 10^{-18} \text{ J} = 8,3 \text{ eV}$ auf, da $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$. Beim Verlassen verliert das Elektron die Ablöseenergie $W_A = 4,3 \text{ eV}$. Also verlässt es das Metall mit der Energie $W_{\max} = hf - W_A = 4,0 \text{ eV}$. Die Geschwindigkeit v des Elektrons liefern die folgenden Zeilen:

$$\frac{1}{2} m_e v^2 = W_{\max} = 4,0 \text{ eV} = 6,4 \cdot 10^{-19} \text{ J}; v = 1,2 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

(Elektronenmasse $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$).



B1 Metalle werden mit Spektrallinien verschiedener Frequenzen f bestrahlt \rightarrow V2. Die Energie W_{\max} der schnellsten Fotoelektronen steigt *linear* mit f an.

Farbe	λ in nm	f in 10^{14} Hz	U_{\max} in V	W_{\max} in eV
gelb	578	5,19	0,13	0,13
grün	546	5,50	0,27	0,27
blau	436	6,88	0,81	0,81
violett	405	7,41	1,02	1,02

T1 Energie $W_{\max} = eU_{\max}$ der schnellsten Fotoelektronen bei Caesium. Sie hängt von Wellenlänge λ und Frequenz f des Lichts der Quecksilberdampf-Lampe ab.

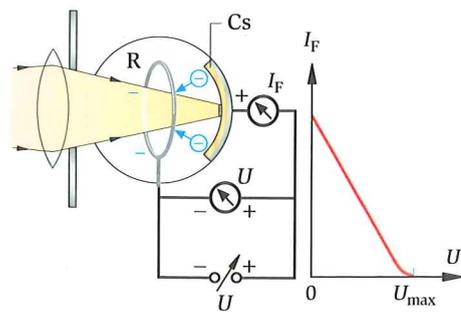
Stoff	f_{gr} in 10^{14} Hz	W_A in eV
AgCsO	2,5 (IR)	1,04
Caesium	4,7 (orange)	1,93
Natrium	5,5 (grün)	2,28
Zink	10,3 (UV)	4,27
Platin	13,0 (UV)	5,36

T2 Grenzfrequenz f_{gr} des Lichts und Ablöseenergie W_A verschiedener Stoffe. AgCsO spricht auf IR an und wird in Nachtsichtgeräten benutzt.

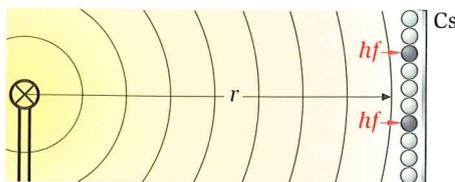
A1 a) Welche Energie und Geschwindigkeit haben die schnellsten Fotoelektronen aus mit UV bestrahltem Natrium ($\lambda = 100 \text{ nm}$)? Wie groß wäre ihre Energie bei der halben Wellenlänge? **b)** Wie groß ist die Grenzfrequenz f_{gr} ? Begründen Sie!

A2 Man möchte Elektronen mit $v = 10^6 \text{ m/s}$ haben. Wie bestrahlt man dazu Platin? Kommt es auf die Intensität des Lichts an?

A3 a) Bei Sonnenbrand wird die Haut von Lichtquanten beschädigt. Warum ist man hinter Glasfenstern geschützt, selbst wenn das Licht starker Glühlampen einwirkt? **b)** Warum ist die Gefahr für Sonnenbrand in großer Höhe besonders groß?



V1 Wir legen veränderliche Spannungen U zwischen den Ring R und das mit Licht der Frequenz f bestrahlte Cs-Metall einer Fotozelle. Da R am Minuspol liegt, wirkt U als „Gegenspannung“ dem Fluss der Fotoelektronen von Cs nach R entgegen. Deren Stromstärke I_F sinkt nach dem I_F - U -Diagramm, wenn U steigt. Bei $U > U_{\max}$ ist der Photostrom $I_F = 0$; auch die schnellsten Photoelektronen erreichen den Ring nicht. Dagegen erreichen ihn bei $U < U_{\max}$ auch langsamere Fotoelektronen.



B1 Nach Deutung a) müsste sich die vom Lämpchen ausgehende Lichtenergie auf Wellenfronten gleichmäßig über die Cs-Atome der rechts liegenden Fotoschicht verteilen. Man müsste ca. 10 h warten, bis eines dieser Atome die Energie für ein Fotoelektron aus der Lichtwelle aufgesammelt hätte. Die Fotoelektronen erscheinen aber sofort, wenn Licht einfällt. Das spricht für die Quantendeutung b). Sie wurde 1905 von EINSTEIN in einer berühmten Arbeit mit einfachen Worten dargestellt:

„In die oberflächliche Schicht des Körpers dringen Energiequanten ein. Deren Energie verwandelt sich wenigstens zum Teil in kinetische Energie von Elektronen. Die einfachste Vorstellung ist, dass ein Lichtquant seine Energie an ein einziges Elektron abgibt. Wenn es die Oberfläche erreicht hat, wird es einen Teil seiner kinetischen Energie eingebüßt haben. Außerdem wird anzunehmen sein, dass jedes Elektron beim Verlassen des Körpers eine Arbeit W_A zu leisten hat, wenn es den Körper verlässt. Seine kinetische Energie ist $hf - W_A$.“

1. Haben alle Lichtquanten die Energie $W = hf$?

Die Gleichung $W_{\max} = hf - W_A$ gibt die Energie der schnellsten Fotoelektronen an. Verlassen auch langsamere das Metall? Um dies zu prüfen, legen wir an die Fotozelle in \rightarrow V1 Spannungen U , die kleiner als U_{\max} sind. Gegen diese laufen alle Elektronen mit einer Energie W an, die größer als $e \cdot U$ ist, und liefern den **Fotostrom** I_F (s. U - I_F -Diagramm). Aus Metallen werden also auch Elektronen freigesetzt, deren Energie unter $W_{\max} = hf - W_A$ liegt.

Sind also in Licht der Frequenz f auch Quanten wirksam, deren Energie kleiner ist als hf ? Zur Klärung bestrahlte man freie K-Atome mit Licht der Frequenz f . Dort löste es Fotoelektronen stets gleicher Energie aus. Sie traten von den Atomen unmittelbar ins Freie, bei stets gleicher Ablöseenergie W_A . (Bei kompakten Metallen kommen die Elektronen dagegen aus unterschiedlichen Tiefen). Also gibt Licht der Frequenz f an alle Elektronen die gleiche Energie $W_L = hf$ ab. Dies wirft eine grundlegende Frage auf, die lange Zeit diskutiert wurde und der auch wir uns stellen müssen:

2. Ist die Lichtenergie selbst in Quanten $h \cdot f$ aufgeteilt?

Die bisherigen Experimente erlauben zwei kontroverse Deutungen:
a) Vielleicht ist die Energie in der Lichtwelle *kontinuierlich* verteilt, nicht quantisiert. Erst beim Fotoeffekt, am Elektron, würde sie dann in Portionen mit der gleichen Energie $h \cdot f$ zerstückelt.
b) Licht hält schon *unterwegs* seine Energie in Energiequanten der Größe $h \cdot f$ bereit. Diese strömen von der Quelle durch den Raum. Danach *besitzt* violetteres Licht Quanten mit mehr Energie als rotes Licht, da bei Violett die Frequenz f größer ist.

Nach Deutung a) müsste sich die Lichtenergie von ihrer Quelle kontinuierlich auf Kugelwellen ins Unendliche ausdehnen, sich immer stärker „verdünnen“, wie Max PLANCK sagte. Zur Klärung regte er eine Rechnung an \rightarrow Vertiefung. Danach dürften die Fotoelektronen nach Belichtung erst mit stundenlanger Verzögerung austreten, sie erscheinen aber sofort. Also ist die Energie bereits im Licht in Quanten der Größe $W = hf$ verfügbar. Dies bestätigt die Deutung b). Man nennt diese Quanten **Photonen**. Diese **Quantisierung der Lichtenergie** widerspricht der Physik vor 1900, wurde aber von EINSTEIN 1905 für alle elektromagnetischen Wellen postuliert \rightarrow B2.

Vertiefung

Das 2-W-Lämpchen in \rightarrow B1 (4 V; 0,5 A) gibt 5 % seiner Leistung als Licht ab, in 1 s also $W = 0,05 \cdot 2 \text{ W} \cdot 1 \text{ s} = 0,1 \text{ J}$. Diese Energie fällt aus $r = 1 \text{ m}$ Abstand auf Cs-Atome. Nach Deutung a) sollte es sich über eine kugelförmige Wellenfront der Fläche $O = 4\pi r^2 \approx 10^5 \text{ cm}^2$ verteilen. Dann erhielte ein Atom mit Fläche $A = 10^{-17} \text{ cm}^2$ in 1 s von der Lichtenergie $W = 0,1 \text{ J}$ nur $W_{\text{Cs}} = W \cdot A/O = 0,1 \text{ J} \cdot 10^{-17} \text{ cm}^2 / 10^5 \text{ cm}^2 = 10^{-23} \text{ J}$. Um ein Elektron abzulösen braucht das Cs-Atom die Energie $W_A \approx 2 \text{ eV} \approx 3 \cdot 10^{-19} \text{ J}$, also das $3 \cdot 10^4$ -fache von 10^{-23} J . Man müsste ca. $3 \cdot 10^4 \text{ s} = 10 \text{ h}$ auf das erste Fotoelektron warten. Doch findet man es sofort.

EINSTEIN hatte den Mut, Lichtenergie in Quanten aufzulösen. Doch verwarf er die Wellenvorstellung nicht; vielmehr sagte er: „*Welle und Quant sind nicht miteinander unvereinbar*“. Die folgenden Jahrzehnte bestätigten dies.

Merksatz

Die Energie elektromagnetischer Strahlung ist quantisiert, verfügbar nur in Quanten mit der Energie $W = hf$, den Photonen. Deren Energie hängt nur von der Frequenz f , nicht von der Intensität ab: *Helles Licht hat mehr Quanten, nicht Quanten größerer Energie.*

3. Kann man Photonen spalten, ihre Zahl bestimmen?

a) Licht spaltet sich an Glasoberflächen in einen reflektierten und einen durchgehenden Teil \rightarrow B3. Würde dabei das einzelne Quant hf geteilt, so müsste die Frequenz f kleiner werden. Violetteres Licht würde sich an Fensterscheiben in rotes Licht verwandeln, sowohl im reflektierten wie im durchtretenden Teil.

Tatsächlich teilt sich die *Zahl* der Photonen auf. Treffen z. B. 100 Photonen auf eine Glasfläche, so werden 4 Photonen reflektiert, 96 laufen weiter. Die Intensität des reflektierten Lichts ist auf 4 % gesunken. Das einzelne Photon wird dabei nicht verändert.

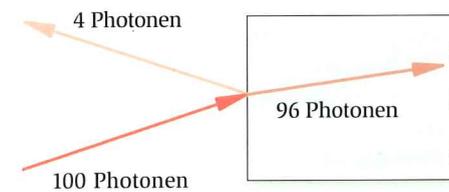
b) Der in \rightarrow V2 gemessene Fotostrom I_{Ph} gibt die Zahl z der freigesetzten Fotoelektronen an. Die Zahl n der einfallenden Photonen ist aber viel größer, da nur ein kleiner Bruchteil Elektronen freisetzt. Man nennt ihn **Quantenausbeute** η . Dabei ist $\eta = \text{Zahl der Fotoelektronen} / \text{Zahl der auftreffenden Photonen}$. In Cäsium ist $\eta \approx 10^{-3}$ (0,1 %), in MgO etwa 30 %. Es gilt $\eta = z/n$.

Ist in \rightarrow V2 der Fotostrom $I_{\text{Ph}} = 10 \text{ mA}$, so fließt in 1 s die Ladung 0,01 C. Da 1 Elektron die Ladung $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ trägt, fließen in 1 s $z = 0,01 \text{ C} / 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} = 6,2 \cdot 10^{16}$ Fotoelektronen. Da in Cäsium die Quantenausbeute $\eta \approx 10^{-3}$ beträgt, fallen in 1 s $n = z/\eta \approx 6,2 \cdot 10^{16} / 10^{-3} = 6,2 \cdot 10^{19}$ Photonen ein.

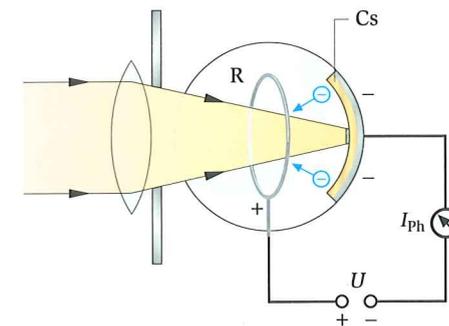
Diese Zahl wächst mit der Helligkeit. Man benutzt dies in *Belichtungsmessern*. Sie arbeiten gemäß \rightarrow V2. Ihr Ausschlag, der gemessene Fotostrom I_{Ph} , wächst mit der Zahl der je Sekunde eintreffenden Photonen, also mit der einfallenden Lichtenergie. Doch hängen η und damit die Empfindlichkeit der Messung von der Lichtfrequenz f ab.



B2 Max PLANCK (links) überreicht 1929 Albert EINSTEIN die Max-Planck-Medaille.



B3 Von 100 Photonen, die auf die Glasfläche fallen, werden 4 reflektiert.



V2 Licht fällt auf Cs-Metall. Damit *alle* Fotoelektronen zum Ring R gezogen werden, legt man ihn an den *Pluspol* der Quelle mit Spannung $U > 30 \text{ V}$, das Cs an *Minus*. Der Fotostrom I_{Ph} ist zur *Zahl* der auftreffenden Photonen proportional, gibt also ein Maß für die Beleuchtungsstärke.

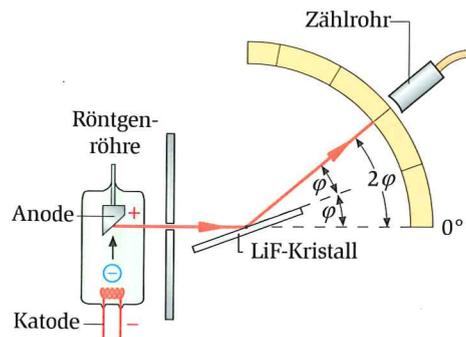
A1 Diskutieren Sie Experimente und Gedanken, **a)** die zur Gleichung $W_{\max} = hf - W_A$ führen, **b)** zum Begriff Grenzfrequenz. Deuten Sie damit das HALLWACHS-Experiment. **c)** Warum ist h eine allgemeine Naturkonstante, im Gegensatz zu W_A ? **d)** Was führt dazu, hf als Quant der Lichtenergie zu bezeichnen? Wo rechnet und denkt man dabei klassisch, wo betrachtet man Quanten?

A2 Zeichnen und vergleichen Sie die drei angeführten Schaltungen von Fotozellen **a)** zur Messung von $W_{\max} = hf - W_A$, **b)** zum Nachweis langsamerer Elektronen, **c)** zur Messung der Lichtintensität. Kann man für alle drei Messungen die gleiche Zelle benutzen?

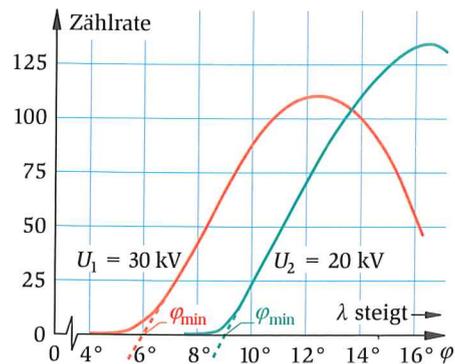
A3 Man erhöht in \rightarrow V1 die Helligkeit, verändert aber nicht die Farbe des Lichts. Wie wirkt sich das auf das U - I_F -Diagramm aus?

A4 **a)** In \rightarrow B1 falle Licht der Leistung $P_L = 0,1 \text{ mW}$ auf Cs. Welche Energie trifft in 1 s auf das Metall? Wie viele Photonen sind das bei $\lambda = 800 \text{ nm}$ (400 nm)? **b)** Wie viele Elektronen werden bei der Quantenausbeute 0,1 % in 1 s frei?

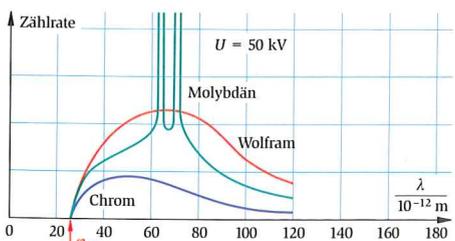
A5 Augen nehmen bei $\lambda = 600 \text{ nm}$ Bestrahlungsstärken ab 10^{-10} W/m^2 wahr. Wie viele Photonen durchsetzen je Sekunde die Pupillenöffnung ($d = 6 \text{ mm}$)?



V1 In der Röntgenröhre werden Elektronen mit der Spannung $U = 30 \text{ kV}$ von der Glühkatode zur Anode beschleunigt und dort abgebremst. Dabei entstehen Röntgenstrahlen. Sie erzeugen am Lithium-Fluorid-Kristall LiF mit Gitterkonstante $d = 201 \cdot 10^{-12} \text{ m}$ ein Röntgenspektrum. Bei Glanzwinkeln $\varphi \geq 6^\circ$ registriert das um den Winkel 2φ gedrehte Zählrohr BRAGG-Reflexion.



B1 Intensität der Röntgenstrahlung als Funktion des Winkels φ bei den Spannungen $U_1 = 30 \text{ keV}$ und $U_2 = 20 \text{ keV}$. Die Grenzwinkel $\varphi_{\min} = 6^\circ$ und 9° liegen in Verlängerung der ansteigenden Kurventeile, beim Maximum $hf_{\max} = eU$ der Quantenenergie.



B2 Spektren der Röntgenstrahlung an verschiedenen Anodenmaterialien bei der Beschleunigungsspannung $U = 50 \text{ kV}$

1. Photonen (Quanten) der Röntgenstrahlung

Ist auch die Energie der Röntgenstrahlen quantisiert? Röntgenquanten sollten wegen der höheren Frequenz f (ab 10^{18} Hz) mehr Energie $W = h \cdot f$ haben als Lichtquanten. Um dies zu prüfen, beschleunigen wir Elektronen in einer Röntgenröhre mit der Spannung $U = 30 \text{ kV} \rightarrow \text{V1}$. Jedes Elektron erhält die Energie $W = e \cdot U = 30 \text{ keV}$, die es an der Anode abgibt. Wenn sich dort diese Energie vollständig in ein Röntgenquant umsetzt, wird der Photoeffekt umgekehrt. Gelten dessen Gesetze auch hier, dann gilt für die energiereichsten Quanten $W_{\max} = hf = eU$. Danach sollten Röntgenstrahlen entstehen mit der maximalen Frequenz $f_{\max} = e \cdot U/h = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 30000 \text{ J} \cdot \text{C}^{-1} / 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js} = 7,2 \cdot 10^{18} \text{ Hz}$, mit $\lambda_{\min} = c/f_{\max} = ch/(eU) = 42 \text{ pm}$ ($1 \text{ pm} = 10^{-12} \text{ m}$).

Das Experiment liefert ein **kontinuierliches Röntgenspektrum**. Seine Intensität ist in $\rightarrow \text{B1}$ über dem BRAGG-Winkel φ aufgetragen. Es beginnt mit dem Grenzwinkel $\varphi_{\min} = 6^\circ$. Mit der BRAGG-Gleichung $k\lambda_{\min} = 2d \cdot \sin\varphi_{\min}$ folgt die Grenzwellenlänge λ_{\min} . Sie liefert bei der Gitterkonstanten $d = 201 \cdot 10^{-12} \text{ m}$ des benutzten LiF-Kristalls in der 1. Ordnung ($k = 1$) die Grenzwellenlänge $\lambda_{\min} = 2d \cdot \sin\varphi_{\min} = 2 \cdot 201 \cdot 10^{-12} \text{ m} \cdot 0,105 = 42 \cdot 10^{-12} \text{ m} = 42 \text{ pm}$.

Die zugehörigen Röntgenquanten stammen von Elektronen, die in einem einzigen Prozess ihre ganze Energie $e \cdot U = 30 \text{ keV}$ vollständig in ein Quant hf_{\max} der Röntgenstrahlung umsetzen konnten. Quanten größerer Energie können nicht auftreten. Die größte Frequenz f_{\max} der Röntgen-Quanten beträgt nach $hf_{\max} = eU$

$$f_{\max} = e \cdot U/h = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 30 \cdot 10^3 \text{ J} \cdot \text{C}^{-1} / 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js} = 7,3 \cdot 10^{18} \text{ Hz}$$

$f_{\max} = eU/h$ ist zur Beschleunigungsspannung U proportional. Dies bestätigen die Messwerte in $\rightarrow \text{T1}$ (bei A1). Bei den großen Spannungen $U (> 10^4 \text{ V})$ verzichtet man auf Korrekturen, die beim Photoeffekt mit Licht als Ablöseenergie $W_A \approx 2 \text{ eV}$ nötig sind.

In $\rightarrow \text{B1}$ schließt sich an λ_{\min} nach rechts ein kontinuierliches Röntgenspektrum an. Seine Quanten haben kleinere Energie, größere Wellenlänge $\lambda > \lambda_{\min}$. Sie stammen von Elektronen, die ihre Energie in mehreren Stufen abgegeben haben. Wie $\rightarrow \text{B2}$ zeigt, steigt bei gleicher Spannung U die Zahl der Röntgenquanten und damit die Intensität der Röntgenstrahlen mit der Masse der Anodenatome (in der Folge Chrom \rightarrow Molybdän \rightarrow Wolfram).

Gemäß $f_{\max} = eU/h$ haben all diese Röntgenspektren die gleiche, vom Anoden-Material unabhängige Grenze bei $\lambda_{\min} = c/f_{\max}$. Aus $f_{\max} = eU/h$ kann man die Planckkonstante h berechnen $\rightarrow \text{A1}$. Die beiden bei Molybdän aufgesetzten scharfen Spektrallinien rühren von Vorgängen im Atom.

Merksatz

Liegt an einer Röntgenröhre die Spannung U , so entsteht ein kontinuierliches Röntgenspektrum mit Grenzwellenlänge λ_{\min} , Frequenz $f_{\max} = c/\lambda_{\min}$ und der maximalen Quantenenergie $W_{\max} = h \cdot f_{\max}$. Diese ist proportional zur Spannung U gemäß

$$W_{\max} = h \cdot f_{\max} = e \cdot U. \quad (1) \quad \square$$

2. Umkehrung des Photoeffekts in Leuchtdioden

Leuchtdioden (LED) sind Halbleiterbauelemente. Sie beginnen bei Schwellenspannungen U_S von 1 V bis 3 V zu leuchten (je nach Diodenmaterial). Dann fließen Elektronen. Da wir die Vorgänge nicht genau kennen, benutzen wir die **Energiebilanz** des Photoeffekts. Dieser hat sich hier umgekehrt, wie bei Röntgenstrahlen (Ziff. 1):

Ein Elektron nimmt bei U_S die Energie $W = eU_S$ auf und gibt Licht der Frequenz f ab. Erzeugt es damit ein Photon mit Energie $W_S = hf$, dann gilt $hf = eU_S$. Danach sollte die Frequenz f des ausgesandten Lichts zu U_S proportional sein. Dies bestätigt die Gerade $\rightarrow \text{B3}$ an unterschiedlichen Dioden, und zwar von Infrarot ($3 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$) bis Blau ($7 \cdot 10^{14} \text{ Hz}$). Deren Steigung $\Delta W/\Delta f = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$ ist die Planckkonstante $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$. Dies bestätigt unsere Überlegung.

Kombiniert man LED's verschiedener Farben, so entsteht Weiß mit besserem Wirkungsgrad als in Glühlampen. Diese werden zunehmend durch Leuchtdioden ersetzt, um Energie zu sparen.

3. Quantenphysik hilft der Medizin

Um Knochen zu durchleuchten, braucht man kurzwellige (man sagt „harte“) Röntgenstrahlen. Dazu erhöht man die Beschleunigungsspannung U an der Röntgenröhre. Feinheiten in Weichteilen erkennt man dagegen besser mit langwelliger (weicher) Strahlung, erzeugt bei kleineren Spannungen $\rightarrow \text{B4}$. Statt U zu ändern und damit die „Härte“ der Strahlung, kann man diese auch *intensiver* machen. Dann wird das Schirmbild heller. Dazu heizt man die Katode stärker und erhöht so den Anodenstrom; je Sekunde prasseln mehr Elektronen auf die Anode und erzeugen mehr Röntgenquanten.

Wird ein energiereiches Röntgenquant vor dem Röntgenschirm oder dem Röntgenfilm in einer geeigneten Folie absorbiert, so setzt sich dort seine große Energie in viele Quanten kleiner, ungefährlicher Energie um. Sie liegen teilweise im sichtbaren Bereich: Auf dem Schirm entstehen mehr Lichtpunkte; das Schirmbild wird heller, die Belichtungszeit kürzer, was die Strahlengefahr reduziert.

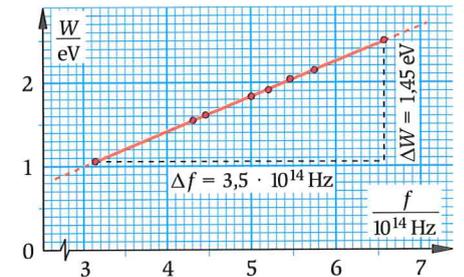
U in kV	W_{El} in 10^{-15} J	φ_{\min}	λ_{\min} in pm	f_{\max} in 10^{18} Hz
15	2,4	12°	84	3,6
20	3,2	9°	63	4,8
25	4,0	7°	49	6,1
30	4,8	6°	42	7,2

T1 Messwerte für U und φ_{\min} bei Röntgenstrahlen $\rightarrow \text{A1}$

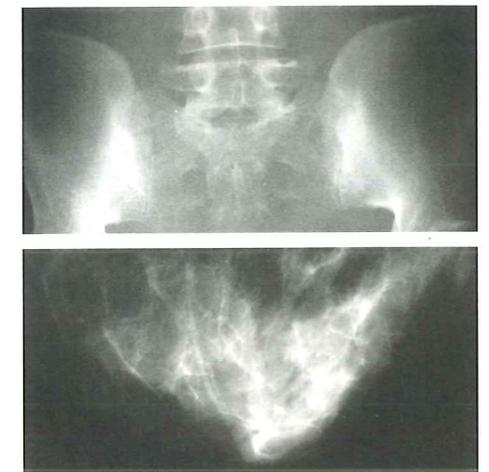
A1 a) Zeichnen Sie den Graphen $U; f_{\max}$ nach $\rightarrow \text{T1}$. Passen in diesen Graphen auch die an Fotozellen mit Licht gewonnenen Messwerte?

b) Berechnen Sie aus den Messwerten von $\rightarrow \text{T1}$ die Planckkonstante h in den Einheiten $\text{J} \cdot \text{s}$ und $\text{eV} \cdot \text{s}$. Kennen Sie eine Größe der klassischen Physik, die auch diese Einheiten besitzt?

A2 a) Welche Grenzwellenlänge tritt bei einer mit 500 kV betriebenen Röntgenröhre auf? **b)** Welches ist die kürzeste Röntgenwellenlänge, die in Fernsehrohren (22 kV) erzeugt wird? Glas absorbiert sie. **A3** Auch Röntgenstrahlen setzen Photoelektronen frei. Vergleichen Sie



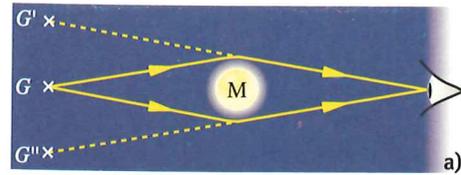
B3 Leuchtdioden aus verschiedenen Materialien strahlen bei der jeweiligen Schwellenspannung U_S Licht der Frequenz f ab. Aus der Geradensteigung $\Delta W/\Delta f$ kann die Planckkonstante h ermittelt werden.



B4 Röntgenbilder: **a)** Becken bei hoher (86 kV), **b)** Brust bei niedriger (28 kV) Spannung U an der Röntgenröhre

die Energie der schnellsten Photoelektronen mit der Elektronenenergie in der benutzten Röntgenröhre.

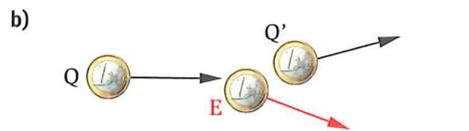
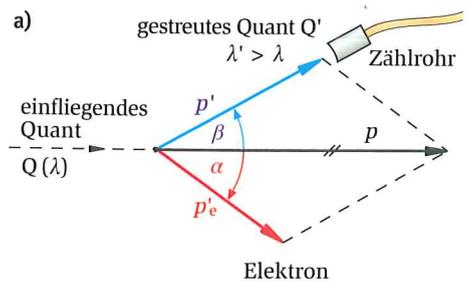
A4 In Nachtsichtgeräten löst unsichtbares IR in einer AgCsO-Schicht Photoelektronen aus. Man beschleunigt sie mit E -Feldern und erzeugt mit B -Feldern elektronisch ein Leuchtschirmbild. Warum liegt es im sichtbaren Bereich? Bis zu welcher Wellenlänge kann man mit diesem Gerät IR „sehen“? (Die Ablöseenergie bei AgCsO ist 1,04 eV).



B1 Gravitationslinse a) Photonen von der fernen Galaxie G werden zu M hin so abgelenkt, dass man die Galaxie mehrfach sieht, in G' und G''. b) Mehrfachbilder von der Galaxie Abell 2218.



B2 Schweif des Kometen Hale-Bopp. Auf dessen Staubteilchen üben Photonen des Sonnenlichts mit ihrem Impuls Stoßkräfte aus.



B3 a) Das Röntgenquant Q mit Impuls \vec{p} (schwarz) trifft von links ein ruhendes Elektron E. Dieses fliegt mit Impuls \vec{p}_e unter α nach unten (rot). Nach oben fliegt das Quant Q' (blau) mit Impuls \vec{p}' unter β ins Zählrohr. b) Schwarze Münze stößt auf rote und fliegt nach oben.

1. Haben Photonen neben Energie auch Masse?

EINSTEIN fand 1905 die berühmte Gleichung $W = mc^2$. Nach ihr ist jeder Energie W die Masse $m = W/c^2$ zugeordnet, auch einem Photon. Es besitzt mit der Energie $W = hf$ die Masse $m = W/c^2 = hf/c^2$. Die Masse des Photons ist proportional zur Frequenz f . Röntgen-Photonen haben größere Massen als Photonen sichtbaren Lichts.

Die massebehafteten Photonen sind nicht nur träge; sie können auch Gravitationskräfte erfahren. Fliegen sie von der fernen Galaxie G an dem massereichen Himmelskörper M vorbei, so werden sie ein wenig zu diesem hin gezogen \rightarrow B1. Der Astronom sieht sie mehrfach, in G' und G''; M wirkt als Gravitationslinse.

2. Photonen haben auch Impuls

Vom freien Fall wissen wir: Körper mit Masse m sind nicht nur schwer, sondern auch träge. Sie sind bestrebt, ihren Impuls $\vec{p} = m\vec{v}$ nach Betrag und Richtung beizubehalten. Nun hat jedes Photon wegen $v = c$ und seiner Masse $m = hf/c^2$ einen Impuls mit Betrag

$$p = m \cdot v = m \cdot c = \frac{h \cdot f}{c^2} \cdot c = \frac{h \cdot f}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

Der Impuls des Sonnenlichts formt die Staubteilchen von Kometen zu ausgedehnten, von der Sonne abgewandten Schweifen \rightarrow B2.

Merksatz

Photonen haben die zur Frequenz f proportionale Masse $m = hf/c^2$. Ihr Impuls hat den Betrag $p = h/\lambda$. (1) ■

3. Der Compton-Effekt zeigt den Impuls eines Photons

a) Was sich in \rightarrow B2 am Himmel zeigt, demonstrierte A. H. COMPTON 1922 im Kleinen. Er schoss mit Röntgenquanten auf Elektronen, die in Grafit praktisch frei sind. Bei diesem Compton-Effekt hatte das in \rightarrow B3a von links einfallende Röntgenquant Q den Impuls \vec{p} (langer schwarzer Pfeil). Damit traf es ein freies, ruhendes Elektron. Dieses fliegt von der Stoßstelle unter dem Winkel α mit dem Impuls \vec{p}'_e weg (Impulse nach dem Stoß bezeichnen wir mit \vec{p}'). COMPTON beobachtete zudem, dass ein gestreutes Quant Q' mit dem Impuls \vec{p}' unter dem Winkel β schräg nach oben fliegt. Der Impulssatz fordert, dass die Summe der beiden Impulsvektoren \vec{p}'_e und \vec{p}' nach dem Stoß gleich dem Impuls \vec{p} des einfallenden Quants Q ist. Das Vektor-Parallelogramm in \rightarrow B3a zeigt:

$$\vec{p} = \vec{p}'_e + \vec{p}' \quad (2)$$

Nach \rightarrow B3b stößt eine Münze (Quant Q, schwarz) auf eine andere, das Elektron (E, rot), etwas oberhalb ihrer Mitte. Die stoßende Münze fliegt schräg nach oben (Q'), die gestoßene schräg nach unten.

b) Auch der Energiesatz ist beim Compton-Effekt erfüllt. Das zunächst ruhende Elektron bekommt vom stoßenden Röntgenquant Q die Energie W_e . Dem wegfliegenden Quant Q' verbleibt die kleinere Energie $W' = W - W_e$. Es hat gegenüber dem anfliegenden Quant Q die kleinere Frequenz $f' = W'/h$. Seine Wellenlänge λ' ist größer als vorher, der Impuls $p = h/\lambda$ kleiner, der Impulsvektor \vec{p}' kürzer.

Mit dem Energie- und Impulssatz lässt sich diese Wellenlängen-zunahme $\Delta\lambda$ berechnen. Man findet bei relativistischer Rechnung

$$\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \lambda_C \cdot (1 - \cos\beta) \quad (3)$$

Die Konstante $\lambda_C = h/(m_e c) = 2,4 \text{ pm}$ heißt Compton-Wellenlänge. In Gl. 3 fehlt λ , denn $\Delta\lambda$ hängt nicht von der ursprünglichen Wellenlänge λ ab, nur vom Streuwinkel β . Diese Zunahme der Wellenlänge ist experimentell bestätigt: \rightarrow B4 zeigt neben unverschobenen Spektrallinien (insbesondere bei $\beta = 0^\circ$), dass die Wellenlängenzunahme $\Delta\lambda$ mit wachsendem Streuwinkel β größer wird. $\Delta\lambda$ hat bei $\beta = 90^\circ$ den Wert $2,4 \text{ pm}$, bei Rückwärtsstreuung unter $\beta = 135^\circ$ gar 4 pm .

Das war eine Sensation; denn sichtbares Licht wird an Gegenständen gestreut, ohne dass sich die Wellenlänge ändert. Die Wellenlängenzunahme $\Delta\lambda = 2 \text{ pm}$ ist bei Röntgen- und γ -Quanten bedeutsam ($\lambda \approx 1 \text{ pm}$), nicht bei sichtbarem Licht ($\lambda \approx 6 \cdot 10^5 \text{ pm}$). Sie macht Röntgen- und Kernstrahlung „weicher“; deren Quanten werden stärker absorbiert, sie lassen sich besser abschirmen.

Der 1922 gefundene Compton-Effekt überzeugte die „physical community“ von der Existenz der Photonen. Da er an Stöße von Billardkugeln erinnert, verleitete er zur Annahme, Photonen verhalten sich wie Körper im Sinne der Newton-Mechanik. Beim Compton-Effekt spielt aber auch die Wellenlänge eine wichtige Rolle.

Beispiel

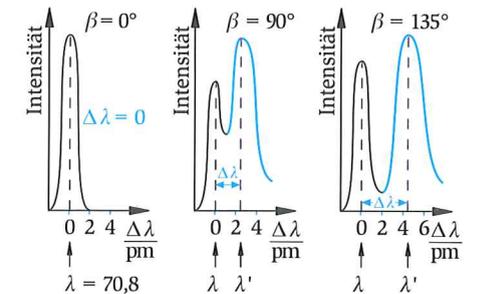
Ein Photon mit Wellenlänge λ_C trifft ein ruhendes Elektron. a) Welche Wellenlänge, welche Energie und welchen Impuls hat das um den Winkel $\beta = 70^\circ$ nach oben gestreute Photon, welche Energie das angestoßene Elektron? b) Zeichnen Sie ein Impulsbild. Entnehmen Sie ihm Winkel und Impuls des angestoßenen Elektrons. c) Was geschieht mit dessen Energie, wenn β zunimmt? Dabei gilt: $\lambda_C = h/(m_e c)$; $\Delta\lambda = \lambda_C \cdot (1 - \cos\beta)$; $h = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$; $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$; $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$; $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$.

Lösung ($1 \text{ pm} = 10^{-12} \text{ m}$)

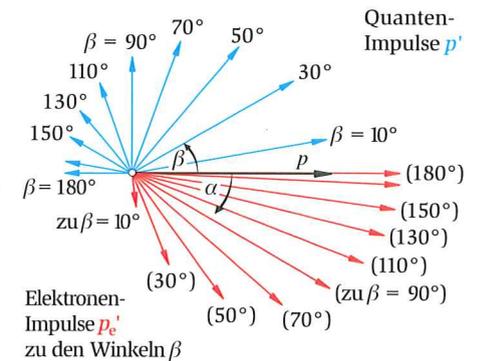
a) Quantenwellenlänge vor Streuung: $\lambda = \lambda_C = h/(m_e c) = 2,4 \text{ pm}$; Wellenlängenzunahme des Quants bei der Streuung: $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda = \lambda_C \cdot (1 - \cos\beta) = 2,4 \text{ pm} \cdot (1 - 0,34) = 1,6 \text{ pm}$; Wellenlänge nachher: $\lambda' = \lambda + \Delta\lambda = 2,4 \text{ pm} + 1,6 \text{ pm} = 4,0 \text{ pm}$. Impuls des Quants vorher: $p = h/\lambda_C = 2,7 \cdot 10^{-22} \text{ Ns}$; Impuls des Quants nachher: $p' = h/\lambda' = 1,7 \cdot 10^{-22} \text{ Ns}$. Energie des Quants vorher: $W = hf = hc/\lambda_C = 8,2 \cdot 10^{-14} \text{ J}$; nachher $W' = hf' = hc/\lambda' = 5,0 \cdot 10^{-14} \text{ J} = 311 \text{ keV}$; Energie des Elektrons: $W_e' = W - W' = 3,2 \cdot 10^{-14} \text{ J} = 200 \text{ keV}$.

b) Der Elektronenimpuls wird dem Vektorparallelogramm in \rightarrow B6 entnommen (oder mit Kosinussatz berechnet) zu $p'_e = 2,7 \cdot 10^{-22} \text{ Ns}$.

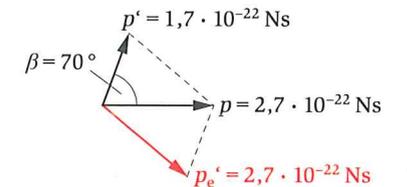
c) Nimmt β zu, sinkt $\cos\beta$. Dabei steigen $\Delta\lambda$ und λ' . Der Impulsbetrag $p' = h/\lambda'$ sinkt, auch Frequenz f' und Energie hf' des Quants. Nach \rightarrow B5 steigen Impuls p'_e und Energie $W_e' = p_e'^2/2m$ des gestreuten Elektrons, wenn β zunimmt.



B4 Wellenlängenzunahme $\Delta\lambda$ der Linie des Quants nach der Streuung (blau) gegenüber der unverschobenen (schwarz). $1 \text{ pm} = 10^{-12} \text{ m}$



B5 Der Impulsvektor \vec{p} des stoßenden Quants (schwarz), zerlegt in die Impulse der unter β gestreuten Quants (\vec{p}' , blau) und der wegfliegenden Elektronen (\vec{p}'_e , rot).

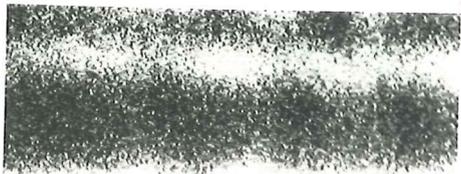
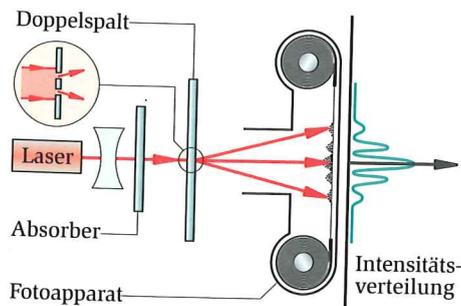


B6 Impulsdiagramm zum \rightarrow Beispiel: Kosinussatz: $p_e'^2 = p'^2 + p^2 - 2p'p\cos\beta$

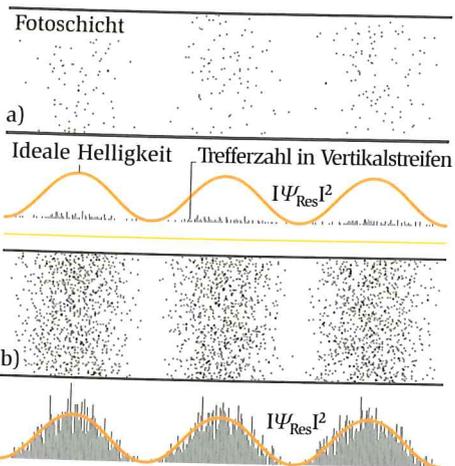
A1 a) Wie viele Photonen gibt die Sonne je Sekunde ab ($\lambda = 550 \text{ nm}$; Strahlungsleistung $3,9 \cdot 10^{26} \text{ W}$)? b) Wie viele Photonen gibt eine 100 W -Lampe in 3000 h ab (Wirkungsgrad für Lichtemission 5% ; $\lambda = 500 \text{ nm}$)? Welche Masse haben sie? Hat die Lampe nach der Abkühlung an Masse verloren? Begründen Sie!

A2 Wie groß ist die Wellenlängenänderung beim Compton-Effekt bei $\beta = 0^\circ, 90^\circ, 180^\circ$? Welchen Anteil hätte sie bei sichtbarem Licht (600 nm)?

A3 Wie ändert sich der Impuls des gestoßenen Elektrons, wie dessen Energie, wenn der Winkel β des gestreuten Quants steigt?



V1 Laserlicht fällt auf einen Doppelspalt; sein Beugungsbild wird im Fotoapparat ohne Objektiv auf feinkörnigem S/W-Film registriert. Der Absorber A macht die Bilder so dunkel, dass sie kaum sichtbar sind. Der entwickelte Film zeigt bei 600-facher Vergrößerung Beugungsbilder. Sie bauen sich mit steigender Belichtungsdauer (1/1000 s, 1/100 s, 1/10 s) aus einer wachsenden Zahl unregelmäßig verteilter, schwarzer Silberkörner auf. An Stellen konstruktiver Interferenz landet kein Photon. Mit der Belichtungsdauer steigt die Zahl, nicht die Schwärzung der Körner.



B1 Zwei Simulationen mit dem Zufallsgenerator zeigen, wie sich die zufallsbedingte Verteilung der Körner in \rightarrow V1 nacheinander aufbaut. $|\Psi_{Res}|^2$ gibt die zu erwartende Körnerzahl je mm^2 an \rightarrow \odot .

1. Kann man Photonen nicht doch klassisch beschreiben?

Bei Schall schwingen *Luftteilchen* relativ zueinander und bilden eine Welle. Besteht nicht auch die Lichtwelle aus einem Schwarm Photonen, die zueinander schwingen? Dies widerlegte G. TAYLOR 1909. Er brachte Licht zur Interferenz, das so schwach war, dass sich jeweils *höchstens ein Photon* im Gerät befand \rightarrow V1, \rightarrow B1, \rightarrow \odot . Trotzdem fügte es sich in das übliche Interferenzbild ein. Dieses bestand zunächst nur aus wenigen, stets scharfen Photonentreffern. Im Laufe monatelanger Belichtung nahm deren Zahl zu. Nahe den Minima trafen nur wenige Photonen den Schirm; zu den Maxima hin stieg ihre Zahl. So bauten die Photonen allmählich die periodischen Interferenzstreifen auf. Der englische Quantentheoretiker DIRAC sagte: **Jedes Photon interferiert mit sich selbst.**

Interferieren am Doppelspalt auch Teilchen, die der klassischen Mechanik gehorchen, z.B. Farbtröpfchen? Diese sprühen wir aus einer Spraydose durch zwei parallele Schlitze auf einen Schirm. Jedes Tröpfchen fliegt *entweder* durch Spalt 1 *oder* 2 \rightarrow B2. Ist nur Spalt 1 offen, so entsteht auf dem Schirm der verwaschene Fleck 1'. Ist nur Spalt 2 offen, baut sich Fleck 2' auf. Sind beide offen, so addieren sich an jeder Stelle die Teilchenzahlen von Fleck 1' und 2' zur Kurve *Add*. Fliegt nämlich ein Tröpfchen durch Spalt 1, so ist es völlig gleichgültig, ob Spalt 2 offen oder geschlossen ist. Klassische Teilchen zeigen keine Interferenz, wohl aber Photonen.

2. Bei Photonentreffern spielt der Zufall mit

Photonen liefern nach \rightarrow B3 Interferenzstreifen. Niemand kann beim Aufbau der Interferenzbilder vorhersagen, wann und wo der nächste Treffer landet \rightarrow B1, das bleibt *im Einzelfall unbestimmt*. Dort regiert der reine, durch nichts weiter begründbare **Zufall**. So bauen sich aus sehr vielen Photonentreffern die bekannten Interferenzbilder bei Licht auf. An ihren Maxima ist die *Wahrscheinlichkeit* für Photonentreffer groß. Deren **Antreffwahrscheinlichkeit** nimmt zu den Minima hin stetig ab.

3. Nur die Deutung ändert sich, nicht unser Vorgehen!

Photonentreffer kann man zählen. Liegen an einer Stelle 9-mal so viele pro mm^2 wie an einer andern, so ist die *Antreffwahrscheinlichkeit* für Photonen 9-fach. Nun setzt jeder Treffer die Energie $h \cdot f$ frei. Also ist die Dichte ρ_W der verteilten Energie 9-fach. 9-fache Energiedichte ρ_W erhalten wir bei 3-facher elektrischer Feldstärke E , bei 3-facher Amplitude der Lichtwelle. Wie wir wissen gilt $\rho_W \sim E^2$. Auch bei der Interferenz von Photonen möchten wir die rotierenden Zeiger benutzen. Ihre Länge soll aber nicht mehr die *Amplitude* der Lichtwelle angeben, sondern die *Wahrscheinlichkeit* für Photonentreffer. In der Quantensprache fasst man beides zusammen und nennt die Zeiger **Wahrscheinlichkeits-Amplituden**: Wir sagen Ψ -Zeiger (Psi). Für ihre Länge schreibt man $|\Psi|$, das Quadrat $|\Psi|^2$ gibt die Dichte der Photonentreffer an, die Wahrscheinlichkeit, mit der sich Photonen auf dem Beugungsschirm niederlassen. Treffen einen Fleck viele Photonen, so auch viel Energie; dort ist $|\Psi|^2$ groß.

Großes $|\Psi|^2$ bedeutet hohe Antreffwahrscheinlichkeit für Photonen. $|\Psi|^2$ gibt die Photonendichte an.

4. Was bedeutet der „Dualismus Welle-Teilchen“?

Bei Photonen spielen auch Frequenz $f = W/h$ und Wellenlänge $\lambda = h/p$ eine Rolle. Also lassen wir die Zeiger so rotieren wie bei klassischen Wellen, längs der Wellenperiode λ einmal. Die Zeiger fungieren als λ -Zähler. So beschreiben wir die Interferenz von Photonen wie bei Seil-Wellen. Durch Einführen der Wahrscheinlichkeitsamplitude Ψ hat Max BORN (Nobelpreis 1954) das *Wellenbild* so weit reduziert, dass es mit einem auf Photonen anwendbaren *Teilchenbild* vereinbar wurde. Wer vom „**Dualismus Welle-Teilchen**“ spricht, meint diese Fusion. Was bedeutet sie?

5. Photonen nehmen alle Möglichkeiten wahr

Am Doppelspalt interferiert jedes Photon mit sich selbst, ohne sich in Teile zu spalten. Wir dürfen nicht sagen, das Photon fliege z.B. durch den linken Spalt, nur *wissen* wir es nicht so recht. Wäre diese Aussage richtig, so müssten wir die viel breiteren Beugungsbilder für Einzelspalte erhalten.

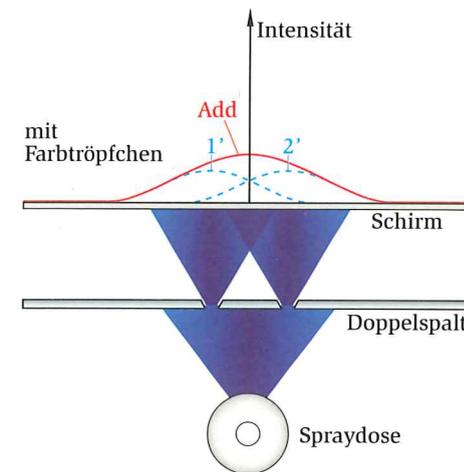
Wir sagen vielmehr: Am Doppelspalt stehen jedem Photon zwei *mögliche Pfade* zum Ziel offen, durch jeden Spalt ein Pfad. Für jede dieser beiden *gleichberechtigten Möglichkeiten*, für jeden **gleichberechtigten Pfad**, lassen wir einen Ψ -Zeiger rotieren – wie früher bei Wellen. Als λ -Zähler dreht er sich auf der Strecke λ einmal. Die Pfadlänge s bestimmt die Endstellung der Ψ -Zeiger im Ziel (bei $s = 4,25 \cdot \lambda$ macht der Zeiger $4\frac{1}{4}$ Umdrehungen: seine Endstellung ist 90°). Wie bei Wellen addieren wir im Zielpunkt auf dem Schirm beide Zeiger vektoriell gemäß

$$\Psi_{Res} = \Psi_1 + \Psi_2 \quad (\text{statt } \vec{E}_{Res} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2). \quad (1)$$

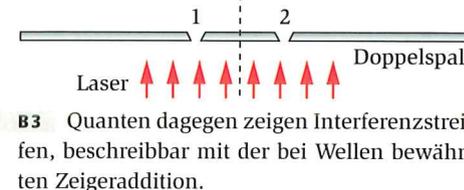
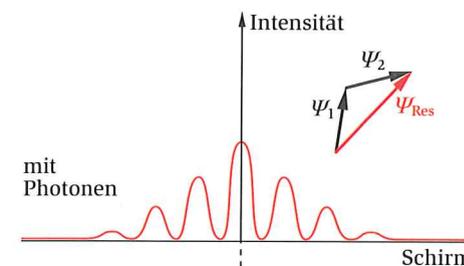
Dieses **Superpositionsprinzip** beherrscht die Quantenphysik (Superponieren bedeutet Addieren der Ψ -Zeiger). Damit können wir auch das *Huygensprinzip* von Wasserwellen auf Quanten übertragen \rightarrow B4: Wir brauchen nur die *tatsächlichen* Bahnen der Wellenerregung von der Quelle Q zum Ziel Z umzudeuten in alle *möglichen* Pfade des Quants. Für jede dieser Möglichkeiten lassen wir einen Zeiger rotieren und addieren alle Zeiger in Z. Folglich bleibt völlig **unbestimmt**, wie das unteilbare Photon von Q nach Z gelangt. Es wäre wenig hilfreich anzunehmen, es durchlaufe sie alle zugleich oder nacheinander. Wir betrachten die möglichen Bahnen nur als *Rechenpfade*, um die Endstellungen der Ψ -Zeiger zu ermitteln.

6. Die Superposition erfasst das Ganze

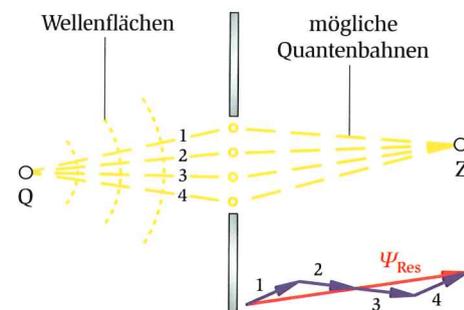
Auch beim Umdeuten von Wellen auf Quanten müssen beim Doppelspalt *beide Spalte zugleich* beachtet werden, die **Interferenzanordnung als Ganzes**. Das Verhalten eines jeden Photons hängt nämlich trotz seiner Unteilbarkeit von der Position beider Spalte ab. Wir beschreiben das mit der Addition $\Psi_{Res} = \Psi_1 + \Psi_2$ beider Zeigerstellungen. Diese Summe ist zwar exakt bestimmt, man sagt *determiniert*, Einzelereignisse wie Ort und Zeitpunkt der einzelnen Photonelokalisation bleiben dagegen dem Zufall überlassen. Man trifft ein Photon wegen seiner Unteilbarkeit nur an einem bestimmten Ort. Er hängt von der ganzen Versuchsanordnung wie auch vom Zufall ab. An Interferenzminimas findet man keine Photonen.



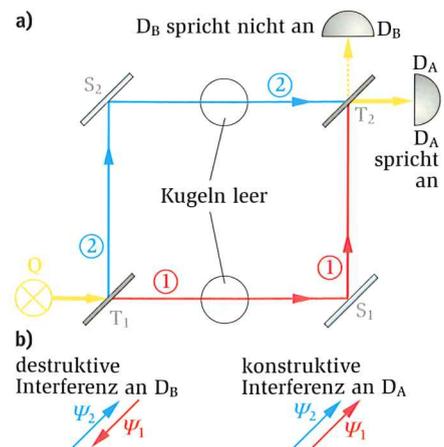
B2 Klassisch: Farbtröpfchen am Doppelspalt erzeugen zwei verschmierte Streifen 1' und 2', die zusammen *Add* ergeben.



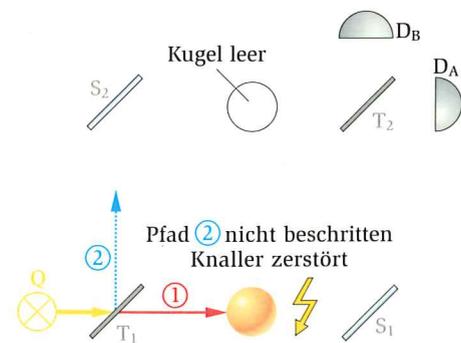
B3 Quanten dagegen zeigen Interferenzstreifen, beschreibbar mit der bei Wellen bewährten Zeigeraddition.



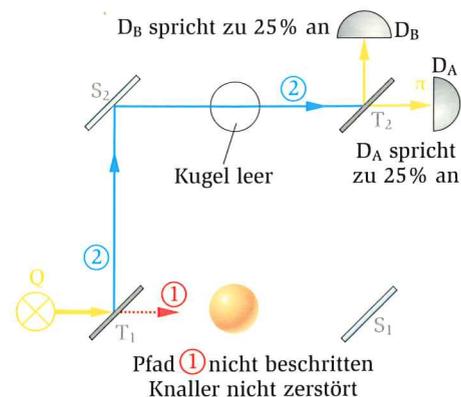
B4 Die *tatsächlichen* Wellenbahnen 1...4 werden umgedeutet in *mögliche* Rechenpfade für die λ -Zähler $\Psi_1 \dots \Psi_4$. Man addiert deren Endstellungen im Ziel Z vektoriell zur Summe Ψ_{Res} . Ihr Quadrat $|\Psi_{Res}|^2$ gibt die Antreffwahrscheinlichkeit für Photonen in Z.



B1 a) Beide Glaskugeln leer. Die Pfade ① und ② sind gleichberechtigt; von Q ausgehende Photonen landen *stets* im Detektor D_A .
 b) Interferenz an der Platte T_2 konstruktiv für D_A , destruktiv für D_B .



B2 Ein Photon wählt Pfad ① und zerstört den Knaller. Weg ② entfällt; die Detektoren D_A und D_B bleiben stumm.



B3 Das Photon wählt Pfad ②. Der Knaller im Pfad ① bleibt unzerstört und kann trotzdem vom Detektor D_B gemeldet werden! Die Pfade sind nicht mehr gleichberechtigt, die Interferenz an T_2 entfällt. Dort entscheidet sich das Photon für D_A oder D_B , je zu 25 % aller Fälle.

7. Der Knallertest: Sehen, was nicht gesehen wird

Die Brisanz der Quantenwelt verdeutlichen wir an einem Gedankenexperiment: Ein Fabrikant für Scherzartikel füllte Glaskugeln mit einem Gas, das von bereits *einem* Photon zur Explosion gebracht wird. Leider vermischte er diese sensiblen Knaller mit leeren Kugeln. Kann man funktionierende Knaller erkennen, ohne dass sie ein einziges Photon trifft, ohne dass sie „zerstört“ werden? Anders gesagt: Kann ein Photon den Knaller umfliegen, ihn meiden und trotzdem aus der Ferne „erkennen“? Ein solches *nicht-lokales* Verhalten ist nach klassischer Physik unvorstellbar!

Der Fabrikant nimmt die Quantengesetze ernst und baut ein Interferenzgerät nach \rightarrow B1. Es ist zum Doppelspalt analog. Wie dort gibt es zwei mögliche Pfade ① und ②, geführt über die beiden Teilerplatten T_1 und T_2 und die zwei Spiegeln S_1 und S_2 . Auch lässt der Fabrikant jeweils höchstens *ein* Photon im Apparat laufen. Es trifft von der Quelle Q kommend auf die Teilerplatte T_1 . Diese ist mit einer schwach reflektierenden Silberschicht so belegt, dass dem Photon die beiden weit getrennten Pfade ① und ② offenstehen, je mit 50 % Wahrscheinlichkeit. Diese Pfade ergreift das Photon als Quantenmöglichkeiten zugleich, solange sie gleichberechtigt sind.

a) Sind die beiden Glaskugeln leer, so sind die Pfade ① und ② *gleichberechtigt*. Die Endstellungen ihrer rotierenden Zeiger Ψ_1 und Ψ_2 werden an der Teilerplatte T_2 addiert \rightarrow B1b. Wie vom **MACH-ZEHNDER-INTERFEROMETER** bekannt, interferieren sie zu D_A hin konstruktiv ($\uparrow\uparrow$), zu D_B hin dagegen destruktiv ($\uparrow\downarrow$). Also fliegt *jedes* Photon zum Detektor D_A , parallel zu dem die Quelle Q verlassenden horizontalen Pfad.

b) Nun ersetzt der Fabrikant im Dunkeln die leere Kugel im Pfad ① durch einen sensiblen Knaller, ohne es zu wissen. Jetzt sind die Pfade *nicht mehr gleichberechtigt*. Wie verhält sich das Photon?

Zerstört das Photon den Knaller (und sich selbst), so flog es nachweisbar längs dem roten Pfad ① \rightarrow B2. Dies tritt in 50 % aller möglichen Fälle ein. Hier hat der Fabrikant Pech.

In den restlichen 50 % läuft das Photon längs Pfad ②, der Knaller bleibt heil. An der Teilerplatte T_2 entfällt der Zeiger Ψ_1 für Pfad ① und damit die Interferenz, die in \rightarrow B1 das Photon zwangsläufig zu D_A führte. Ohne diese Interferenz ist das Photon an T_2 „frei“. Dort wählt es in 25 % aller Fälle (Hälfte von 50 %) den Detektor D_B , der ohne Knaller *nie* ansprechen würde. Das Klicken von D_B entlarvt den Knaller, ohne ihn zu zünden. Der Fabrikant rettet ihn schnell, bevor das nächste Photon kommt.

Das Aufregende ist: Das Photon erkennt den Knaller, ohne mit ihm Kontakt zu haben: Es verhält sich *nichtlokal*. Es gab seine ganze, zum Zünden nötige Energie $h \cdot f$ im Detektor D_B ab, nicht im Knaller. Wiederum ist die Anordnung *als Ganzes* zu betrachten.

Leider geht das Photon bei den restlichen 25 % zum Detektor D_A , der Klick an D_B entfällt. Der Knaller wird fälschlich als leer deklariert. Man bedenke aber: Beständen klassische Vorstellungen zu Recht, so hätte man keinen einzigen Knaller retten können. Denn jedes Photon, das ihn tatsächlich trifft, zerstört ihn.

8. Nichtlokalität, Unbestimmtheit, Nichtobjektivierbarkeit

Der Knaller-Fabrikant freut sich, wenn in \rightarrow B3 das Photon den Detektor D_B auslöst. Der Knaller ist erkannt, bleibt unbehelligt, aber nicht unbeteiligt. Allein seine Anwesenheit im Pfad ① ermöglicht es dem Photon, nach D_B zu fliegen. EINSTEIN hätte von einer *spukhaften Fernwirkung* gesprochen. Hier zeigt sich die skurrilste Quanteneigenschaft, die **Nichtlokalität**. \rightarrow B1 zeigt die **Unbestimmtheit** der Quantenwege. Dort kann man nicht sagen, das Quant habe einen bestimmten Weg (Pfad ① oder ②) tatsächlich, *objektiv* gesprochen, durchlaufen (objektiv: dem Objekt zukommend, unabhängig vom Beobachter). Solche Quantenaussagen sind **nichtobjektivierbar**. Es handelt sich nicht um *subjektives Nichtwissen* eines vorgeblich *objektiven* Sachverhalts. Sonst gäbe es bei T_2 keine Interferenz.

9. Die Welcher-Weg-Frage; Komplementaritätsprinzip

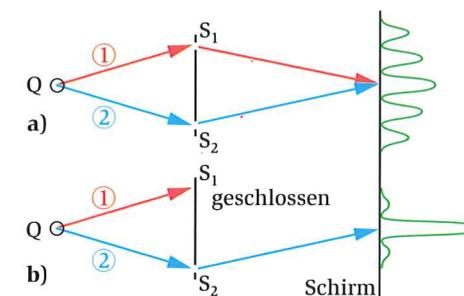
Es ist also stets zu fragen, welche Wege dem Photon von der Quelle zum Zielpunkt zur Verfügung stehen, damit es Interferenz gibt:

- Ohne Knaller, in \rightarrow B1a, sind beide Wege ① und ② gleichberechtigt. Man kann nicht sagen, welchen von beiden Wegen das Photon *tatsächlich* geht; die sog. **Welcher-Weg-Frage** ist prinzipiell nicht beantwortbar. Das gilt auch am Doppelspalt, wenn dort Interferenzstreifen auftreten \rightarrow B4.
- Mit dem Knaller werden dagegen die Wege ① und ② unterscheidbar. In \rightarrow B3 bleibt der Knaller unbeschadet, weil das Quant tatsächlich den Weg ② durchläuft. Die Welcher-Weg-Frage ist beantwortet. Also gibt es *keine Interferenz* an der Platte T_2 . Der dazu nötige Weg ① entfällt.
- In \rightarrow B2 knallt es, das Quant folgte Weg ①. Auch hier ist die Welcher-Weg-Frage klar beantwortet, es gibt keine Interferenz.

Ergebnis: Beobachtet man Interferenz, so ist die Welcher-Weg-Frage grundsätzlich nicht beantwortbar. Ist sie beantwortbar, dann gibt es keine Interferenz. Niels BOHR sagte: Ist die *Welcher-Weg-Frage* beantwortbar, dann liegt ein *teilchenartiges* Verhalten vor. Andernfalls, bei Interferenz, handelt es sich um *Wellen*. Teilchen- und Wellenmodell widersprechen sich zwar in der klassischen Physik, ergänzen sich aber bei Quanten. Er nannte dies das **Komplementaritätsprinzip** (complere, lat. sich gegenseitig ergänzen).

Merksatz

- Alle *möglichen, gleichberechtigten* Pfade des unteilbaren Quants von der Quelle zum Ziel sind zu betrachten. Jedem wird ein Zeiger Ψ_i zugeordnet, der sich als λ -Zähler auf der Strecke λ einmal dreht.
- Die Zeiger Ψ_i für *alle gleichberechtigten Möglichkeiten* werden zur Resultierenden $\Psi_{\text{Res}} = \sum \Psi_i$ addiert: sie werden superponiert.
- Die Quantengrößen $\Psi_{\text{Res}} = \sum \Psi_i$ und $|\Psi_{\text{Res}}|^2$ sind durch die Zeigeraddition streng bestimmt, *determiniert*. Erst bei Einzelereignissen gilt der Zufall. Man deutet $|\Psi_{\text{Res}}|^2$ als *Antreffwahrscheinlichkeit* für Quantenereignisse.
- Zeigt sich bei einem Experiment Interferenz, so ist die *Welcher-Weg-Frage* nicht beantwortbar (mehrere Möglichkeiten gelten zugleich).
- Ist eine Anordnung so beschaffen, dass die *Welcher-Weg-Frage* beantwortbar ist, dann entfällt die Interferenz für diese Wege.



B4 a) Beide Spalte offen: Die *Welcher-Weg-Frage* „durch Spalt 1 oder 2“ ist nicht beantwortbar. Man erhält Doppelspalt-Interferenz. Das Photon beachtet *das Ganze* der Anordnung, also beide Spalte zugleich. Die Zeiger für beide sind zu addieren. b) Nur Spalt 2 ist offen. Die *Welcher-Weg-Frage* „Spalt 1 oder 2“ ist beantwortbar. Die Doppelspaltinterferenz entfällt; man erhält Einzelspalt-Interferenz. (Prinzipienbild: Spaltabstand stark überhöht)

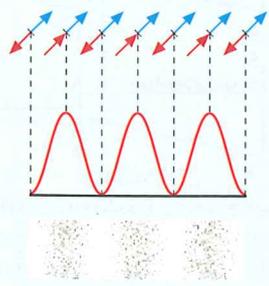
A1 a) Im Text ist zu lesen, dass man mit der Zeigerdarstellung bei Quanten ein reduziertes Teilchenbild mit einem reduzierten Wellenbild verschmolzen habe. Was wurde dabei jeweils reduziert? Erfinden Sie dazu Beispiele. b) Welche Bedeutung haben die Zeiger bei Quanten zusätzlich gewonnen, welche haben sie verloren? c) Veranschaulichen Sie das Wort „ λ -Zähler“ mit einem Rad, das entlang eines Rechenpfads rollt. Welchen Umfang geben Sie ihm? Was bedeutet das Wort Rechenpfad?

A2 a) Warum sind in der klassischen Physik Teilchen- und Wellenbild unvereinbar? b) Beim Michelson-Interferometer (und beim Glimmerblatt-Versuch) stellten wir fest, dass Lichtwellenzüge eine begrenzte Länge haben. Wenden Sie darauf die *Welcher-Weg-Frage* an. c) Wenden Sie die *Welcher-Weg-Frage* auf das optische Gitter an.

A3 a) Eine größere Wandergruppe steht im Wald an einer Wegkreuzung. Wegweiser und Wanderkarte zeigen zwei mögliche Wege zum gewünschten Ziel. Die Gruppe teilt sich auf und vereinigt sich wieder am Ziel. Vergleichen Sie dies mit dem Verhalten vieler Photonen beim Doppelspaltexperiment. b) Warum ist bei Lichtquanten schon eine kleine Differenz der möglichen Weglängen zum Ziel bedeutsam, nicht aber bei den Personen? c) Einer der beiden Waldwege ist an einer vorher unbekanntem Stelle gesperrt. Diskutieren Sie jetzt diese Fragen.

Interessantes

1. Von der Realität zum Symbol



c) Ebene der Symbole:
Die Zeiger sind gedankliche, theoretische Hilfsmittel

b) Ebene der Messdaten:
Intensitäts-Kurve

a) Ebene der Realität:
Die Photonentreffer sind real, tatsächlich.

Die Gesetze der Quantenphysik werden von den heutigen Experimenten voll bestätigt. Doch werfen sie philosophisch geprägte Fragen auf. Das **Bild** skizziert das Vorgehen in der Physik von der Ebene unmittelbarer Sinnes-Erfahrung (a) über deren Verschärfung durch Messdaten (b) hin zur abstrakten Beschreibung durch Symbole und Theorien (c):

(a) **Realität:** Die Lokalisationspunkte von Photonen auf Fotoplaten sind *objektive, vom Beobachter unabhängige, reale Ereignisse*. Ihre Lage ist zwar vom Zufall bestimmt, deutet aber auf eine geordnete Struktur.

(b) **Messung:** Diese Struktur zeigt die gemessene Intensitätskurve; sie präzisiert unsere Sinnesempfindungen (Hell-Dunkel) und deutet auf Interferenz.

(c) **Symbole:** Die Interferenz beschreiben wir durch Ψ -Zeiger, durch die Quantengröße Ψ . Beide sind aber so wenig real wie Feldlinien. Es sind abstrakte Symbole, Hilfsmittel zum Darstellen des Gedachten.

Physikalische Überlegungen, das Bilden von Theorien, findet im Kopf statt. Die Zeiger rotieren nur in unseren Köpfen und auf dem Bildschirm. Experimente sind dagegen Naturvorgänge, die zum gedanklichen Durchdringen des Beobachteten auffordern, zum Aufstellen geschlossener, widerspruchsfreier Theorien. Umgekehrt werden Experimente von solchen Theorien angeregt.

2. Symbole sind Bestandteile einer Theorie

Die Ψ -Zeiger unterliegen wie auch das Ψ den strengen Gesetzen der Quantentheorie. Man beschreibt damit aber auch die Erfahrung, das Verhalten der Quanten. Zum Beispiel ist das $|\Psi|^2$ als Antreffwahrscheinlichkeit von Photonenlokalisationen auf dem Bildschirm messbar. Dieses Einbinden sowohl in eine Theorie wie auch in die experimentelle Erfahrung gilt für alle physikalischen Begriffe. Man denke an die elektrische Spannung mit ihrem im ohmschen Gesetz $U = R \cdot I$ benutzten Buchstaben-symbol U . Wegen der Messbarkeit der Begriffe stellen die gewonnenen Ergebnisse eine korrekte, stets kontrollierbare Physik dar. Diese ist kein Phantasieprodukt, trotz ihrer bisweilen wenig anschaulichen Aussagen.

Dieses Wechselspiel von Erfahrung und Theorie beschrieb H. HERTZ in einem bedenkenswerten Satz: „Wir machen uns innere Scheinbilder oder Symbole der äußeren Gegenstände so, dass die denknotwendigen Folgen der Bilder stets wieder Bilder seien von den naturnotwendigen Folgen der abgebildeten Gegenstände.“

Dass diese Wechselwirkung von Denken und experimenteller Nachprüfung so erfolgreich funktioniert, ist nicht selbstverständlich. EINSTEIN sagte: „Raffiniert ist der Herrgott, boshaft aber ist er nicht“.

3. Was heißt „verstehen“?

Der berühmte Quantenphysiker R. FEYNMAN (Nobelpreis 1965) sagte: „Schon am Doppelspalt zeigt sich das ganze Geheimnis der Quantenphysik, das niemand verstehen kann.“ Verstehen bedeutet dabei ein Zurückführen auf anschauliche Modelle, z. B. auf das uns so vertraute Teilchen- und Wellenmodell der klassischen Physik. Diese Modelle sind Vorstellungen, welche auf die uns gewohnte Umgebung passen, weil sie ihr entwachsen sind. Deshalb liegen uns anschauliche Bilder von Wasserwellen oder Billardkugeln näher als Ψ -Zeiger. Wie wir sahen, sind diese Zeiger abstrakte, von unseren klassischen Vorstellungen unbelastete Hilfsmittel. Sie sind geeignet, Modell-Ballast abzuwerfen, der nicht zu den Quanten passt. Diese anschaulich zu verstehen, ist offensichtlich unmöglich; die Quantenwelt ist unseren Sinnen zu fern. Wir sollten uns nicht darüber wundern, dass zu deren Beschreibung das unanschauliche Ψ nötig ist, wohl aber darüber, dass es nach heutiger Erfahrung bei der Fülle verschiedenartigster Experimente ausreicht.

4. Was bedeutet uns die Quantenphysik?

Die moderne Quantenphysik zwingt uns, unsere Vorstellungen von der Natur neu zu überdenken. Dabei erfahren wir, dass den logischen Fähigkeiten des Menschen auch unanschauliche Bereiche zugänglich sind. Wir brauchen die anschaulichen, sich widersprechenden Bilder Welle und Teilchen nicht mehr. Wir sehen, dass unsere logischen, als abstrakt geltenden Fähigkeiten viel weiter reichen als die auf unsere Umwelt beschränkte Anschauung. Mit der Quantenphysik bekommen wir nicht nur tiefe Einblicke in die Natur, sondern auch in unsere geistigen Fähigkeiten. Wir erkennen Grenzen und zugleich grenzüberschreitende Möglichkeiten. Wer trotzdem versucht, Quantenphänomene mit gegenständlichen Bildern zu verstehen, wird der Natur nicht gerecht. Zudem verschenkt er viel von den weitreichenden logischen, mit abstrakten Symbolen arbeitenden Fähigkeiten des Menschen. Sie sind ein wichtiger Teil menschlicher Kulturleistung, deren Faszination sich kein denkender Mensch entziehen sollte. Hier liegt eine wichtige Bedeutung der modernen Physik für Philosophie und Kultur.

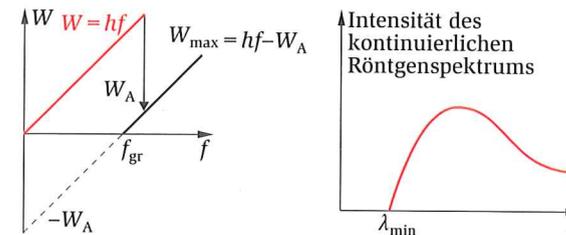
Das ist wichtig

Lichtquanten sind unteilbar. Ihre Energie $W = hf$ hängt von der Frequenz f des Lichts ab, nicht von der Intensität.

Beim Photoeffekt haben die Elektronen die maximale Energie

$$W_{\max} = h \cdot f - W_A$$

$h = 6,626 \cdot 10^{-34}$ Js ist die Planck-Konstante, W_A die Ablöseenergie des Photoelektrons vom Material. Der Photoeffekt setzt ein bei der Grenzfrequenz $f_{gr} = W_A/h$.

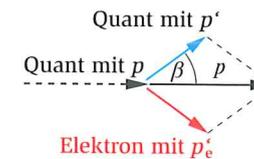


In Röntgenröhren schließt sich bei der Beschleunigungsspannung U an die Grenzwellenlänge λ_{\min} ein kontinuierliches Röntgenspektrum an mit der Grenzfrequenz $f_{\max} = c/\lambda_{\min}$. Bei dieser Umkehr des Photoeffekts gilt

$$h \cdot f_{\max} = eU$$

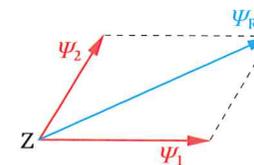
Masse eines Photons: $m = W/c^2 = h/(c\lambda)$
Impuls eines Photons: $p = h/\lambda$

Compton-Effekt: Trifft ein Quant der Wellenlänge λ mit Impuls p ein freies Elektron mit Masse m_e , so wird das Quant unter dem Winkel β mit dem Impuls p' gestreut, das Elektron mit dem Impuls p'_e (nach entgegengesetzter Seite). Die Wellenlänge des Quants vergrößert sich um $\Delta\lambda = \lambda_C \cdot (1 - \cos\beta)$. $\lambda_C = h/(m_e \cdot c) = 2,4$ pm ist die Compton-Wellenlänge.



Superpositionsprinzip für Quantenmöglichkeiten

Die von klassischen Wellen bekannte Zeigeraddition wird bei Quanten umgedeutet: Von der Quelle Q zum Ziel Z gibt es für ein Photon in der Regel mehrere gleichberechtigte Möglichkeiten (beim Doppelspalt die zwei ‚Pfade‘ durch beide Spalte). Für jede dieser Möglichkeiten, für den i -ten Pfad, rotiere ein Zeiger Ψ_i . Als „ λ -Zähler“ dreht er sich auf der Strecke λ einmal. Im Ziel Z werden die Zeiger Ψ_i für alle möglichen Pfade zur Resultierenden $\Psi_{Res} = \sum \Psi_i$ addiert. $|\Psi_{Res}|^2$ gibt im Zielpunkt Z die Antreffwahrscheinlichkeit an.



Man darf die Pfade für gleichberechtigte Möglichkeiten nicht als tatsächliche Bahnen des Quants verstehen; es sind „Rechenpfade“: Man darf nicht sagen, eine davon werde tatsächlich beschritten, man wisse nur nicht, welche. Sie sind unbestimmt im Quantensinn.

Die Quantengrößen Ψ sind streng bestimmt, determiniert, wie die Addition ihrer Zeiger. Erst bei den einzelnen Photonenlokalisationen tritt der Zufall ins Spiel, beim Deuten von $|\Psi|^2$ als Antreffwahrscheinlichkeit von Quantenobjekten.

$|\Psi|^2$ kann gemessen werden, hat physikalische Bedeutung. Die Wahrscheinlichkeitsamplitude Ψ ist dagegen eine reine Rechengröße, z. B. zum Ermitteln von $|\Psi|^2$.

Die „Welcher-Weg-Frage“

Ist das Experiment geeignet, den tatsächlichen Weg des Quants in Erfahrung zu bringen, so ist die Welcher-Weg-Frage beantwortbar. Es gibt keine Interferenz. Dann entfallen Unbestimmtheit und Superposition. Die verschiedenen Möglichkeiten sind nicht mehr gleichberechtigt. Beobachtet man dagegen Interferenz, so ist die Welcher-Weg-Frage prinzipiell nicht beantwortbar.

Das Quantengeheimnis im Spiel

Fixieren Sie beim Doppelspaltexperiment eine Dunkelstelle D. Von Ihnen unbemerkt wird Spalt 1 ständig geöffnet und wieder geschlossen. Bleibt D dunkel, dann sind beide Spalte offen, die beiden Wege durch Spalt 1 und 2 sind unbestimmt. Wenn Sie mit dem Knallertest vergleichen, so können Sie sagen: Kein „Welcher-Weg-Detektor“, kein Knaller in einem Spalt; die Welcher-Weg-Frage ist nicht beantwortbar. Zeigen sich dagegen Photonen bei D, so sagen Sie: Ein Spalt ist geschlossen, der Weg durch den andern Spalt ist bestimmt. Das Photon verhält sich jetzt so, als ob es Kenntnis vom Schließen des andern Spalts hätte.

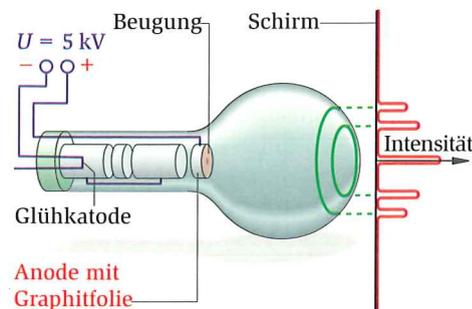
A1 Licht der Bestrahlungsstärke $S = 1$ kW/m² und der Wellenlänge $\lambda = 400$ nm fällt auf eine Cs-Platte von $A = 100$ cm² Querschnitt, unter dem Winkel $\alpha = 60^\circ$ (gegen das Einfallslot). a) Welche maximale Geschwindigkeit haben die Photoelektronen? b) Wie viele Photoelektronen entstehen bei der Quantenausbeute $\eta = 0,1\%$. Begründen Sie die benutzten Gleichungen an Hand von Skizzen.

A2 a) Wie groß muss beim Compton-Effekt der Winkel β des gestreuten Quants sein, dass die größte Änderung der Wellenlänge eintritt? Prüfen Sie an einer geeigneten Abbildung im Buch. b) Ein Quant mit Comptonwellenlänge fällt unter diesem Winkel auf ein Elektron. Welchen Energieverlust erleidet es?

1. Elektronenbeugung, de Broglie-Wellenlänge λ_B

Die Photonen kennzeichnet nicht nur ihre Wellenlänge λ . Kometenschweife zeigen, dass sie auch Masse und Impuls $p = h/\lambda$ besitzen. Deshalb fragte der franz. Prinz DE BROGLIE (Nobelpreis 1929), ob man nicht umgekehrt auch Elektronen eine Wellenlänge gemäß $\lambda = h/p$ zuschreiben könne. Dann müssten sie interferieren, wenn sie mit dem Impuls p eine Beugungsanordnung durchfliegen. DE BROGLIE stellte diese kühne Hypothese auf, da er vom Walten übergeordneter Naturgesetze überzeugt war. Die von ihm postulierte Wellenlänge fliegender Elektronen nennt man

deBroglie-Wellenlänge $\lambda_B = h/p$. (1)



B1 Elektronen werden in der luftleeren Beugungsröhre mit der Spannung $U = 5$ kV beschleunigt. Sie durchsetzen in der Anodenöffnung eine dünne Schicht aus polykristallinem Grafit (rot). Am Schirm sehen wir zwei Beugungsringe mit Radien r_a und r_b .

Beispiel Experiment zur Elektronenbeugung

In der Beugungsröhre von **B1** bekommt ein Elektron (Ladung $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C; Masse $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg) bei der Spannung $U = 5,0$ kV die Energie $W_{\text{kin}} = eU = 5$ keV $= 1,6 \cdot 10^{-19}$ C $\cdot 5 \cdot 10^3$ J/C $= 8,0 \cdot 10^{-16}$ J, die Geschwindigkeit $v = \sqrt{2W_{\text{kin}}/m_e} = 4,2 \cdot 10^7$ m/s und den Impuls $p = m_e v = \sqrt{2Um_e} = 3,8 \cdot 10^{-23}$ Ns, also nach Gl. (1) die kleine DE BROGLIE-Wellenlänge $\lambda_B = h/p = 6,63 \cdot 10^{-34}$ Nms/3,8 $\cdot 10^{-23}$ Ns $= 17,4 \cdot 10^{-12}$ m.

λ_B liegt im Röntgenbereich. Dort haben wir Wellenlängen durch **Bragg-Reflexion** an Kristallgittern gemessen. Der benutzte Grafitkristall hat nach **B2** zwei verschiedene Netzebenensysteme mit Abständen $d_a = 213$ pm und $d_b = 123$ pm. Man erwartet also nach der **Bragg-Gleichung**

$$\sin \varphi_n = k \cdot \lambda_B / (2d) \quad (2)$$

in der $k = 1$. Ordnung zwei Beugungsringe **B1**.

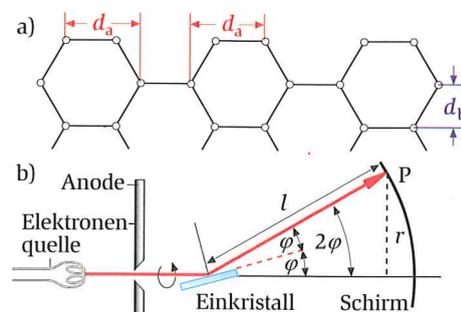
Hypothesen akzeptiert man in der Physik nur, wenn man sie im Experiment bestätigen kann. Dazu zeigt **B1** die Beugung von Elektronen an einer Grafit-Folie. Diese bekommen vorher durch die Spannung $U = 5,0$ kV den Impuls $p = 3,8 \cdot 10^{-23}$ Ns. Man erwartet also die de Broglie-Wellenlänge

$$\lambda_B = h/p = 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Nms} / 3,8 \cdot 10^{-23} \text{ Ns} = 17,4 \cdot 10^{-12} \text{ m.}$$

Sie wird an zwei Beugungsringen bestätigt.

Merksatz

Beugung und Interferenz gibt es auch bei Elektronen. Beim Impuls $p = m \cdot v$ ist deren de Broglie-Wellenlänge $\lambda_B = h/p$.



B2 a) Grafitgitter mit Netzebenenabständen d_a und d_b b) Bragg-Reflexion am Einkristall würde den Reflexpunkt P erzeugen. Im Grafit, einem Polykristall, sind die Kriställchen regellos gelagert. Es entstehen **Debye-Scherrer-Ringe** mit den Radien r .

Bei den kleinen Glanzwinkeln φ_n in **B2b** gilt $\sin 2\varphi \approx 2 \sin \varphi = r/l$. Nach Gl. 2 folgt in 1. Ordnung ($k = 1$) $2 \sin \varphi = r/l = \lambda_B/d$. Also berechnet man beim Ringradius r die Wellenlänge

$$\lambda_B = d \cdot r/l \text{ oder } r = l \cdot \lambda_B/d. \quad (3)$$

Nach $r = l \cdot \lambda_B/d$ erzeugt das Netzebenensystem mit dem größeren Abstand $d = 213$ pm den inneren Ring mit kleinerem Radius $r = l \cdot \lambda_B/d$ (bei gleichem λ_B). Der Schirmabstand ist $l = 0,135$ m.

Wir ordnen also zu:

a) Dem **inneren Ring** mit dem gemessenen Radius $r = 0,011$ m das größere $d = 213$ pm. Daraus folgt $\lambda_B = d \cdot r/l = 213 \text{ pm} \cdot 0,011 \text{ m} / 0,135 \text{ m} = 17,3$ pm.

b) Am **äußeren Ring** ($r = 0,019$ m) mit $d = 123$ pm ist $\lambda_B = d \cdot r/l = 123 \text{ pm} \cdot 0,019 \text{ m} / 0,135 \text{ m} = 17,3$ pm.

An beiden Ringen finden wir $\lambda_B \approx 17,3$ pm. Dies bestätigt die bei der Spannung $U = 5$ kV berechnete Wellenlänge $\lambda_B = 17,4 \cdot 10^{-12}$ m $= 17,4$ pm.

2. Kann man de Broglie-Wellen klassisch verstehen?

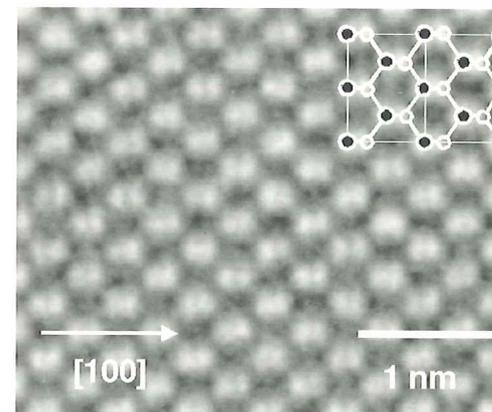
a) Schwingen die Elektronen im Elektronenstrahl periodisch gegeneinander, hin und her oder auf und ab? Bilden sie so eine Welle? Dagegen spricht, dass ihre Abstände viel größer sind als die de Broglie-Wellenlänge λ_B **Vertiefung**. So kann man sich keine Welle in dem uns vertrauten Sinn vorstellen.

Ist vielleicht schon jedes Elektron für sich eine schwingende, ausgedehnte Ladungswolke? Diese müsste sich bei der Beugung im Kristallgitter nach dem Huygens-Prinzip in unzählig viele Ladungswölkchen aufspalten. Man fand dies aber nie.

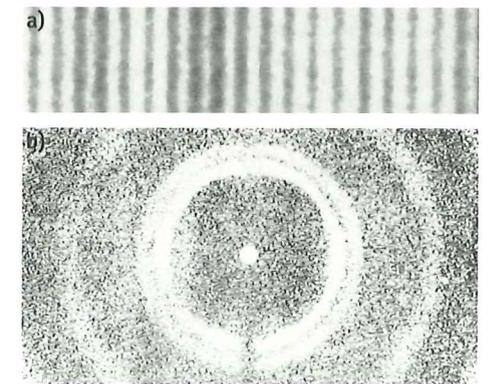
Wird eine periodische Wellenstruktur vielleicht von den periodisch angeordneten Atomen im Grafitkristall vorgetäuscht? Zur Klärung schickte C. JÖNSSON Elektronen durch einen im Vakuum aufgestellten Doppelspalt. Sie interferierten dort wie Licht und bestätigten die de Broglie-Wellenlänge $\lambda_B = h/p$ **B3a**.

Ersetzt man den Beobachtungsschirm durch ein Feld winziger Detektoren (wie in elektronischen Kameras), so erkennt man: Die Beugungsringe setzen sich aus *regellos verteilten Lokalisationen* der gebeugten Elektronen zusammen. **B3b** zeigt diese körnige Struktur. Was DIRAC über Photonen sagte, gilt auch hier: *Jedes Elektron interferiert mit sich selbst*. Deshalb betrachtet man auch die von DE BROGLIE postulierte Welle als **Ψ -Welle** für Wahrscheinlichkeitsamplituden Ψ . Die Analogie zu Photonen bestätigt der Vergleich von **B4a** mit **B4b**: Elektronen werden gebeugt wie die Photonen von Röntgenstrahlen.

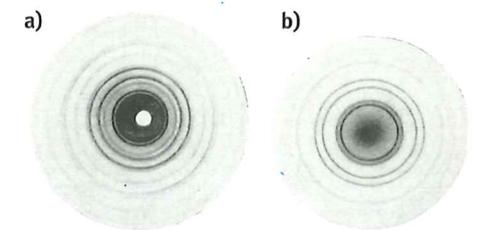
b) Nun verstehen wir, warum das **Elektronenmikroskop** viel kleinere Strukturen auflöst als das Lichtmikroskop **B5**. Bei beiden werden punktförmige Objekte nicht als Punkte, sondern als Beugungsscheibchen registriert. Einzelheiten mit Abständen, die größer als $\lambda/2$ sind, werden nicht aufgelöst. Beim Lichtmikroskop liegt die Grenze bei $\lambda_{\text{Licht}}/2 \approx 200$ nm. Bei Elektronen lässt sich jedoch die Geschwindigkeit v so steigern, $\lambda_B = h/(m \cdot v)$ so weit verkleinern, dass bei $\lambda_B/2 \approx 0,2$ nm atomare Dimensionen sichtbar werden. Dann erkennt man sogar Atome.



B5 Bild von Atomen eines GaAs-Kristalls im Elektronenmikroskop. Der Durchmesser eines Atoms beträgt ca. 0,2 nm.



B3 a) Stark vergrößertes Beugungsbild von Elektronen am Doppelspalt nach JÖNSSON (1960) b) Auch Neutronen werden wie Photonen gebeugt: Die körnige Struktur zeigt die zufällig verteilten Neutronentreffer.



B4 Beugungs-Ringe an Silberfolie: a) mit Elektronen erzeugt, b) mit Röntgenstrahlen

Vertiefung

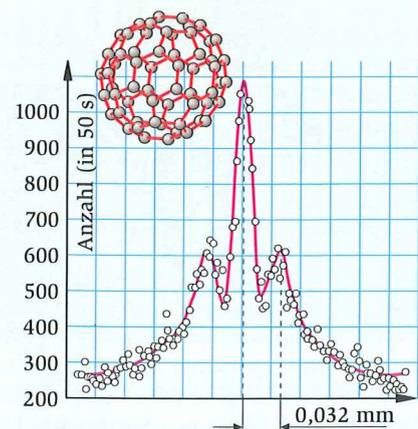
Elektronenabstände im Elektronenstrahl

Elektronen (Ladung $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C) bilden in **V1** einen Strahl mit Querschnitt $A = 1$ mm². Ihn durchfliegt bei der Stromstärke $I = 1$ mA in $t = 1$ s die Ladung $Q = I \cdot t = 10^{-3}$ C. Das sind $n = Q/e \approx 6 \cdot 10^{15}$ Elektronen.

Sie fliegen mit $v = 4,2 \cdot 10^7$ m/s, könnten also in 1 s einen Strahl der Länge $s = v \cdot t = 4,2 \cdot 10^7$ m bilden. Sein Volumen wäre $V = s \cdot A = 40$ m³. Dort steht jedem der n Elektronen das Volumen $V_1 \approx V/n \approx 7 \cdot 10^{-15}$ m³ zu. Wir betrachten es als Würfelchen mit Kantenlänge $d = \sqrt[3]{V_1} \approx 2 \cdot 10^{-5}$ m. Daraus ergibt sich der mittlere Elektronenabstand $d \approx 2 \cdot 10^{-5}$ m. Er ist ca. 10^6 mal so groß wie die DE BROGLIE-Wellenlänge $\lambda_B \approx 2 \cdot 10^{-11}$ m.

A1 Auch bei Protonen gilt $\lambda_B = h/p$. Man beschleunigt sie mit $U = 500$ kV. Berechnen Sie λ_B .

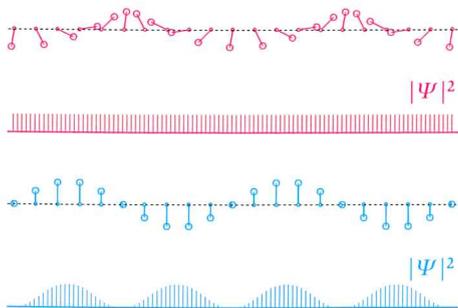
Interessantes



Eine Sensation: Auch Bälle interferieren

Die aus 60 C-Atomen bestehenden stabilen **Fullerenbälle** erwiesen sich als die bislang größten Quantenobjekte (Durchmesser 1 nm; $m = 1,2 \cdot 10^{-24}$ kg). Man schoss sie mit $v = 210$ m/s durch ein Gitter mit $g = 100$ nm. Sie erzeugten mit ihrer DEBROGLIE-Wellenlänge $\lambda_B = h/mv = 2,6 \cdot 10^{-12}$ m nach der Flugstrecke $a = 1,25$ m obiges Beugungsspektrum. Für den Winkel φ des 1. Maximums fand man (analog zu Licht) $\sin \varphi = 1 \cdot \lambda_B/g = 2,6 \cdot 10^{-5}$.

Sein Abstand von der optischen Achse war $x \approx a \cdot \sin \varphi = 0,032$ mm ($\sin \varphi \approx \tan \varphi = x/a$). Jeder Ball kam am Schirm unverseht an; er zerfiel an den vielen Gitterspalten nicht in seine 60 Atome. Offensichtlich betrachtet jeder Ball als Quantenobjekt *alle Spalte zugleich*; für ihn gilt die *Anordnung als Ganzes*. Folglich muss man wie bei Photonen die rotierenden Zeiger aller Rechenpfade durch alle Gitterspalte addieren.



B1 a) Rot: Bei fortschreitenden Wellen sind Zeigerlänge und Antreffwahrscheinlichkeit $|\Psi|^2$ konstant. b) Blau: Bei stehenden Wellen dagegen hat $|\Psi|^2$ die Periode $\lambda_B/2$. Dies gibt die Streifen in \rightarrow B2.

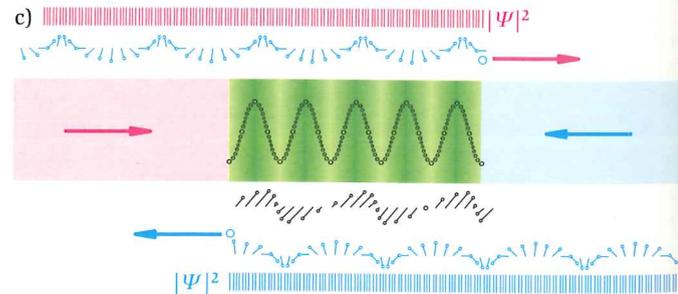
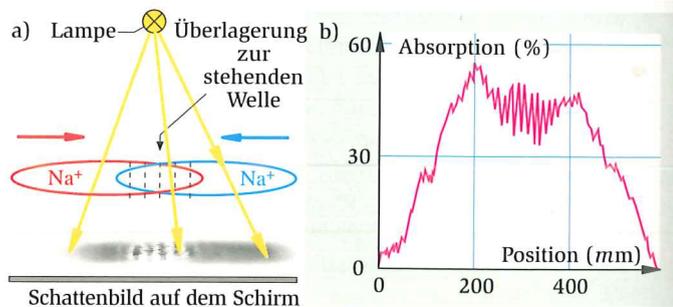
3. De Broglie-Wellen sichtbar gemacht!

W. KETTERLE (Nobelpreis 2001) machte de Broglie-Wellen sichtbar \rightarrow B2, \rightarrow Vertiefung. Er ließ zwei dichte Wolken aus Natrium-Ionen ($^{23}\text{Na}^+$; $m = 3,8 \cdot 10^{-26}$ kg) gegeneinander laufen, jede mit $v = 6 \cdot 10^{-4}$ m/s. Jede bildet eine *fortschreitende* de Broglie-Welle mit $\lambda_B = h/p = h/(m \cdot v) = 3 \cdot 10^{-5}$ m. Wo sich beide Wolken überlappen, entsteht eine *stehende Welle*. Dort zeigt das Schattenbild Interferenz-Streifen mit Abständen von $\lambda_B/2 = 1,5 \cdot 10^{-5}$ m. Solche fehlen im Bereich der fortschreitenden Wellen. Dies beschreiben wir mit rotierenden Zeigern, wie bei Photonen:

- In den *Bäuchen* der *stehenden* Welle sind die Zeiger lang \rightarrow B1; die Antreffwahrscheinlichkeit $|\Psi|^2$ der Ionen ist groß, sie liegen dicht beisammen und absorbieren das von oben einfallende Licht stark. Der Schirm dahinter zeigt dunkle Schattenstreifen.
- Die *Knoten* haben Abstände von $\lambda_B/2 = 1,5 \cdot 10^{-5}$ m; dort ist $|\Psi|^2 = 0$, Ionen fehlen; das Schattenbild zeigt helle Streifen.
- Wo sich dagegen die gegenläufigen *fortschreitenden* de Broglie-Wellen noch nicht überlappen sind Zeigerlänge und $|\Psi|^2$ konstant; das Schattenbild zeigt eine mittlere, konstante Helligkeit.

Stehende Schallwellen verhalten sich völlig anders. Ihre Teilchen schwingen hin- und her, bleiben aber im Mittel an ihren Plätzen und haben im Mittel eine konstante Dichte. Ein über längere Zeit aufgenommenes Schattenbild würde keine Streifen zeigen.

Dies bestätigt: Bei *Quantenobjekten* aller Art gibt die Länge der rotierenden Zeiger die Antreffwahrscheinlichkeit $|\Psi|^2$ von Teilchen an, kein Schwingen wie bei klassischen Wellen.



B2 a) Die Lampe entwirft von beiden gegenläufigen Ionenwolken Na^+ ein Schattenbild. Es ist dunkel, wo die Teilchen dicht liegen, wo ihre Antreffwahrscheinlichkeit $|\Psi|^2$ groß ist. b) $|\Psi|^2$ zeigt nur dort periodische Streifen, wo sich die Wolken überlappen. c) Die Länge der rotierenden Zeiger liefert $|\Psi|^2$, \rightarrow B1, \rightarrow c.

4. Die de Broglie-Welle beim Elektronenstrahl

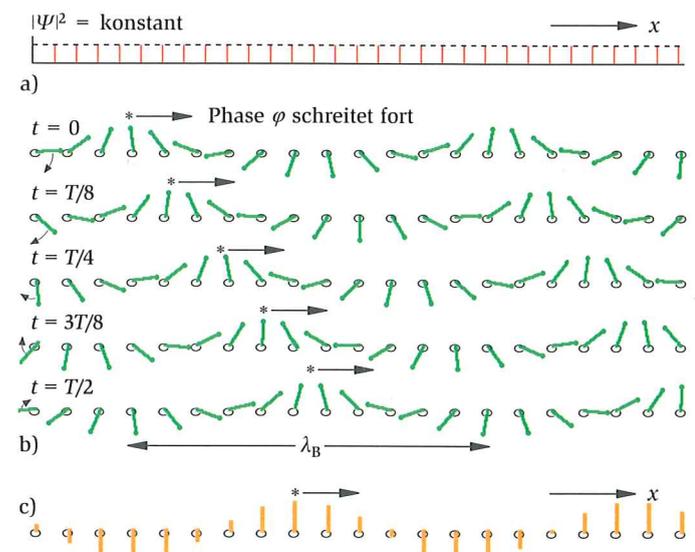
Ketterles Versuch zeigt: Quantenobjekte schwingen selbst in dichten Wolken nicht gegeneinander, so wie die Teilchen klassischer Wellen. Dies gilt auch für Elektronen in einem Strahl.

Selbst E. SCHRÖDINGER, der eine *Wellenmechanik* für Elektronen schuf und die berühmte *Schrödinger-Gleichung* aufstellte, musste zugeben, dass in de Broglie-Wellen die Elektronen nicht schwingen. Er schrieb, dass diese unsympathische Folgerung seiner Wellenmechanik eine gewisse Härte darstelle, die zu beseitigen ihm aber nicht gelingen wollte. Sie wurde aber experimentell bestätigt. Betrachten wir also Elektronen im Strahl der Beugungsröhre. Die dort gefundene *fortschreitende* de Broglie-Welle zeigt \rightarrow B3b in Zeitabständen von $T/8$:

- Die Antreffwahrscheinlichkeit $|\Psi(x)|^2$ für Elektronen ist konstant, die Zeiger der DEBROGLIE-Welle sind *gleich lang*. Man darf sie aber nicht mehr auf eine Gerade projizieren wie bei klassischen Längs- und Quer-Wellen \rightarrow B3c. Die Elektronen schwingen ja nicht wie dort auf und ab oder hin und her.
- Der Impuls $p = m \cdot v$ eines Elektrons bestimmt die de Broglie-Wellenlänge $\lambda_B = h/p$, also die *räumliche Periodizität* der Welle. Sie zeigt sich bei Interferenz und Beugung.
- Die Energie W bestimmt die Rotationsfrequenz $f = W/h$ der Zeiger (gemäß $W = h \cdot f$, also wie bei Photonen).

Merksatz

Der *Impuls* p von Quantenobjekten bestimmt die Wellenlänge $\lambda_B = h/p$ der fortschreitenden Ψ -Welle $\Psi(x, t)$. Die Länge der rotierenden Zeiger gibt die Antreffwahrscheinlichkeit $|\Psi|^2$ der Quantenobjekte und ist dort konstant. \square



B3 a) $|\Psi|^2$ längs Elektronenstrahl konstant; b) Fünf Momentbilder der nach rechts fortschreitenden DEBROGLIE-Welle in Abständen von $T/8$. c) Bei klassischen Querwellen liefert die Vertikal-Projektion der Zeiger Berge und Täler. Diese ist bei Ψ -Wellen nicht nötig.

Vertiefung

Vergleich Photon – Elektron

Photonen und Elektronen sind Quantenobjekte, gekennzeichnet durch die Planckkonstante h . Beide zeigen hinter schmalen Spalten Interferenz und Beugung mit der Wellenlänge $\lambda = h/p$.

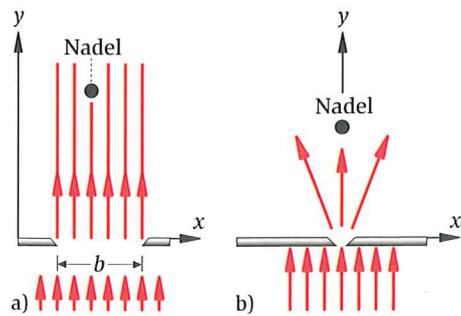
Zwischen den Quantenobjekten gibt es aber auch Unterschiede:

- *Elektronen*, aber auch *Protonen* und *Neutronen* sind Bestandteile der Materie. Sie können Lichtgeschwindigkeit weder erreichen noch überschreiten.
- *Photonen* dagegen gibt es nur „im Flug“ mit Lichtgeschwindigkeit. In sehr großer Zahl können sie klassische elektromagnetische Wellen bilden. Dort schwingen *E*- und *B*-Vektoren. Deren Verlauf kann man mit Dipolen am Oszilloskop betrachten. Radiowellen sind also klassische Wellen. Solche Wellen gibt es bei Elektronen, Protonen und Neutronen nicht.
- Insgesamt gesehen gilt: Photonen verhalten sich nie wie fliegende klassische Teilchen im Sinne der Newton-Mechanik, Elektronen nie wie klassische Wellen. Dies widerspricht der oft gehörten *dualistischen* Aussage, Quantenobjekte verhielten sich mal wie Teilchen, mal wie Wellen. Quantenobjekte sind eben etwas anderes, der klassischen Physik fremd.

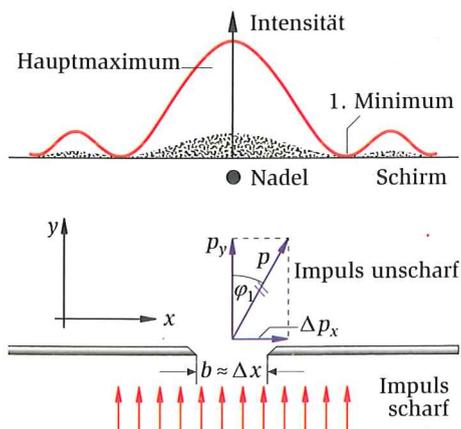
- Im KETTERLE-Experiment bilden die Ionen des Isotops $^{23}\text{Na}^+$ nahe dem absoluten Nullpunkt 0 K ein **Bose-Einstein-Kondensat**. Bei $T < 10^{-6}$ K (!) ist der Impuls p ihrer thermischen Bewegung klein, $\lambda_B = h/p$ groß. Dann überdeckt ihre Ψ -Funktion ca. 10^{15} Ionen und formt sie zur Ψ -Welle von etwa 1 mm Ausdehnung zu einem *Ganzen*.

A1 Was deutet bei Interferenz mit Quantenobjekten auf ein Wellen-, was auf ein Teilchenbild? Was ist jeweils anders als bei klassischen Teilchen bzw. Wellen?

A2 Elektronen, die mit $U = 50$ kV beschleunigt wurden, werden auf einen kubischen Einkristall mit Netzebenenabstand 282 pm geschossen. Bestimmen Sie die Winkel, unter denen sie reflektiert werden. Zeichnen Sie eine Experimentieranordnung. Was ist bei Polykristallen anders, etwa bei feinkörnigem Grafit?



B1 a) Die meisten Photonen des breiten Laserbündels treffen die Nadel nicht. Die große Spaltbreite b gewährt eine zu große Unbestimmtheit $\Delta x \approx b$ in der Ortskoordinate x quer zum Strahl. b) Verkleinert man die Spaltbreite b und damit Δx , so gibt Beugung den Photonen unbestimmte Richtung, macht die Querimpulse p_y unbestimmt. Die Nadel wird noch seltener getroffen.



B2 Im Spalt mit Breite b ist die Orts-Unbestimmtheit $\Delta x \approx b$. Beugung gibt den Quantenobjekten Querimpulse p_x . Als deren Unbestimmtheit Δp_x sah HEISENBERG näherungsweise den Impulsbetrag $|p_x|$ an, der klassische Teilchen zum 1. Beugungsminimum beim Winkel φ_1 führen würde. Mit $p = h/\lambda$ gilt für dieses Minimum nach obiger Skizze

$$\sin \varphi_1 \approx \frac{\Delta p_x}{p} = \frac{\lambda \cdot \Delta p_x}{h} \quad (1)$$

Nach der Wellenoptik gilt

$$\sin \varphi_1 = \lambda/b \quad (2)$$

Mit $b \approx \Delta x$ folgt $\sin \varphi_1 = \frac{\lambda}{\Delta x}$ und mit Gl. 1

$$\frac{\lambda \cdot \Delta p_x}{h} \approx \frac{\lambda}{\Delta x}, \text{ also } \Delta x \cdot \Delta p_x \approx h. \quad (3)$$

1. Unbestimmt bei Quantenobjekten, präzise gefasst

An Doppelspalt und Knallertest haben wir das Wort „unbestimmt im Quantensinn“ verdeutlicht. Um es präziser zu fassen betrachten wir in Gedanken die zahlreichen Photonen eines Laserstrahls, der einen Einzelspalt durchsetzt. Dahinter steht eine Nadel \rightarrow B1a.

- Im Strahl großer Breite b gibt es viele Möglichkeiten für die Orte x , an denen man Photonen nachweisen könnte; deren x -Werte sind *unbestimmt*. Erst wenn ein Photon die Nadel trifft wird ein x -Wert *zufallsbedingt* realisiert, als x -Wert gemessen. Vor der Ortsmessung gibt es keine bestimmten x -Werte; in der Spaltöffnung hat die **Unbestimmtheit des Orts** x den Wert $\Delta x \approx b$.
- In \rightarrow B1a sind viele Photonen so präpariert, dass ihr Impuls \vec{p} in y -Richtung zeigt. Quer dazu ist die x -Komponente $p_x \approx 0$. Man sagt: Der Querimpuls p_x dieser Photonen ist bestimmt; für die **Unbestimmtheit von p_x** gilt hier $\Delta p_x \approx 0$.

2. Heisenbergs Unbestimmtheitsrelation (UBR)

Für den Zusammenhang von Δx und Δp_x gab 1927 W. HEISENBERG (Nobelpreis 1932) eine über die Spaltbeugung hinausgehende, allgemeingültige Beziehung für alle Quantenobjekte, die berühmte Heisenberg'sche Unbestimmtheitsrelation

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \approx h. \quad (4)$$

Diese fundamentale Aussage veranschaulichte er am Beugungsspalt \rightarrow B2: Verkleinert man dessen Breite b , so auch die Orts-Unbestimmtheit $\Delta x \approx b$. Folglich erzeugt Beugung größere, zufallsbedingt verteilte Querimpulse p_x in x -Richtung. Das von zahlreichen Photonen gebildete Beugungsbild wird breiter \rightarrow B2. Die Impuls-Unbestimmtheit Δp_x wird größer.

Am Spalt mit Breite $b = 10^{-6}$ m ist die Unbestimmtheit des Orts $\Delta x \approx 10^{-6}$ m, die Unbestimmtheit der Querimpulse ist nach Gl. 4

$$\Delta p_x \approx \frac{h}{\Delta x} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}}{10^{-6} \text{ m}} \approx 7 \cdot 10^{-28} \text{ kg m s}^{-1}.$$

Verkleinert man die Orts-Unbestimmtheit Δx , so wächst die Impuls-Unbestimmtheit $\Delta p_x \approx h/\Delta x \rightarrow$ B1b. Auch bei Idealmessungen an vielen Quantenobjekten, die einheitlich präpariert wurden, streuen die Werte von x und p_x in den Bereichen Δx und Δp_x . Trotzdem kann man die *klassischen Begriffe* Ort und Impuls benutzen. Wiederholt man nämlich eine Messung, bei der ein Objekt den Ortswert x annahm, sofort am gleichen Objekt (falls möglich), so wird x bestätigt. Unbestimmtheiten sind also keine Messfehler, sondern fundamentale Quanteneigenschaften.

Grenzfälle: Bei einem bestimmten Ort x ($\Delta x \rightarrow 0$) geht die Unbestimmtheit im x -Impuls p_x gegen unendlich: $\Delta p_x \approx h/\Delta x \rightarrow \infty$.

Aus $\Delta p_x \rightarrow 0$ folgt umgekehrt $\Delta x \approx h/\Delta p_x \rightarrow \infty$.

Nie sind bei Quantenobjekten Ort und Impuls *zugleich* bestimmt; nie gilt bei vielen Messungen $\Delta x = 0$ und zugleich $\Delta p_x = 0$.

Merksatz

Heisenbergsche Unbestimmtheitsrelation (UBR): Orte und Impulse sind vor der Messung in bestimmten Grenzen unbestimmt. Messungen der Orte x und der Impulse p_x zeigen bei vielen Quantenobjekten Streuungen Δx und Δp_x gemäß $\Delta x \cdot \Delta p_x \approx h$. □

3. Experimente zur Unbestimmtheit, Welcher-Weg-Frage

a) In der Wellenoptik haben wir an einem Glimmerblatt die Länge l_k von Wellenzügen gemessen, die Quecksilber-Hochdrucklampen aussenden \rightarrow B3. Man hat festgestellt, dass diese mit jedem Wellenzug auch ein Photon emittieren. Im Wellenzug der Länge l_k hat es die Ortsunbestimmtheit $\Delta x \approx l_k$.

Um die UBR zu prüfen, messen wir zunächst $\Delta x \approx l_k$. Dazu lassen wir die Wellenzüge nach \rightarrow B4 an Vorder- und Rückseite des Glimmerblatts mit Dicke $d = 7 \cdot 10^{-5}$ m reflektieren. Es spaltet in zwei Teile auf. Beide laufen zum Schirm und erzeugen Interferenzstreifen, aber nur während vier Minuten nach Einschalten der Lampe.

Wird diese heißer, so prasseln die schneller werdenden Quecksilberatome häufiger gegeneinander. So unterbrechen sie die Ausbreitung eines Wellenzug früher; sie verkürzen dessen Länge l_k , also Δx . Sinkt l_k unter die doppelte Blattdicke $2d$, so beginnen beide Teilwellenzüge hintereinander her zu laufen, sich nicht mehr zu überlappen. Die Interferenzstreifen weichen gleichmäßiger Helligkeit. Die Länge l_k der Wellenzüge, also die *Unbestimmtheit Δx der Photonorte* x im Wellenzug beträgt jetzt

$$\Delta x \approx l_k \approx 2d = 2 \cdot 7 \cdot 10^{-5} \text{ m} = 14 \cdot 10^{-5} \text{ m}.$$

Zur gleichen Zeit verlieren die beiden gelben Linien mit $\lambda_1 = 576,95$ nm und $\lambda_2 = 578,97$ nm ihre Schärfe. Sie fließen ineinander \rightarrow B4b. Dies gilt auch für die Photonen-Impulse $p_1 = h/\lambda_1 = 1,148 \cdot 10^{-27}$ Ns und $p_2 = h/\lambda_2 = 1,144 \cdot 10^{-27}$ Ns. An den Photonen messen wir jetzt die *Impuls-Unbestimmtheit*

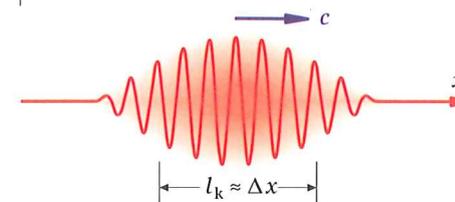
$$\Delta p_x \approx p_2 - p_1 = 0,004 \cdot 10^{-27} \text{ Ns}.$$

Das Produkt $\Delta x \cdot \Delta p_x = 14 \cdot 10^{-5} \text{ m} \cdot 0,004 \cdot 10^{-27} \text{ Ns} \approx 6 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$ ist die Planck-Konstante $h = 6,6 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$. Dies bestätigt die UBR.

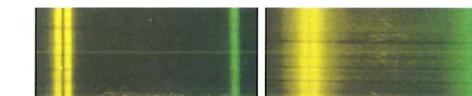
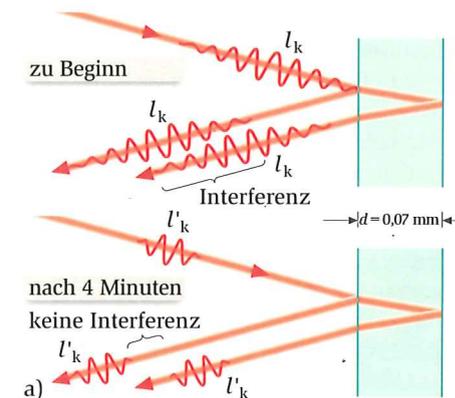
Wir erfahren noch mehr: So lange sich beide Teilwellenzüge überlappen, ist unbestimmt, ob das Photon an Vorder- oder Rückseite reflektiert wird, welchen Weg es nimmt. Die vom Knallertest bekannte *Welcher-Weg-Frage* ist nicht beantwortbar; es gibt Interferenz. Die Interferenz erlischt jedoch, wenn sich die Wellenzüge nicht mehr überlappen und damit der Photonenweg bestimmbar, die *Welcher-Weg-Frage* im Prinzip beantwortbar ist.

b) Nach \rightarrow B5 durchsetzen Helium-Atome einen Doppelspalt. Er werde von der Lampe L beleuchtet, um zu erfahren, ob ein Atom durch Spalt 1 oder 2 tritt. Doch kann man dies nur dann feststellen, d. h. den Spaltabstand g optisch auflösen, falls $\lambda/2$ vom Licht kleiner als g ist, falls $\lambda/2 < g$ gilt. Dann kann man erfahren, ob das Heliumatom den Weg durch Spalt 1 oder 2 nimmt: Man kann die *Welcher-Weg-Frage* beantworten.

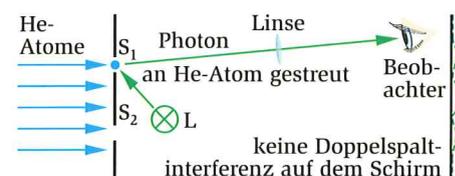
Doch stoßen dabei die Photonen des Lichts mit ihrem Impuls $p = h/\lambda > h/2g$ auf die Helium-Atome und werfen sie aus ihrer Bahn. Rechnungen (analog zum Compton-Effekt) zeigen: Sobald die *Welcher-Weg-Frage* bei kleiner werdendem λ beantwortbar ist, sind die Stöße so stark, ist $p = h/\lambda$ so groß, dass sich Hell- und Dunkelstellen der Doppelspalt-Interferenz gegenseitig verwischen; diese Interferenz entfällt. Dann gibt es Einzelspalt-Interferenz. Man kann also das Wellenbild nicht zu Gunsten des Teilchenbilds aufgeben.



B3 Die Länge l_k des Lichtwellenzugs gibt die Unbestimmtheit Δx des Photonorts in Strahlrichtung an.

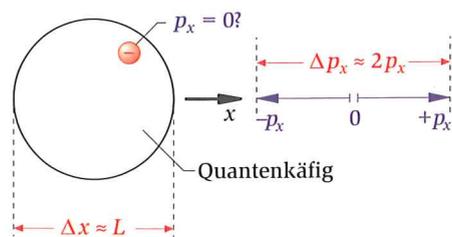


B4 a) Wenn die Länge der Wellenzüge $l_k < 2d$ ist, interferieren die beiden Teilwellenzüge (1) und (2) nicht mehr miteinander. b) Dann fließen die gelben, verbreiterten Spektrallinien ineinander.



B5 Das Prinzipbild zeigt: He-Atome durchsetzen den Doppelspalt. Von der Lampe L gehen Photonen aus (grün). Sie zeigen, dass hier das blaue Helium-Atom durch Spalt 1 tritt und somit sein Weg bestimmt ist. Doch ist dann die Doppelspaltinterferenz zerstört und in Einzelspaltinterferenz überführt.

A1 Berechnen Sie die Impulsunbestimmtheit in Querrichtung für Photonen mit $\lambda = 600$ nm hinter einem 1 cm breiten Schlüsseloch bzw. einem 0,01 mm dicken Loch (in Prozent des Impulses in Ausbreitungsrichtung).



B1 a) Das Atom, ein kleiner „Quantenkäfig“,
b) Impuls zwischen $-p_x$ und $+p_x$.

Philosophisches

Was heißt unbestimmt?

Die UBR zeigt, dass im Mikrokosmos Ort x und Impuls p_x nie zugleich bestimmt sind. Sie können nicht einem Quantenobjekt als real existierend zugesprochen werden, sie sind nicht objektivierbar; nach HEISENBERG sind sie nicht definiert. Erst beim Messen kann der Ort x oder der Impuls p_x einen bestimmten Wert annehmen, den er i.a. vorher nicht hatte.

Im Kontrast dazu war der Franzose P. LAPLACE (um 1850) von der streng berechenbaren, deterministischen Mechanik NEWTONS fasziniert, die damals die Physik bestimmte. Er erläuterte dies mit der grandiosen Vision eines allwissenden „Dämons“:

„Wir müssen den jetzigen Zustand des Weltalls als Wirkung der früheren Zustände und als Ursache aller folgenden betrachten. Ein Dämon möge in einem Augenblick alle Kräfte der Natur sowie die Lage und die Geschwindigkeit [den Impuls] aller Teilchen kennen. Könnte er all diese Daten verarbeiten, so wäre er fähig, die Bewegung der größten Körper des Weltalls wie auch der kleinsten Atome vorherzusagen. Für ihn wäre nichts unbestimmt, Zukunft und Vergangenheit lägen offen vor ihm.“

Die UBR entzieht exakten Voraussagen im Sinne strenger **Kausalität** den Boden (*causa*, lat. Ursache). Herrscht damit der blinde Zufall? Diesen lehnte EINSTEIN ab. Er hielt die Quantentheorie nicht für vollständig:

„Die Quantentheorie ist sehr Achtung gebietend. Aber eine innere Stimme sagt mir, dass das doch nicht der wahre Jakob ist. Die Theorie liefert viel, aber dem Geheimnis des Alten bringt sie uns kaum näher. Jedenfalls bin ich überzeugt, dass Gott nicht würfelt.“

1. Energetische Insassen in winzigen Quantenkäfigen

a) Wir wagen nun einen Blick in die Welt der *Atome*. Ihren Aufbau kennen wir noch nicht genau, wissen aber, dass dort Elektronen in Bereiche mit Durchmesser $L \approx 3 \cdot 10^{-10}$ m eingeschlossen sind. Mit Hilfe der UBR können wir also sagen: Nach **B1** ist die Unbestimmtheit der x -Koordinate $\Delta x \approx L$.

Wäre ein Elektron in Ruhe, so hätte es den bestimmten Impuls $p_x = m_e \cdot v = 0$, dessen Unbestimmtheit wäre $\Delta p_x = 0$, was die UBR $\Delta x \cdot \Delta p_x \approx h$ verletzt. Nach ihr ist $\Delta p_x \approx h/\Delta x \approx h/L > 0$; die Impulsbeiträge streuen also um $p_x = 0$ zwischen $-h/(2L)$ und $+h/(2L)$
→ **B1b**. Wegen $v_x = p_x/m_e \approx h/(2 \cdot m_e L)$ ist die kinetische Energie

$$W_{\text{kin}} = \frac{1}{2} \cdot m_e \cdot v_x^2 \approx \frac{h^2}{8 m_e L^2}.$$

Diese Energie ist für uns neuartig. Da sie von h abhängt ist sie quantentheoretisch bedingt, gültig für alle Quantenobjekte. Sie heißt **Lokalisationsenergie** W_L . Nach ihr „toben“ Quantenobjekte umso stärker, je kleiner ihre Masse m und je enger der „Quantenkäfig“ ist, in den sie aus irgendeinem Grund eingeschlossen sind.

Merksatz

Quantenobjekte mit Ruhemasse m , die auf Bereiche der Länge L eingegengt sind, haben die Lokalisationsenergie

$$W_L \approx \frac{h^2}{8 m L^2}. \tag{1}$$

Diese Lokalisationsenergie gilt zunächst für die Atome. Bei deren Durchmesser $L \approx 3 \cdot 10^{-10}$ m beträgt sie etwa

$$W_L \approx \frac{h^2}{8 m_e L^2} = \frac{(6,63 \cdot 10^{-34})^2 (\text{kg m}^2 \text{s}^{-1})^2}{8 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot (3 \cdot 10^{-10} \text{ m})^2} \approx 7 \cdot 10^{-19} \text{ J} \approx 4 \text{ eV}. \quad \square$$

b) Dieser winzige Betrag wirkt sich auch in unserer makroskopischen Welt aus. Wir schätzen damit die Energie ab, die bei *chemischen Prozessen* frei wird. Diese rührt von Elektronen in der Atomhülle. Multipliziert man W_L mit der Zahl $N_A = 6 \cdot 10^{23}$ der Atome je mol (bei Kohlenstoff 12 g), so erhält man $W_M \approx 400$ kJ/mol. Die *Verbrennungswärmen* von Kohle, Öl, Butter, Alkohol, Benzin liegen bei 350 kJ/mol. Viel mehr kann man bei Prozessen, die sich in der Atomhülle abspielen, nicht holen, also nicht aus chemischen Prozessen und nicht aus Sprengstoffen.

c) In *Atomkernen* ist der Aufenthaltsbereich mit $L \approx 10^{-14}$ m ca. 10^5 -mal so klein wie in der Atomhülle. Lokalisationsenergie und Energieumsetzungen sind nach Gl. 1 viel größer. In Unkenntnis dessen nahm man vor der Entdeckung des *Neutrons* an (um 1930), ein Kohlenstoffkern (C-12) enthalte 12 Protonen und 6 Elektronen. Doch sagte HEISENBERG: Elektronen haben im Kern wegen ihrer kleinen Masse die viel zu große Lokalisationsenergie von ca. 10^4 MeV. Wenn sie bei Kernumwandlungen im Kern entstehen, so verlassen sie diesen sofort, trotz der Anziehung durch die positive Kernladung. Wir kennen dies vom radioaktiven Zerfall, wenn β -Teilchen, also Elektronen, den Kern verlassen.

Nach Entdeckung des *Neutrons* sagte HEISENBERG: Im $^{12}_6\text{C}$ -Kern sind keine Elektronen, sondern 6 Protonen und 6 Neutronen. Deren Masse m ist ca. 2000-mal so groß wie bei Elektronen. Die zum Verlassen des Kerns antreibende Lokalisationsenergie von ca. $W_L \approx 2$ MeV bleibt klein (m steht in Gl. 1 im Nenner). Zudem sind Protonen und Neutronen von Kernkräften mit ca. 8 MeV an den Kern gebunden. $^{12}_6\text{C}$ -Kerne sind stabil.

Merksatz

Die Lokalisationsenergie $W_L \approx h^2/(8 \cdot m_e L^2)$ von Elektronen beträgt in der Atomhülle einigen eV, im Atomkern viele MeV. Im Kern können sich Teilchen großer Masse aufhalten, Neutronen und Protonen, nicht aber Elektronen. Diesen ist die Atomhülle vorbehalten. \square

3. Quantenobjekte laufen nicht auf bestimmten Bahnen

Wer den Bahnverlauf eines Körpers exakt angibt, macht präzise Aussagen über Ort x und Impuls $p_x = m \cdot v_x$. Er setzt $\Delta x = 0$ und zugleich $\Delta p_x = 0$, so wie die Physik vor 1927. Dem widersprach HEISENBERG mit seiner UBR für atomare Bereiche. Dort ist der Bahnbegriff illusorisch. Man kann nicht sagen, Elektronen umkreisen den Atomkern → **B2**. Dagegen ist in makroskopischen Bereichen die UBR ohne Belang → **Beispiele**.

4. Stabile Atome haben eine bestimmte Energie

Der Glimmerblattversuch zeigte: Steigt die Temperatur der Quecksilberdampfampe, so prallen ihre Atome häufiger gegeneinander. Wie wir gemessen haben, verkürzt dies die von ihnen ausgehenden Wellenzüge. Diese häufigen Stöße verkürzen also die Zeit Δt , in der die Atome die Möglichkeit haben, ihre Energie als Photon ungestört in einem Wellenzug abzugeben. Weil sich dabei die Spektrallinien verbreitern, nimmt die Unbestimmtheit Δf der Lichtfrequenz f zu und damit die Unbestimmtheit $\Delta W = h \cdot \Delta f$ der Photonenergie $W = h \cdot f$. Verkürzt man also die Emissionszeit Δt der Photonen, so wächst die Unbestimmtheit ΔW ihrer Energie.

Dies gilt allgemein: Stört man Quantenvorgänge, bricht man Quantenzustände ab, verkürzt deren „Lebensdauer“ Δt , so wird die Unbestimmtheit ΔW der Energie groß. Analog zur UBR $\Delta x \cdot \Delta p_x \approx h$ gilt eine Relation zwischen der Lebensdauer Δt eines Quantenzustands und der Unbestimmtheit ΔW seiner Energie. Sie lautet

$$\Delta t \cdot \Delta W \approx h.$$

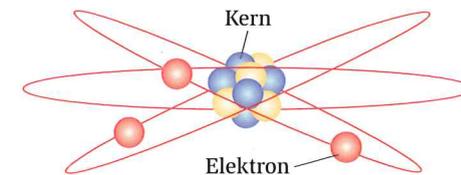
Solange in einem Atom nichts geschieht, spielt die Zeit keine Rolle; es befindet sich in einem **stationären Quantenzustand**. Für dessen Lebensdauer gilt im Idealfall $\Delta t \rightarrow \infty$. Daraus folgt für die Unbestimmtheit der Energie $\Delta W \approx h/\Delta t \rightarrow 0$. Die Energie ist also in stationären Zuständen scharf bestimmt.

Merksatz

Zwischen der Lebensdauer Δt eines Quantenzustands und der Unbestimmtheit ΔW seiner Energie gilt die Relation

$$\Delta t \cdot \Delta W \approx h.$$

Atome haben in stationären Zuständen ($\Delta t \rightarrow \infty$) eine bestimmte Energie ($\Delta W \rightarrow 0$). \square



B2 Dieses Bild des Atoms ist falsch; Atome sind keine Planetensysteme im Kleinen!

Beispiele Wo spielt die UBR eine Rolle?

a) Ein Schützenkönig schießt mit ruhiger Hand eine Kugel ($m = 10$ g) mit $v = 500$ m/s ab, mit winziger Ortsunbestimmtheit $\Delta x = 10^{-10}$ m quer zur Schussrichtung. Die Unbestimmtheit vom Querimpuls p_x ist

$$\Delta p_x \approx \frac{h}{\Delta x} \approx \frac{6,6 \cdot 10^{-34} \text{ Nms}}{10^{-10} \text{ m}} \approx 7 \cdot 10^{-24} \text{ Ns},$$

von der Quergeschwindigkeit $\Delta v_x = \Delta p_x/m \approx 7 \cdot 10^{-22}$ m/s. Nach 1 s Flug, nach 500 m, ist die nach der UBR zu erwartende Abweichung ca. 10^{-22} m. Für Fehlschüsse kann man die UBR nicht haftbar machen!

b) Beim *Elektron* im Atom ist $\Delta x \approx 10^{-10}$ m, also $\Delta p_x \approx h/\Delta x = 6,6 \cdot 10^{-24}$ Ns, wie bei der Kugel in (a). Da die Masse $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg klein ist, wird die Unbestimmtheit der Geschwindigkeit $\Delta v_x = \Delta p_x/m = 7 \cdot 10^6$ m/s. Wegen dieses großen Werts kann man von Elektronenbahnen in Atomen nicht sprechen.

c) In Fernschröhren erhalten Elektronen bei $U = 10^4$ V den Impuls $p_y = \sqrt{2em_e U} = 5 \cdot 10^{-23}$ Ns. Im Anodenloch von 0,1 mm Durchmesser entstehen Querimpulse von $\Delta p_x \approx h/\Delta x \approx 7 \cdot 10^{-30}$ Ns. Deshalb weitet sich auf der Flugstrecke $l = 0,5$ m der Strahl seitlich nur um $\Delta s = l \cdot \Delta p_x/p_y \approx 6 \cdot 10^{-8}$ m auf. Die UBR beeinträchtigt die Bildschärfe nicht.

A1 Berechnen Sie die DE BROGLIE-Wellenlänge von Protonen, die mit 500 kV beschleunigt wurden ($m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg), und von Staubkörnchen ($m_s = 10^{-12}$ g) mit $v = 300$ m/s? Welche Ablenkung erfahren beide in einem Gitter mit der Konstanten $g = 1 \mu\text{m}$ in 1 m Entfernung in der 1. bzw. 10. Ordnung? Was folgern Sie für die klassische Mechanik?

A2 Welchen Durchmesser müsste ein Käfig haben, in dem ein Staubkorn von 10^{-12} g Masse 1 eV Lokalisationsenergie aufweist?

A3 Leiten Sie aus $\Delta x \cdot \Delta p_x \approx h$ die Relation $\Delta t \cdot \Delta W \approx h$ her, indem Sie die Unbestimmtheit des Impulses der Photonen in einem Wellenzug betrachten, der über den W-Messer läuft.

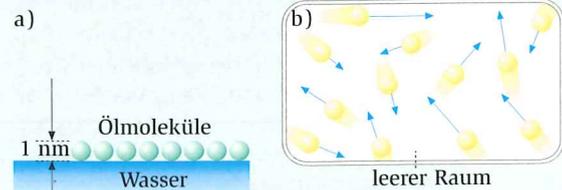
Interessantes

A. Das Atom, ein philosophisches Problem

Schon vor 2500 Jahren dachte man über den Aufbau der Materie nach, ohne zu experimentieren. Der Grieche DEMOKRIT sagte: So wie sich Sandsteine aus Körnern zusammensetzen, besteht Materie aus *Atomen*, die nicht weiter teilbar sind (atomos: unteilbar). Dagegen hielt ARISTOTELES die Stoffe für beliebig teilbar, so wie man es an Wasser zu sehen glaubt.

Der Philosoph KANT (1770) sah ein *logisch* unlösbares Problem: Wären Atome unteilbar, so dürften sie kein Volumen haben, auch nicht die daraus zusammengesetzte Materie. Nähmen sie aber Raum ein, so wären sie teilbar. Wie entgeht die Physik diesem Widerspruch?

B. Das Atom in den Naturwissenschaften



B1 a) Die monomolekulare Ölschicht ist 1 nm dick. b) Frei schwirrende Gasmoleküle beanspruchen Raum.

a) Verteilt sich ein Tropfen Öl auf Wasser, so bildet er nie eine Schicht, die dünner ist als 1 nm → **B1a**. Dies ist die Dicke der aneinander gereihten Ölmoleküle, die auf Wasser schwimmen.

b) BERNOULLI löste KANTS Frage 1740 an Gasen durch *Bewegung*: Gasmoleküle fliegen so schnell, dass sie trotz ihres winzigen Volumens große, materiefreie Räume zwischen sich beanspruchen → **B1b**.

c) Die Quantentheorie beantwortet Kants Frage auch in Festkörpern mit der UBR $\Delta x \cdot \Delta p_x \approx h$. Nach ihr kann weder die Unbestimmtheit des Orts (Δx) noch die des Impulses (Δp_x) zugleich Null sein. Quantenobjekte brauchen Aufenthaltsbereiche ($\Delta x > 0$) und Impulse ($\Delta p_x > 0$). Würde den Teilchen kein Raum zur Verfügung stehen, so wäre die *Lokalisationsenergie* $W_L \approx h^2 / (8 \cdot m \cdot L^2)$ riesig; aus $L \rightarrow 0$ folgt $W_L \rightarrow \infty$.

d) DALTON erklärte um 1800 die chemischen Gesetze der *konstanten und multiplen Proportionen* mit Atomen. Sie wurden zum „unteilbare Rechenpfennig“ der Chemiker. Physiker erforschten Atome viel später:

e) Um 1893 fand Ph. LENARD (Nobelpreis 1905), dass Elektronen feste Körper durchdringen können. Bei der Elektronenbeugung sahen wir in der Mitte der Beugungsringe einen scharfen Lichtfleck. Er stammt von Elektronen, welche die Grafitfolie unabgelenkt durchsetzt haben, also Milliarden von Atomen.

f) Von LENARD angeregt sah 1897 der Engländer J. J. THOMSON das Atom als kontinuierlich verteilte, lockere

Wolke *positiver* Ladung an, gespickt mit Elektronen, wie Rosinen im Kuchen. Diese sollten die Wolke positiver Ladung zusammenhalten. Man sah Atome als *teilbar* an → **B2**.

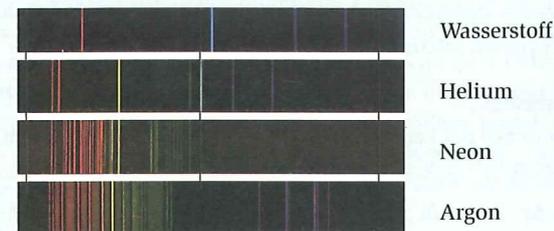
g) PLANCK polemisierte noch 1896 gegen den überzeugten Atomisten BOLTZMANN. Er sah Widersprüche zwischen der *Atomistik* und den „ehernen Gesetzen“ der klassischen Physik (Mechanik, Wärme- und Elektrizitätslehre, Optik). Doch überwand er sie. Am 19. Dez. 1900 trug er sein „in einem Akt der Verzweigung“ gefundenes **Strahlungsgesetz** vor, das die Intensitätsverteilung von Glühlicht korrekt beschreibt. Mit seiner Konstanten h teilte er die Energie atomarer Schwinger mit Frequenz f in Quanten der Größe $W = h \cdot f$ auf. Dies war die Geburtsstunde der Quantenphysik.

h) Ernst MACH fragte noch um 1900 jeden, der von Atomen sprach: „Haben Sie schon eines gesehen?“

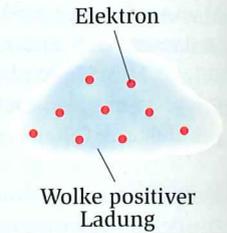
j) Erst 1905 überzeugte Albert EINSTEIN die physikalische Fachwelt von der Existenz der Atome durch seine Theorie der brownischen Bewegung. Zudem übertrug er Plancks Energiequanten auf Licht.

k) 1911 zeigte → **RUTHERFORD**, wie Atome aufgebaut sind. Er schoss *positiv* geladene α -Teilchen auf Goldfolien → **B3**. Da nur wenige zurückgestoßen wurden, folgerte er: Die Atommasse ist fast ganz auf einen winzigen, *positiv* geladenen *Kern* konzentriert, auf 1/100 000 vom Atomradius. Elektronen sollten den Kern umkreisen, so wie Planeten die Sonne. Doch bleiben viele Fragen offen:

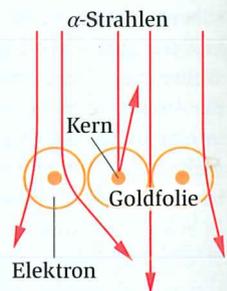
- Warum ist das Innere der Atome fast leer?
- Warum stürzen die Elektronen nicht in den Kern?
- Warum sind die locker gebauten Atome stabil?
- Wie groß sind die Atome?



B4 Spektren einiger Gase



B2 Teilbares Atom



B3 RUTHERFORD-Experiment

Interessantes

C. Das bohrsche Modell als Vorläufer

Den ersten, ernst zu nehmenden Versuch, obige Fragen zu klären, unternahm 1913 der Däne Niels BOHR. Dabei enträtselte er die Spektren des *Wasserstoffatoms* → **B4**. Er sagte: Das Elektron mit Ladung $-e$ laufe auf einem Kreis mit Radius r um das Proton p mit Ladung $+e$, da es von ihm angezogen wird. Dieses Gedanken-Modell konnte er mit den Gesetzen der klassischen Physik berechnen. Doch musste er zusätzliche Annahmen postulieren, die von der Quantentheorie und von Experimenten teils präzisiert, teils verworfen wurden. Verfolgen wir sein Vorgehen kritisch:

a) Die → **Coulombkraft** $F_C = e^2 / (4\pi\epsilon_0 r^2)$ zwischen Kern und Elektron erzeugt die für Kreisbahnen mit Radius r nötige Zentripetalkraft $F_z = m_e v^2 / r$. Auf diesen **bohrschen Bahnen** sollte also gelten

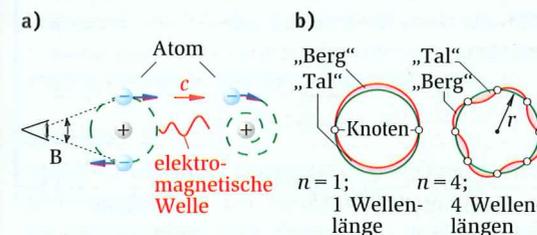
$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{m_e v^2}{r} \quad (1)$$

r und v sind noch unbekannt, Das Atom soll eine *Scheibe* sein, keine Kugel. Von der Seite gesehen würde das Elektron hin- und her schwingen wie im hertzchen Dipol. Es müsste ständig Energie abstrahlen und würde in den Kern stürzen → **B5a**. Längst wäre alle Materie zerfallen! Also galt es, die Existenz einer kleinsten, stabilen Bahn zu begründen. BOHR und andere Forscher zogen dazu Gedanken aus der sich allmählich entwickelnden Quantenphysik heran:

b) DE BROGLIE sagte: Nach → **B5b** existiert auf dem Umfang $U = 2\pi r$ einer bohrschen Bahn eine in sich geschlossene Welle; sie umfasst eine ganze Zahl n an DE BROGLIE-Wellenlängen $\lambda_B = h/p$. So baute er die Konstante h in die Atomphysik ein. Für den Bahnumfang U_n der n . bohrschen Bahn sollte danach gelten

$$U_n = 2\pi r_n = n \cdot \lambda_B = \frac{nh}{p} = \frac{nh}{m_e v} \quad \text{mit } n = 1, 2, 3, \dots (2)$$

Mit Gl. 1 folgt $r_n = \frac{\epsilon_0 h^2 n^2}{\pi e^2 m_e}$ mit $n = 1, 2, 3, \dots$ (3)



B5 a) Von der Seite betrachtet müssten kreisende Elektronen auf und ab schwingen. b) Stehende Elektronenwellen auf bohrschen Bahnen, nach de Broglie.

Gl. 3 liefert für jede der **Quantenzahlen** $n = 1, 2, 3, \dots$ einen bestimmten Bahnradius r_n . Bei $n = 1$ erhält man für die innerste Bahn den sog. **bohrschen Radius**

$$r_1 = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi e^2 m_e} = 0,053 \text{ nm.} \quad (4)$$

Messungen liefern den vierfachen Wert $r_1 \approx 0,2 \text{ nm}$. Doch konnte man nun aus den allgemeinen Naturkonstanten ϵ_0, h, e und m_e die Größenordnung von Atomdaten berechnen, ein gewaltiger Fortschritt!

Die Angabe von Bahnen widerspricht zwar der UBR, doch hat sich die folgende Annahme von BOHR bewährt: Befindet sich das Elektron in einem *Zustand* mit *Quantenzahl* n_1 (Radius r_{n_1} nach Gl. 3), so kann es auf einen höher liegenden *Zustand* mit $n_2 > n_1$ (Radius r_{n_2}) „gehoben“ werden. Dazu braucht man die Energie

$$\Delta W = \frac{m_e e^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) = C \cdot \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right) \quad (5)$$

Beim Rücksprung $n_2 \rightarrow n_1$ wird diese Energie wieder frei → **B6**. Dabei ist $C = 2,16 \cdot 10^{-18} \text{ J} = 13,6 \text{ eV}$.

Um das Elektron von der innersten Bahn mit $n_1 = 1$ vom Kern ganz zu entfernen, also in eine Bahn mit $n_2 \rightarrow \infty$ zu heben, braucht man die Energie

$$W_\infty = C \cdot (1/1 - 1/\infty) = 13,6 \text{ eV.}$$

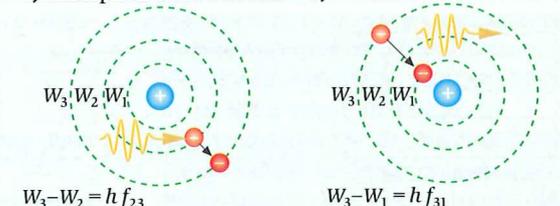
Wir kommen darauf beim Wasserstoffatom zurück.

Es war ein fruchtbarer Zufall der Physikgeschichte, dass Gl. 5 Bestand hatte. An ihr ist bemerkenswert:

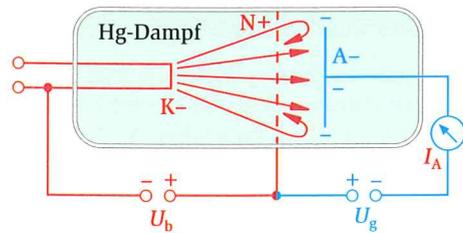
- Die Quantenzahlen n sind ganzzahlig.
- Folglich kann ΔW nur bestimmte Werte annehmen, das H-Atom hat nur quantisierte Energieniveaus. Dies erklärt die scharfen Spektrallinien in → **B4**. Sie entstehen beim Rücksprung $n_2 \rightarrow n_1$.
- Gl. 5 gibt aber nur beim H-Atom richtige Werte. Alle Versuche, BOHRS Modell auf Atome mit mehr als einem Elektron zu übertragen, scheiterten.

Dies zwang Physiker, die Grundlagen der klassischen Physik zu überdenken und zu revidieren.

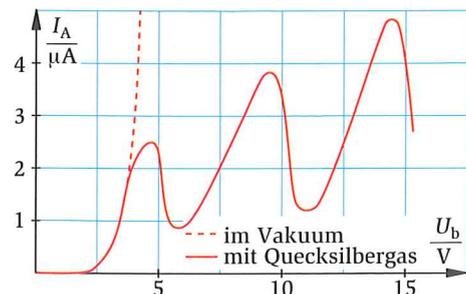
a) Absorption eines Photons b) Emission eines Photons



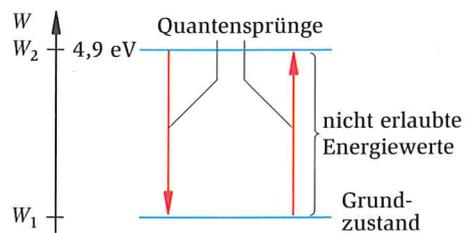
B6 Bohrsches Modell: a) Die Energie eines Photons hebt das Elektron von der 2. Bahn in die 3. b) Das Elektron springt in die 1. Bahn und emittiert ein Photon.



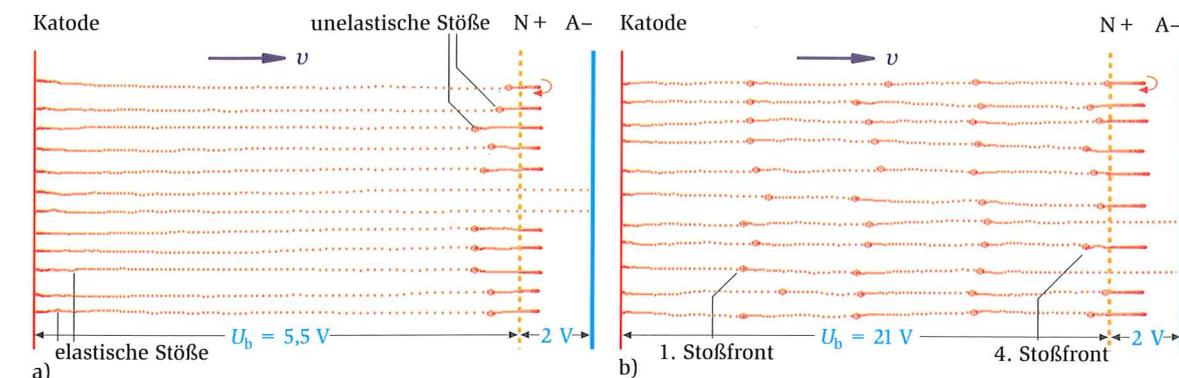
V1 Franck-Hertz-Versuch: Mit der Spannung U_b werden Elektronen von der Glühkathode K (-) zur Netzanode N (+) beschleunigt. Bei genügend Energie erreichen sie die Platte A (-) und liefern den Auffängerstrom I_A .



B1 Obwohl die Spannung U_b stetig steigt, ändert sich bei Quecksilberdampf der Auffängerstrom I_A periodisch.



B2 Zwei diskrete Energiezustände eines Atoms mit Quantensprüngen dazwischen



B3 Die in gleichen Zeitabständen markierten Punkte der Simulation zeigen Elektronenbahnen: **a)** Bei $U_b = 5,5$ V erreichen nur wenige Elektronen den Auffänger A (-), die meisten kehren zwischen Netz N (+) und A (-) um. Sie gaben kurz vor N (+) ihre Energie 4,9 eV an ein Hg-Atom ab. **b)** Bei $U_b \approx 20$ V wiederholt sich der Vorgang 4-mal. Die 4. Stoßfront liegt vor N (+); nur wenige Elektronen erreichen den Auffänger A (-); I_A ist zum 4. Mal abgesunken.

1. Wie reagieren Atome auf Elektronen-Stöße? →

Das Experiment von J. FRANCK und G. HERTZ (Nobelpreis 1925) untersucht, ob Atome Energie in ihr „Innenleben“ aufnehmen, durch Stoß von außen. Dazu beschießt man gasförmige Quecksilberatome mit Elektronen. Diese werden mit wachsender Spannung U_b von der Kathode K (-) zum Anodennetz N (+) beschleunigt → **V1**.

- Nehmen wir zunächst an, die Röhre enthalte kein Gas. Dann fliegen die Elektronen im Vakuum ungestört zum Anodennetz N (+). Wenn die Beschleunigungsspannung $U_b > 2$ V ist, können sie gegen die zwischen N (+) und Auffängerplatte A (-) gelegte Gegenspannung $U_g = 2$ V anlaufen. Nur dann erreichen sie A (-); das Messgerät registriert den Strom I_A . Dieser steigt erst bei $U_b > 2$ V monoton mit der Spannung U_b (in → **B1** gestrichelt).
- Wenn die Röhre Quecksilber (Hg) als Gas von 180 °C enthält, stoßen die Elektronen auf Hg-Atome. Trotzdem steigt der Strom I_A an, aber nur bis $U_b = 4,9$ V erreicht ist. Offensichtlich geben bei $U_b < 4,9$ V die relativ langsamen Elektronen keine Energie ab; sie werden beim Stoß nur etwas abgelenkt und laufen gegen A (-) an. Die Stöße sind *elastisch*, d. h. ohne Energieübertragung.
- Übersteigt jedoch U_b den Wert 4,9 V, dann sinkt der Auffängerstrom I_A abrupt ab. Die Elektronen erreichen kurz vor dem Anodennetz N (+) die Energie 4,9 eV = $7,8 \cdot 10^{-19}$ J → **B3a**. Dort nehmen Hg-Atome diese Energie in nun *inelastischen* Stößen in ihr Inneres auf; man sagt, sie werden energetisch angeregt. Die Elektronen dagegen verlieren Energie und werden abgebremst. Sie durchfliegen zwar noch das Anodennetz N (+), kehren aber vor der negativ geladenen Platte A (-) um und landen auf N (+).
- Dieses Absinken von I_A tritt mehrfach auf, in → **B3b** z. B. bei der 4-fachen Spannung $U_b \approx 4 \cdot 4,9$ V ≈ 20 V. Hier haben die Elektronen längs der 4 Teilstrecken KN/4 die Energie 4,9 eV aufgenommen (KN = Abstand Kathode K gegen Netzanode N) und am Ende jeder Teilstrecke jeweils in unelastischen Stößen an Quecksilberatome wieder abgegeben.

Das Franck-Hertz-Experiment zeigt: Atome nehmen bei Stößen nur bestimmte Energiebeträge auf (bei Hg-Atomen sind es hier 4,9 eV). Die Energie der Atome ist quantisiert.

2. Scharf bestimmte (diskrete) atomare Energieniveaus

Im FRANCK-HERTZ-Versuch nehmen Quecksilber-Atome die Energie $W = 4,9$ eV nicht nur auf. Sie geben diese sofort wieder ab, indem sie Photonen emittieren, mit der im UV liegenden Frequenz

$$f = \frac{W}{h} = \frac{4,9 \text{ eV}}{h} = \frac{4,9 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}}{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js}} = 1,2 \cdot 10^{15} \text{ Hz.}$$

Atome sind *Kurzzeitspeicher* für Energie. Wir ordnen ihnen scharf bestimmte *Energieniveaus* zu. Diese Niveaus zeigt → **B2** als zwei Linien mit Abstand 4,9 eV. Die untere gibt den **Grundzustand**, das untere *Energieniveau* an (meist zu $W_1 = 0$ eV gesetzt). Der Grundzustand kann beliebig lange besetzt sein; er ist stabil. Über $W_1 = 0$ eV liegt der nur kurzzeitig (ca. 10^{-8} s lang) besetzte, **angeregte Energiezustand** in der „Energiehöhe“ $W_2 = 4,9$ eV.

Zwischen aufeinander folgenden Energieniveaus gibt es im Atom keine *erlaubten, besetzbaren* Zustände. Dort besteht ein verbotener Bereich. In diesem nimmt das Atom keine Energie auf.

3. Was versteht man in der Physik unter Quantensprüngen?

Über den verbotenen Bereich hinweg, zwischen den Energieniveaus W_1 und W_2 , finden **Quantensprünge** statt:

- Den *Quantensprung* $W_1 \uparrow W_2$ führt das Atom aus, wenn es die Energie 4,9 eV = $7,8 \cdot 10^{-19}$ J vom stoßenden Elektron aufnimmt.
- Beim *Quantensprung zurück*, bei $W_2 \downarrow W_1$, gibt das Atom die Energiedifferenz $\Delta W_A = W_2 - W_1 = 4,9$ eV wieder ab. Dabei emittiert es ein UV-Quant mit $f = \Delta W_A/h = 1,2 \cdot 10^{15}$ Hz.

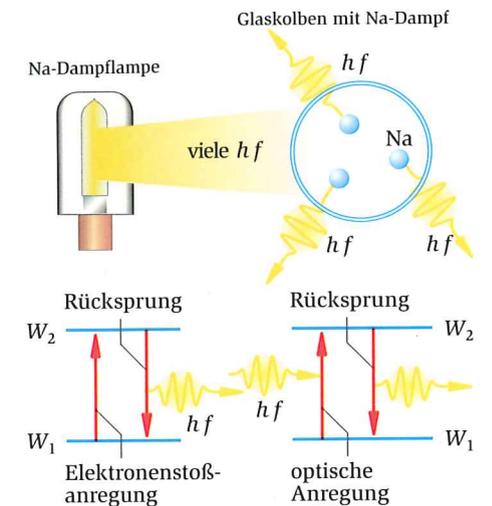
4. Resonanzfluoreszenz bestätigt den Energiesatz

In der Natrium-Dampflampe von → **V2** nehmen Natrium-Atome (Na) durch Elektronenstöße die Energie $\Delta W = W_2 - W_1$ auf, beim Quantensprung $W_1 \uparrow W_2$. Beim Rücksprung $W_2 \downarrow W_1$ geben diese Atome die gleiche Energie ΔW als Photon ab. Gemäß $h \cdot f = \Delta W$ entsteht dabei gelbes Na-Licht mit scharfen, gelben Linien.

Wenn die von der Lampe emittierten Photonen den rechten, nur mit Na-Dampf gefüllten Kolben erreichen, so regen sie dessen Na-Atome mit der gleichen Energie ΔW ($W_1 \uparrow W_2$) an. Die angeregten Na-Atome verweilen kurz im Zustand W_2 und senden beim Rücksprung $W_2 \downarrow W_1$ Photonen der exakt gleichen Frequenz $f = \Delta W/h = c/\lambda$ nach allen Seiten. Diese **Resonanzfluoreszenz** zeigt, dass der Energiesatz auch in der Quantenwelt *exakt* gilt. Mit *Fluoreszenz* bezeichnet man die Lichtemission kalter Körper, angeregt durch eingestrahelte Photonen oder durch Elektronenstöße.

Merksatz

Atome haben scharf getrennte, diskrete Energiezustände. Nur diese können von Elektronen besetzt werden. Bei Energiezufuhr vom Zustand W_1 in einen energetisch höheren Zustand W_2 führt das Atom den Quantensprung $W_1 \uparrow W_2$ aus. Beim Rücksprung ($W_2 \downarrow W_1$) wird Energie frei, oft durch Emission eines Photons mit der Energie $\Delta W = W_2 - W_1$ und der Frequenz $f = \Delta W/h$.



V2 Der Glaskolben (oben, rechts) enthält etwas erhitztes Natriummetall (Na), er ist von Na-Dampf erfüllt. Dieser lässt die meisten Photonen des Tageslichts ungehindert passieren; sie sind nicht auf Resonanz eingestellt. Der Na-Dampf sendet auch keine Photonen aus, wir sehen ihn nicht.

Der Na-Dampf wird erst von den Photonen der linken Na-Dampflampe enttarnt. In ihrem gelben Licht leuchtet bereits die Na-Dampfschicht direkt unter dem Glaskolben massiv gelb. Sie absorbiert die eingestrahelten Photonen und gibt bei dieser *Resonanzfluoreszenz* Photonen gleicher Energie wieder ab, und zwar nach allen Seiten. Der Kolben erscheint wie mit einer gelben Flüssigkeit erfüllt.

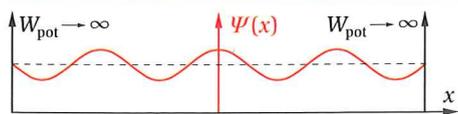
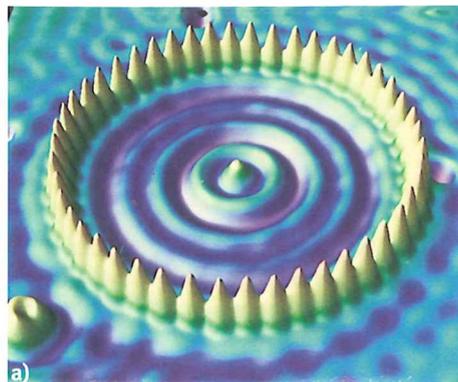
A1 Lesen Sie an den Elektronenbahnen in → **B3** die ungefähre Beschleunigungsspannung U_b ab. Warum ändert sich die Punktdichte (die Punkte sind in gleichen Zeitabständen Δt gesetzt)? Wie kann man im Bild elastische Stöße von unelastischen unterscheiden?

A2 Energie ist im Licht aber auch im Atom quantisiert. Gibt es beim Franck-Hertz-Versuch auch Energie, die nicht quantisiert ist?

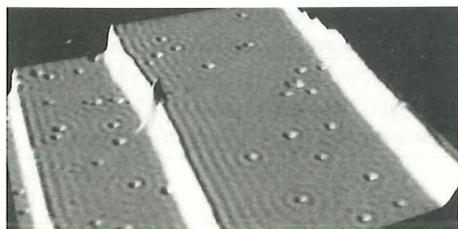
A3 Heute nennt man eine große, seltene, unerwartete Änderung oft „Quantensprung“. Beurteilen Sie diese Wortwahl. Sind Quantensprünge in der Natur selten, sind sie groß?

A4 Vergleichen Sie die Vorgänge in der Na-Dampf-Lampe in → **V2** mit dem Franck-Hertz-Versuch. Was bewirkt jeweils die Energieänderung im Atom?

A5 Berechnen Sie die Differenz der Energieniveaus (in Joule und eV) in Na-Atomen bei Emission von gelbem Licht ($\lambda = 589$ nm)?



B1 a) Im „Quanten-Pferch“ mit 14 nm Durchmesser sind Elektronen von 48 kreisförmig angeordneten Eisen-Atomen eingesperrt. Sie haben nicht die Energie, den Rand des Pferchs zu überspringen. **b)** Die Antreffwahrscheinlichkeit $|\Psi(x)|^2$ der Elektronen ist zeitlich konstant und hier eindimensional dargestellt.



B2 Das $|\Psi|^2$ des „Elektronensees“ auf einer Kupferplatte zeigt Stufen in der Oberfläche.

1. Stationäre Zustände eingesperrter Elektronen

Elektronen lassen sich in einem aus 48 Eisenatomen gebildeten runden „Pferch“ einsperren \rightarrow **B1**. Ihre Dichte, d. h. ihre Antreffwahrscheinlichkeit $|\Psi|^2$, tastete die Spitze eines \rightarrow **Rastertunnelmikroskop** langsam ab, zeilenweise, Punkt für Punkt. Also liegt ein zeitlich konstanter, **stationärer Elektronenzustand** vor. Sein $|\Psi|^2$ ist gewellt wie Wellpappe, hängt nur vom Ort ab, nicht von der Zeit. Analoges kennen wir vom \rightarrow **Ketterle-Experiment** und beschreiben es mit rotierenden Zeigern eindimensional.

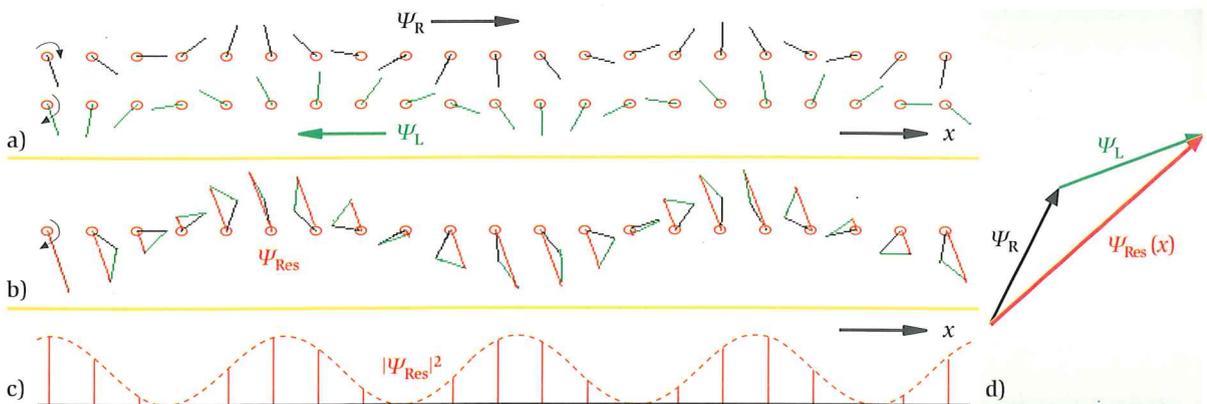
Dazu lassen wir in \rightarrow **B3a** eine fortschreitende $\Psi_R(x, t)$ -Welle in Gedanken nach rechts laufen und ihr entgegen die Ψ_L -Welle mit gleicher DE BROGLIE-Wellenlänge $\lambda_B = h/p$.

Wie beim Doppelspalt verlangt das **Superpositionsprinzip**, die beiden Wellen Ψ_R und Ψ_L als Ganzes, als gleichberechtigte Möglichkeiten zu betrachten.

Wir addieren also in \rightarrow **B3b** die schwarzen Zeiger von Ψ_R und die grünen von Ψ_L zu $\Psi = \Psi_R + \Psi_L$. Aus beiden fortschreitenden Wellen wird die rote **stehende Welle** $\Psi(x)$. Die Länge ihrer Ψ -Zeiger ändert sich zeitlich gesehen nicht, wohl aber räumlich; sie ist periodisch in x -Richtung, mit der Periode $\lambda_B/2$. So entsteht der **stationäre Zustand** einer **stehenden Ψ -Welle**.

Damit beschreiben wir den stationären Elektronenzustand im Quantenpferch, vereinfacht nach \rightarrow **B1b**. Die Antreffwahrscheinlichkeit $|\Psi(x)|^2$ der Elektronen, deren Dichte, ist räumlich gesehen gewellt. Die Elektronen schwingen nicht wie in hertzchen Dipolen; stationäre Zustände strahlen keine Energie ab.

Da die Elektronen im Pferch keine Energie abgeben, kann ihr Zustand beliebig lange bestehen bleiben: Er ändert sich im Laufe der Zeit nicht. Für die zeitliche Unbestimmtheit gilt also $\Delta t \rightarrow \infty$, für die energetische nach der Zeit-Energie-Unbestimmtheitsrelation $\Delta W \approx h/\Delta t \rightarrow 0$. Die Energie W der eingesperrten Elektronen ist scharf bestimmt. Eine wichtige Aufgabe der Quantenphysik ist es, die Energie stationärer Zustände zu bestimmen, etwa in Atomen.



B3 a) Fortschreitende Wellen: Ψ_R nach rechts (schwarz), Ψ_L nach links (grün). Ihre Zeiger haben gleiche Länge, $|\Psi|^2$ ist also konstant. **b)** Die Addition $\Psi = \Psi_R + \Psi_L$ der Zeiger gibt die **stehende Welle** (rot). **c)** In diesem stationären Zustand ist $|\Psi|^2$ zeitlich konstant, ändert sich aber periodisch mit dem Ort x . **d)** Addition $\Psi = \Psi_R + \Psi_L$ an einem Beispiel.

2. Wie groß ist die Energie im hohen Potenzialtopf?

a) Im Pferch von \rightarrow **B1a** sind Elektronen eingesperrt wie Wasser in Brunnen mit hohen Wänden. Dies idealisiert \rightarrow **B4** als Topf der Breite L . Im Innern habe ein Elektron die potenzielle Energie $W_{pot} = 0$. Damit es den Topf nicht verlässt, die Wände des **hohen Potenzialtopfs** nicht erklimmt, sei an den Wänden $W_{pot} \rightarrow \infty$.

b) Die Gesamtenergie W im stationären Zustand ist scharf bestimmt. Nach der klassischen Physik besteht sie im Innern aus $W_{pot} = 0$ und $W_{kin} = \frac{1}{2} m_e v^2$. Mit $v = p/m_e$ und $p = h/\lambda_B$ ersetzen wir v durch die Quantengröße λ_B . Das Elektron hat also im Topf die Energie

$$W = W_{pot} + W_{kin} = 0 + \frac{1}{2} m_e \cdot v^2 = \frac{p^2}{2m_e} = \frac{h^2}{2m_e \lambda_B^2} \quad (1)$$

c) Wie fügt sich die Ψ -Welle von \rightarrow **B3c** zwischen die hohen Energiewände des Topfs mit Abstand L ein? Das Elektron wird den Kontakt mit ihnen meiden, da an beiden Wänden seine Antreffwahrscheinlichkeit $|\Psi(x)|^2 = 0$ ist. Die Ψ -Wellen in \rightarrow **B5** haben also bei $x = \pm L/2$ die **Randbedingung** $\Psi_{Rand} = 0$. So bekommen die stehenden Ψ -Wellen Knoten bei $x = \pm L/2$ (wie eingespannte Saiten). Damit passt in den Topf der Breite L eine ganze Zahl n von **Bäuchen**, je mit Länge $\lambda_B/2$. Für diese **Quantenzahlen** n gilt $L = n \cdot \lambda_B/2$, also

$$\lambda_B = 2L/n \text{ mit } n = 1, 2, 3 \dots \quad (2)$$

d) Zu jeder Quantenzahl n gehört eine sinusförmige Ψ_n -Welle. Die zugehörigen Antreffwahrscheinlichkeiten $|\Psi_n(x)|^2$ zeigt \rightarrow **B5**. Nur solche Ψ_n -Wellen können Elektronen besetzen. Dort haben sie die Energie W_n . Setzen wir $\lambda_B = 2L/n$ in Gl. 1 ein, so finden wir die zu den Quantenzahlen n gehörige **Gesamtenergie**

$$W_n = \frac{h^2}{2m_e \lambda_B^2} = \frac{n^2 \cdot h^2}{8m_e \cdot L^2} \text{ mit } n = 1, 2, 3 \dots \quad (3)$$

W_n ist proportional zu n^2 . Auch dies zeigt \rightarrow **B5**. Dort ist nämlich $|\Psi_n(x)|^2$ in Höhe der zugeordneten **Energie-Eigenwerte** W_n aufgetragen. Zudem steigt W_n mit abnehmender Topfbreite L . Für $n = 1$ folgt die schon bekannte Lokalisationsenergie $W_1 = h^2/(8m_e L^2)$.

Merksatz

Elektronen, die im hohen Potenzialtopf der Breite L eingesperrt sind, haben nur die von den Quantenzahlen n bestimmten, quantisierten Eigenwerte der Gesamtenergie W_n . Für diese gilt

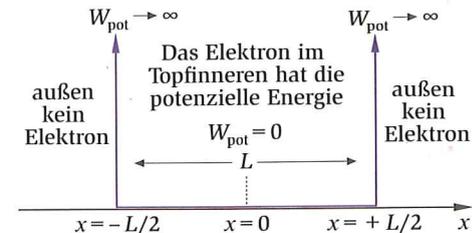
$$W_n = \frac{n^2 h^2}{8m_e L^2}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Randbedingungen wählen bei diesen stationären Zuständen die sinusförmigen Ψ -Wellen aus und bestimmen so die quantisierte Energie. Diese steigt mit abnehmender Topfbreite L . □

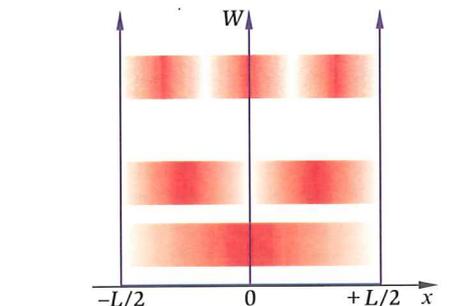
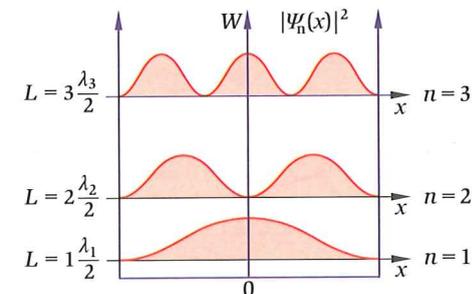
Beispiel

Der Topf in \rightarrow **B4** hat die Breite $L = 2$ nm. Bei der Quantenzahl $n = 2$ liefert Gl. 3 mit der Elektronenmasse $m_e = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg

$$W_n = \frac{4 \cdot (6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J})^2}{8 \cdot 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot (2 \cdot 10^{-9})^2} = 0,6 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 0,38 \text{ eV}$$



B4 Potenzielle Energie W_{pot} des unendlich hohen, linearen Potenzialtopfs mit Breite L .

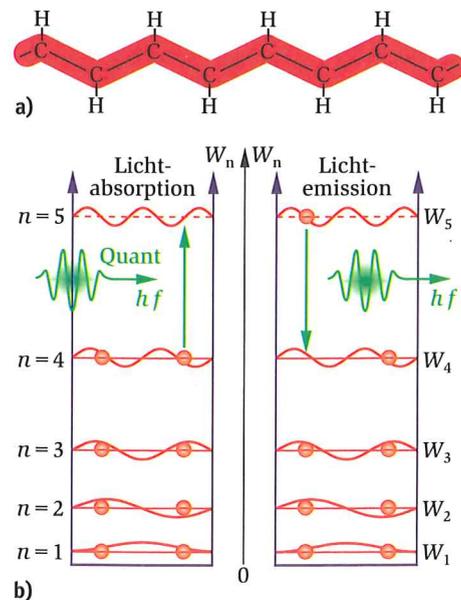


B5 a) Zu den Quantenzahlen $n = 1, 2, 3$ gehörende Antreffwahrscheinlichkeiten $|\Psi_n(x)|^2$ in Höhe der Energie-Eigenwerte W_n aufgetragen (keine räumliche Höhe). **b)** Die Farbdichte zeigt $|\Psi_n(x)|^2$ aus (a).

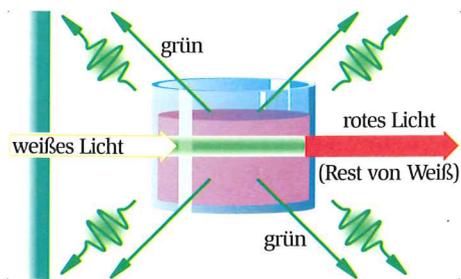
Vertiefung

In Gl. 1 haben wir die Gesamtenergie mithilfe des Impulses p bestimmt, obwohl p im Topf mit Breite L die Unbestimmtheit $\Delta p \approx h/\Delta x \approx h/L$ hat. Solche halbklassischen Herleitungen waren beim Entwickeln der Quantengesetze üblich.

A1 a) Wie breit ist ein linearer Potenzialtopf, wenn ein Elektron bei der Quantenzahl $n = 5$ die Energie 1,0 eV hat? Welche hat er bei $n = 4$? Welche Frequenz haben Photonen bei Quantensprüngen zwischen diesen Niveaus? **b)** Warum gibt es keinen Zustand mit $n = 0$? Begründen Sie die benutzten Formeln.



B1 a) Vereinfachte Formel eines organischen Farbstoffmoleküls. Jedes seiner 8 C-Atome hat 4 Bindungselektronen. Davon braucht man 3 für die 3 Nachbarn. Das 4. Elektron wird in einen linearen Potenzialtopf entlassen; es gehört zum ganzen Molekül (rot getönt). **b)** Der so gebildete Potenzialtopf hat 8 Elektronen. Im Grundzustand reichen sie nach dem Pauliprinzip bis zur Quantenzahl $n = 4$. Zwischen $n = 4$ und $n = 5$ finden Quantensprünge statt.



V1 Die Küvette enthält roten Farbstoff, in Alkohol gelöst. Weißes Licht fällt von links ein. Davon wird Grün ($\lambda \approx 530 \text{ nm}$) absorbiert, erzeugt Quantensprünge, z.B. $W_4 \uparrow W_5$ in \rightarrow **B1b**. Die beim Rücksprung $W_5 \downarrow W_4$ frei werdenden Quanten des breiten grünen Frequenzbereichs fliegen nach allen Seiten als schwaches grünes Fluoreszenzlicht. Im Geradeausstrahl fehlt Grün; man sieht die Komplementärfarbe Rot. Letzteres gilt auch dann, wenn das weiße Licht allseitig einfällt.

1. Warum sind Rosen rot?

a) Mit Elektronen im atomaren Bereich beschäftigt sich die Chemie. Sie zeigt, dass Rosen Farbstoffmoleküle besitzen, z.B. Ketten aus 8 C-Atomen, je mit $a \approx 0,15 \text{ nm}$ Durchmesser \rightarrow **B1a**. Deren Länge ist $L = 8a \approx 1,2 \text{ nm}$ (von der Verwinkelung sehen wir ab).

Nun braucht jedes C-Atom von seinen vier Elektronen drei zur Bindung an seine drei nächsten Nachbarn. Das vierte Elektron gibt es an die ganze Kette ab, wo es über den ganzen, rot getönten Bereich verteilt ist. Seine potenzielle Energie ist praktisch konstant: wir setzen $W_{\text{pot}} = 0$ und sehen den roten Bereich als linearen Potenzialtopf an, mit den Quantenzahlen n und den Energieniveaus $W_n = n^2 h^2 / (8m_e \cdot L^2) \rightarrow$ **B1b**.

In jedes dieser Niveaus treten nach dem von W. PAULI (Nobelpreis 1945) gefundenen Pauliprinzip höchstens zwei Elektronen ein. Also besetzen die 8 Elektronen einer Kette im Grundzustand die vier unteren Niveaus, und zwar je zu zweit, mit Quantenzahlen $n = 1, \dots, 4$ und den Energien W_1, \dots, W_4 . Diese Elektronen schwingen im Potenzialtopf nicht wie in Antennen hin und her; sie befinden sich in einem stationären Zustand und strahlen kein Licht ab. Rosen leuchten im Dunkeln nicht. Warum sind sie dann rot?

b) Das Tageslicht strahlt Quanten sehr vieler Frequenzen ein. Im Topf geben aber nur solche Quanten ihre Energie $W = hf$ ab, die ein Elektron vom obersten besetzten Zustand W_4 ($n = 4$) in den nächsten unbesetzten W_5 ($n = 5$) heben, beim Sprung $W_4 \uparrow W_5$ (\rightarrow **B1b** links). Zu dieser Anregung der Atomkette mit Länge $L \approx 1,2 \text{ nm}$ braucht man nach $W_n = n^2 h^2 / (8m_e L^2)$ die Energie

$$\Delta W = W_5 - W_4 = \frac{(5^2 - 4^2) h^2}{8m_e L^2} = \frac{9h^2}{8m_e L^2} \approx 3,8 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 2,4 \text{ eV.}$$

Dazu gehören die Frequenzen $f = \Delta W/h$ und Wellenlängen um

$$\lambda = \frac{c}{f} = c \cdot h / \Delta W = \frac{8m_e L^2 c}{9h} \approx 520 \text{ nm.} \quad (1)$$

Dies zeigt \rightarrow **V1**. Dort durchsetzt weißes Licht von links einen Farbstoff. Dessen Moleküle absorbieren Quanten mit Wellenlängen im grünen Bereich, um 520 nm. Die nicht absorbierten Quanten laufen weiter. Das Auge nimmt die Komplementärfarbe des grünen Bereichs wahr; es ist Rot. Diese Farbe hängt nach Gl. 1 von der jeweiligen Breite L der Potenzialtöpfe ab, einer der vielen Gründe für den Farbenreichtum der Natur.

2. Fluoreszenz erzeugt auch längerwelliges Licht

Bei der Resonanzfluoreszenz in gasförmigem Natrium kehren die Elektronen vom Energieniveau W_{n+1} sofort wieder in den Grundzustand W_n zurück. Beim Quantensprung $W_{n+1} \downarrow W_n$ senden sie gelbes Natriumlicht aus, also Photonen mit exakt der gleichen Energie, die sie angeregt hat.

Doch läuft dieser Quantenprozess in Molekülen und Festkörpern komplizierter ab als in \rightarrow **B1b** und \rightarrow **B2a**: In Festkörpern gibt es nämlich sehr viel mehr Energieniveaus als in freien Atomen \rightarrow **Bändermodell**.

In komplizierten Fluoresceinmolekülen kehrt das gehobene Elektron nach \rightarrow **B2b** aus dem angeregten, mit W_{n+3} bezeichneten Zustand in Stufen nach W_n zurück, über Zwischenzustände wie W_{n+2} und W_{n+1} . Die Quanten des emittierten Fluoreszenzlichts sind deshalb energieärmer als die vom Molekül absorbierten Quanten des Sprungs $W_n \uparrow W_{n+3}$. Ihre Wellenlänge ist größer \rightarrow **V2**.

Diese Vergrößerung der Wellenlänge wandelt z.B. unsichtbares UV-Licht in sichtbares Licht um. Die Energie energiereicher UV-Quanten wird z.B. in Leuchtstoffröhren in die Energie von Quanten sichtbaren Lichts aufgeteilt \rightarrow **V3**. Diese enthalten gasförmiges Quecksilber (kein Neon), dessen Atome durch Elektronenstoß angeregt werden \rightarrow Franck-Hertz-Experiment. Die anschließend emittierten UV-Quanten regen den weißen Leuchtstoff auf der Röhreninnenwand zu Fluoreszenz an. Er besitzt viele sehr eng benachbarte Energiestufen, sendet also kontinuierliches Licht aus. Die sehr scharfen Spektrallinien der Quecksilberatome überlagern es.

Waschmittelzusätze in Hemden fluoreszieren im UV blau. Bei Tageslicht addiert sich dieses Blau mit Gelb zu einem weißlichen Ton. Auch viele Papiersorten fluoreszieren im UV-Licht \rightarrow **B3**. Schlecht gefälschte Geldscheine fluoreszieren im UV anders als echte Scheine. So weist man oft auch Fälschungen von Kunstwerken nach.

Fluoreszenzschirme in medizinischen Röntgenanlagen absorbieren Röntgenquanten und teilen deren Energie stufenweise auf, z.T. in Quanten sichtbaren Lichts. So verwandeln sie gefährliche Röntgenstrahlen in sichtbares Licht.

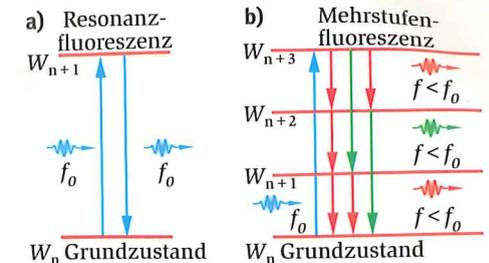
Die Photosynthese und viele andere chemische Reaktionen, auch der Auf- und Abbau von Molekülen, laufen während extrem kurzer Zeit ab. In der modernen Ultrakurzzeitspektroskopie werden sie von einem ersten Laserblitz in Gang gesetzt. Mit einem im Zeitabstand Δt folgenden zweiten Laserblitz löst man Fluoreszenzlicht aus.

Analysiert man dessen Quanten, erhält man Information über den nach Δt erreichten Zustand des Vorgangs. Δt konnte auf 10^{-16} s verkürzt werden. Damit ist es heute möglich, chemische Vorgänge von ca. 10^{-15} s Dauer zu analysieren.

3. Ist die Energie der Elektronen stets quantisiert?

Aus all dem darf man nicht folgern, Energie sei stets quantisiert. In Elektronenkanonen lässt sich die Beschleunigungsspannung U_b stetig erhöhen und damit auch die Energie $W = U_b \cdot e$ der frei fliegenden Elektronen. Diese sind bei ihrem Flug nicht in einen Potenzialtopf eingesperrt; sie unterliegen keinen eingrenzenden Randbedingungen, befinden sich also nicht in einem stationären Zustand. Ihre Energie ist nicht quantisiert.

In atomaren Gebilden dagegen führen solche Randbedingungen zur Energiequantisierung der eingeschlossenen Elektronen. Wie beim Potenzialtopf liefert die aus der Unbestimmtheitsrelation gefolgerte Lokalisationsenergie den Grundzustand. Wie wir nun sahen, liegen über ihm zahlreiche weitere quantisierte Energiestufen. Wir kommen darauf beim Wasserstoffatom zurück.



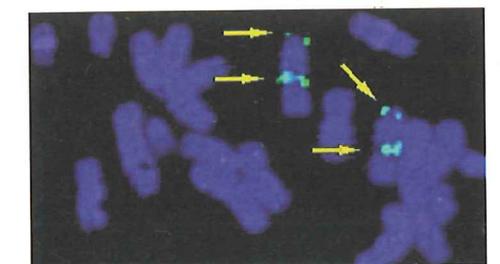
B2 Quantensprünge a) bei Resonanzfluoreszenz, etwa in gasförmigem Natrium b) stufenweise Fluoreszenz in Fluoresceinlösung

V2 Wir bestrahlen Fluoresceinlösung (organische Substanz) mit weißem Licht und betrachten das durchfallende Licht im Spektroskop. Es fehlen Blau und Violett; im durchfallenden Licht erscheint die Lösung in der Komplementärfarbe Rot-Gelb. Nach den Seiten hin fluoresziert sie jedoch grün \rightarrow **V1**.

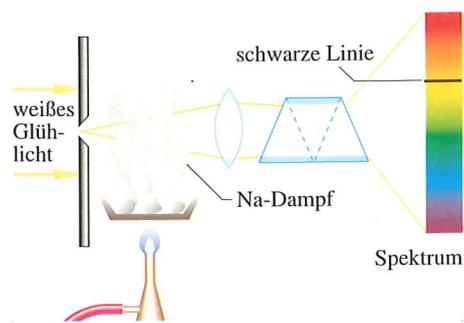
V3 Eine Leuchtstoffröhre wird mit einem Geradsichtspektroskop betrachtet. Man sieht das kontinuierliche Spektrum des Leuchtstoffs, mit dem die Röhrenwand innen ausgekleidet ist. Diesem kontinuierlichen Untergrund sind zahlreiche farbige, scharfe Linien der freien Atome des Quecksilberdampfes in der Röhre überlagert. Deren Wellenlängen entnimmt man einer Skala im Spektroskop und vergleicht sie mit den Linien der Spektraltafel am Buchende.



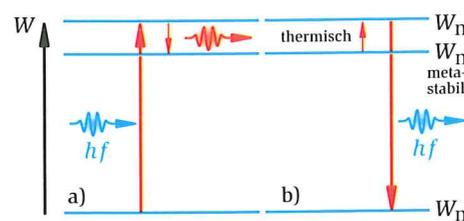
B3 Ein Geldschein fluoresziert im UV-Licht.



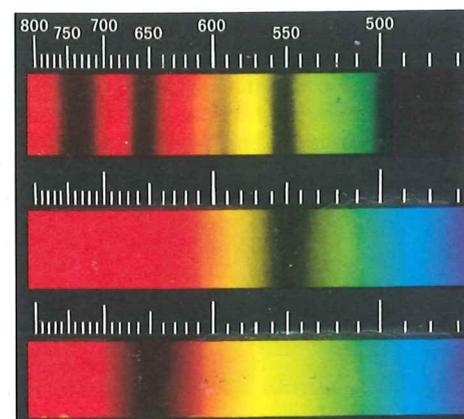
B4 Mit Fluoreszenzfarbstoff markierte Chromosomen



V1 Weißes Glühlicht fällt auf einen engen Spalt, den ein gutes Objektiv auf einem Schirm abbildet. Das Geradsichtprisma erzeugt ein kontinuierliches Spektrum. In die nichtleuchtende Bunsenflamme streut man Kochsalz (NaCl). Sie leuchtet gelb; im Gelb des Spektrums zeigt sich eine dunkle Linie. Die Natriumatome in der Flamme absorbieren Photonen des weißen Lichts und strahlen diese allseitig aus, sodass sie im Spektrum weitgehend fehlen.



B1 Energieniveau-Schema der Phosphoreszenz **a)** Lichteinstrahlung **b)** Lichtemission; wie bei der Fluoreszenz kann der Rücksprung in Stufen erfolgen, sodass das emittierte Licht größere Wellenlänge als das eingestrahlt hat.



B2 Absorptionsspektrum von Farbstoffen

4. Atome verursachen auch Absorptionslinien

Weißes Glühlicht hat ein kontinuierliches Spektrum. Es durchsetzt in **→ V1** freie Natrium-Atome aus Kochsalz (NaCl), wenn man dieses in eine Flamme streut. Die Natriumatome absorbieren aus dem weißen Licht aber nur Photonen der gelben Natrium-Linie. Die sofort wieder allseitig gestreuten Photonen fehlen im kontinuierlichen Spektrum. Dort sieht man eine dunkle **Absorptionslinie**. Man spricht von einer **Umkehrung der Spektrallinie**.

Damit analysiert man die Zusammensetzung von Sonnen- und Stern-Atmosphären. Denn das weiße Licht samt IR und UV aus der tief liegenden **Fotosphäre** der Sonne durchsetzt die darüberliegende **Chromosphäre**. Deren Atome absorbieren aus dem **kontinuierlichen** Spektrum nur die ihnen passenden Photonen **→ Resonanzfluoreszenz**. Der weiterlaufende Rest bildet ein fast **kontinuierliches Spektrum**, das von vielen scharfen, dunklen **Absorptionslinien** durchzogen ist, **fraunhoferische Linien** genannt **→ Spektraltafel**. So erfährt man, welche Elemente in den Gashüllen der Fixsterne vorkommen. Das Element **Helium** wurde durch zunächst noch unbekannte Absorptionslinien auf der Sonne entdeckt und später in Gasquellen auf der Erde nachgewiesen.

5. Phosphoreszenz

Leuchtplaketten oder **Leuchtziffern** von Uhren, die mit UV-haltigem Licht bestrahlt wurden, leuchten im Dunkeln lange nach; sie zeigen **Phosphoreszenz** (das Leuchten von Phosphor in Luft oder von Leuchtkäfern ist ein chemischer Vorgang und hat damit nichts zu tun). Ein phosphoreszierender Stoff ist **Zinksulfid**, das Spuren von Kupfer enthält. Einfallendes Licht hebt nach **→ B1a** Elektronen im Quantensprung $W_n \uparrow W_{n+2}$ vom Grundniveau W_n in das höhere Niveau W_{n+2} . Sie fallen aber nicht sofort nach W_n zurück, sondern zunächst in das um nur 0,01 eV tiefere Niveau W_{n+1} des Festkörpers. Es ist eine der dort häufigen **Elektronenfallen**. In dieser bleiben die Elektronen so lange, bis sie von thermischer Energie zufallsbedingt wieder auf W_{n+2} gehoben werden **→ B1b**, nach Sekunden oder Stunden. Von dort kehren sie direkt oder über weitere Zwischenniveaus nach W_n zurück ($W_{n+2} \downarrow W_n$). Dabei senden sie Photonen aus. Doch geht ein Teil der Energie der angeregten Zustände in thermische Energie über anstatt in Photonen.

6. Treibhausgase emittieren und absorbieren Infrarot

Die Resonanzfluoreszenz der Natrium-Atome zeigt: Atome nehmen bei Frequenzen, die für sie charakteristisch sind, Lichtquanten auf; sie absorbieren Licht. Bei gleicher Frequenz emittieren sie es wieder, und zwar allseitig. Bei den zweiatomigen Molekülen O_2 und N_2 von Sauerstoff und Stickstoff geschieht dies bei der Photonenenergie $W = hf \approx 15$ eV, also erst im Ultraviolett (UV). Erst dort absorbieren diese Gase Licht, nicht im Sichtbaren; Luft ist für einige UV-Bereiche undurchsichtig. Die komplizierter gebauten Moleküle von Kohlenstoffdioxid (CO_2), Methan (CH_4) und Wasserdampf (H_2O) absorbieren und emittieren dagegen Licht intensiv schon bei $W = hf \approx 0,1$ eV, also im Infrarot. Diese Gase erzeugen deshalb den **→ Treibhauseffekt**. Auf die Frequenzen sichtbaren Lichts sprechen sie kaum an; Wasserdampf als Gas sieht man nicht.

Das ist wichtig

Quantenobjekte (Photonen, Elektronen, Atome, Moleküle) werden mithilfe der Planck-Konstanten h beschrieben. Sie zeigen Beugung und Interferenz. Dabei ordnet die Planck-Konstante h einander zu:

$$\begin{aligned} \text{Impuls } p &\leftrightarrow \text{deBroglie-Wellenlänge } \lambda_B = h/p, \\ \text{Energie } W &\leftrightarrow \text{Frequenz } f = W/h. \end{aligned}$$

Klassische Objekte: In makroskopischen Bereichen (z. B. in braunschen Röhren) gehorchen **Elektronen** der klassischen Newton-Mechanik. Dabei spielt die Planck-Konstante h keine Rolle.

Lichtstrahlen befolgen die **Strahlenoptik**. Diese gehört als Grenzfall der **Wellenoptik** zur klassischen Physik.

Wellenoptik ist der **klassische Grenzfall** der **Quantenoptik** und braucht die Planck-Konstante h nicht.

DeBroglie-Wellen (auch Ψ , **Materie- oder Wahrscheinlichkeitswellen** genannt) haben bei Elektronen, Protonen, Neutronen, ..., die mit Geschwindigkeit v und Impuls $p = mv$ fliegen, eine konstante Antreffwahrscheinlichkeit $|\Psi|^2$. Dagegen ist $|\Psi(x)|^2$ bei **stehenden Wellen** räumlich gewellt (Ketterle-Experiment, Quantenpferch, linearer Potenzialtopf).

Unbestimmtheitsrelationen: Zwischen den Unbestimmtheiten Δp_x des Impulses p_x und Δx des zugehörigen Orts x gilt bei Quantenobjekten

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \approx h.$$

Δx und Δp_x zeigen sich als Streuungen bei x - und p_x -Messungen an sehr vielen, einheitlich präparierten Quantenobjekten.

Zwischen der **Lebensdauer** Δt eines Quantenzustands und dessen **Energieunbestimmtheit** ΔW gilt

$$\Delta W \cdot \Delta t \approx h.$$

Stationäre Zustände sind zeitunabhängig ($\Delta t \rightarrow \infty$). Ihre Energie ist scharf bestimmt ($\Delta W \rightarrow 0$).

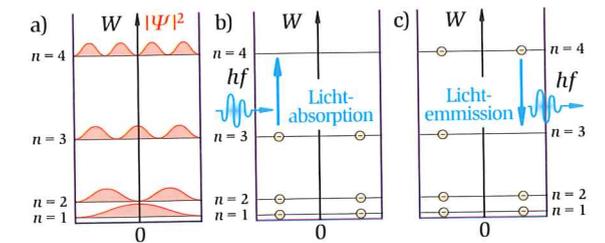
Quantenobjekte mit Masse m , die räumlich auf einen Bereich der Länge L eingengt sind, haben eine mit sinkendem L stark steigende **Lokalisationsenergie**

$$W_L \approx \frac{h^2}{8mL^2}.$$

Elektronen im hohen linearen **Potenzialtopf** der Breite L besetzen nur die scharf bestimmten **Energieniveaus**

$$W_n = \frac{h^2 n^2}{8m_e L^2}.$$

$n = 1, 2, 3, \dots$ sind die zugehörigen **Quantenzahlen**. Jedes Energieniveau kann wegen des **Pauliprinzips** höchstens 2 Elektronen aufnehmen.



Atome und Moleküle haben scharf bestimmte **Energieniveaus** **→ a**. Bei **Quantensprüngen** $W_n \uparrow W_{n+1}$ vom Niveau W_n in ein höheres Niveau W_{n+1} wird Energie aufgenommen **→ b**. Diese Energie wird oft durch **Emission** eines Photons abgegeben **→ c**, bei **Fluoreszenz** sofort, bei **Phosphoreszenz** verzögert.

Manche Stoffe absorbieren aus weißem Licht mit kontinuierlicher Frequenzverteilung die Photonen, die sie im angeregten Zustand emittieren. Im kontinuierlichen Farbspektrum des eingestrahlen Weiß entsteht eine dunkle Absorptionslinie (sog. **Umkehr der Spektrallinie**).

A1 Berechnen Sie, ob sichtbares Licht ein Elektron im linearen Potenzialtopf mit Länge $L = 1$ nm vom Grundzustand nach $n = 5$ heben kann und ob das beim Rücksprung nach $n = 4$ emittierte Licht sichtbar ist. Spielt dabei auch $n = 0$ eine Rolle? Begründen Sie Ihre Angaben.

A2 Ein Farbstoffmolekül mit 10 Elektronen hat die Länge $L = 0,2$ nm. Berechnen Sie, ob rotes Licht (600 nm bis 800 nm) ein Elektron vom obersten besetzten Zustand in den nächsten heben kann.

A3 Ermitteln Sie die Farbe eines Farbstoffmoleküls mit 18 C-Atomen, wenn weißes Licht darauf fällt (Atomabstand $a = 0,14$ nm).

A4 Photonen können nur mit passender Energie Atome anregen, Elektronen durch Stoß dagegen auch mit höheren Energien. Führen Sie dafür Beispiele an und begründen den Unterschied.

A5 Uwe sagt, die mehrmaligen Maxima beim Franck-Hertz-Versuch zeigen, dass im Hg-Atom mehrere Energiestufen mit gleichen Abständen übereinander liegen. Nehmen Sie Stellung dazu.

A6 Vergleichen Sie das Bild zum Quantenpferch mit dem Schattenbild beim Ketterle-Experiment. Vergleichen Sie mit klassischen Vorstellungen und Modellen an Hand von Skizzen.

A7 a) Bei der Beugung an einem Spalt mit Breite $b \approx \Delta x \approx 10\lambda$ landen einige Elektronen direkt auf der optischen Achse, hatten also den Querimpuls $p_x = 0$. Diskutieren Sie, ob dabei die UBR verletzt ist. **b)** Warum wäre die UBR verletzt, wenn Elektronen in einem Strahl schwingen würden, so wie Luftteilchen bei Schall?