

9 Quantenphysik

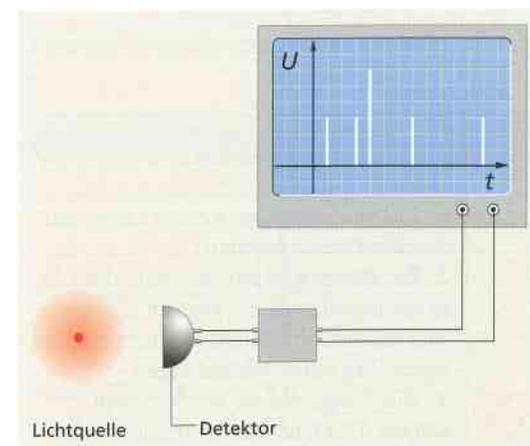
9.1 Quantenobjekte

Licht zeigt Wellenphänomene wie Beugung und Interferenz, aber beim Aussenden und beim Registrieren wird seine Energie in kleinen Portionen übertragen. Diese Energieportionen, die Photonen, besitzen zwar einen Impuls; andererseits verhalten sie sich nicht wie klassische Teilchen. Umgekehrt zeigen auch kleine Materie-Teilchen wie Elektronen oder Atome in manchen Situationen ein Verhalten, das mit den Gesetzen der klassischen Physik nicht übereinstimmt.

Dieses Verhalten zu beschreiben, ist das Anliegen der Quantenphysik, die für einige Problemstellungen auch als Quantenmechanik bezeichnet wird. Da viele Aussagen der Quantenphysik nicht in anschaulichen Bildern darzustellen sind, wird über die »richtige« Interpretation der Quantenphysik bis heute diskutiert.

9.1.1 Wahrscheinlichkeitsdeutung

Bei der Wechselwirkung mit Materie wird die Energie von Licht nur in ganzzahligen Vielfachen von bestimmten kleinsten Beträgen übertragen: Die Energie ist *quantisiert*. Die mit einem monochromatischen Lichtbündel übertragene Energie ist ein Vielfaches der Energie eines Photons.



312.1 Wann das nächste Photon in einem Empfänger registriert werden wird, lässt sich nicht genau voraussagen.

Dass dabei die Regeln der klassischen Physik nicht gelten, zeigt sich z. B. in Folgendem: Nach der klassischen Interpretation liegt an dem Detektor in Abb. 312.1 zu jedem Zeitpunkt eine bestimmte Lichtintensität vor, die auf die Feldstärke der elektromagnetischen Welle zurückzuführen ist. Die Intensität gibt dabei an, wie viel Energie in einer bestimmten Zeit auf eine bestimmte Fläche gestrahlt wird. Tatsächlich aber wird die Energie nicht kontinuierlich, sondern portionsweise registriert.

Aus der Intensität und der Größe der Energieportionen lässt sich zwar berechnen, wie viele Photonen beispielsweise in einer Sekunde auf einen Quadratzentimeter treffen, aber der zeitliche Abstand, in dem die Photonen registriert werden, ist nicht vorhersehbar. **Für das Auftreffen eines Quantenobjekts an einer bestimmten Stelle in einem bestimmten Zeitintervall kann nur eine Wahrscheinlichkeit angegeben werden.**

Auch in der klassischen Physik ist die Vorhersage mancher Einzelereignisse unmöglich. So lässt sich z. B. das Verhalten eines Spielwürfels nur mit relativen Wahrscheinlichkeiten für die sechs Seiten prognostizieren. Der Grund hierfür ist, dass die Anfangssituation und kleine Störungen nicht absolut genau erfasst werden können, also etwa der Startwinkel oder kleine Luftströmungen während des Wurfs (vgl. auch S. 206). Dass sich über das Verhalten von Quantenobjekten nur Wahrscheinlichkeitsaussagen treffen lassen, liegt jedoch nicht an äußeren Störungen oder unzureichenden Messapparaturen. **Es besteht grundsätzlich keine Möglichkeit, das Verhalten eines einzelnen Quantenobjekts genau vorherzusagen.**

9.1.2 Quanteninterferenz

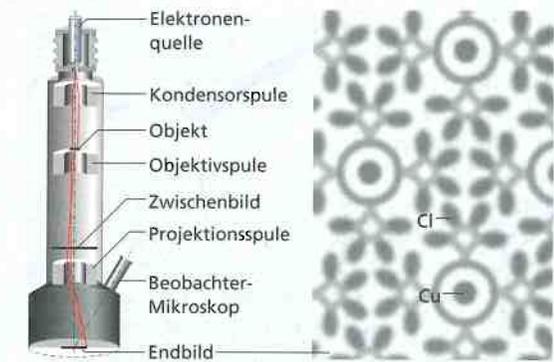
Das Experiment 9.1 kann diesen Sachverhalt verdeutlichen, indem das Schirmbild eines Michelson-Interferometers untersucht wird. Bei Verwendung von polarisiertem Licht aus einem Laser entsteht das typische Interferenzmuster (s. S. 275). Wird jeder der Lichtwege mit einem Polarisationsfilter versehen und stehen die Transmissionsrichtungen der Filter senkrecht zueinander, so findet keine Interferenz statt.

Elektronenmikroskop

Kann man Atome sehen? – Mit bloßem Auge gelingt das nicht, aber auch unter einem gewöhnlichen Mikroskop sind sie nicht zu erkennen. Denn ähnlich wie ein Fernrohr (s. S. 306) besitzt auch das Lichtmikroskop ein begrenztes Auflösungsvermögen. Im besten Fall lassen sich damit Strukturen untersuchen, die mindestens so groß sind wie die Wellenlänge des verwendeten Lichts, also z. B. 400 nm bei blauem Licht. Atome jedoch sind ungefähr 0,1 nm groß – es müsste also Röntgenstrahlung eingesetzt werden, um sie mit einem Mikroskop aufzulösen. Diese lässt sich jedoch mit gewöhnlichen Sammellinsen nicht fokussieren.

Ernst Ruska hatte die Idee, als kurzwellige Strahlung schnelle Elektronen zu verwenden, und baute 1933 das erste Elektronenmikroskop. Hierbei nutzte er aus, dass Elektronen auch Welleneigenschaften besitzen (S. 316). Die Wellenlänge λ der Elektronen ist umso kleiner, je größer ihre Geschwindigkeit ist. Bei einer Beschleunigungsspannung von 4000 V z. B. beträgt die Wellenlänge 0,019 nm.

Den Strahlengang im Elektronenmikroskop konzipierte Ruska analog zum Lichtmikroskop (Abb. 313.1). Anstelle von optischen Linsen werden hier jedoch Magnetlinsen verwendet. Diese bestehen aus Spulen, die so angeordnet sind, dass die Elektronen vom Magnetfeld der Spulen auf einen Brennpunkt hin abgelenkt werden. Im Transmissionselektronenmikroskop wird das zu untersuchende Objekt mit Elektronen



313.1 Vereinfachter Aufbau eines Elektronenmikroskops

bestrahlt. Die Objektivspulen fokussieren die transmittierten Elektronen und erzeugen ein Zwischenbild. Dieses Zwischenbild wird anschließend durch die Projektionsspulen noch einmal vergrößert und lässt sich auf einem Leuchtschirm oder einer Fotoplatte beobachten.

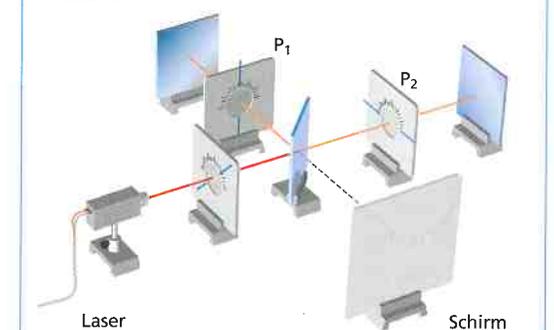
Die besten Lichtmikroskope vergrößern lediglich um einen Faktor 1000. Mit dem Elektronenmikroskop lässt sich dagegen eine bis zu 500 000-fache Vergrößerung erzielen. Dies reicht aus, um bei einer Beschleunigungsspannung von 500 keV einzelne Atome sichtbar zu machen (Abb. 313.1). Allerdings muss es sich dabei um Atome mit vielen Elektronen handeln, die in einer regelmäßigen Kristallstruktur angeordnet sind.

1. Nehmen Sie Stellung zu der Frage: „Kann man Atome sehen?“

Im Wellenmodell wird dies damit erklärt, dass zueinander senkrecht polarisierte Wellen nicht miteinander interferieren.

Um das Experiment im Photonenmodell zu deuten, muss auch jedem Photon eine Polarisationsrichtung zugeordnet werden. Je nach Polarisationsrichtung des Photons und Stellung des Filters besteht eine bestimmte Wahrscheinlichkeit, dass das Photon hindurchgelassen wird. Sind die Richtungen parallel, ist diese Wahrscheinlichkeit 1, stehen die Richtungen senkrecht aufeinander, ist sie 0. Für alle anderen Winkel θ zwischen Polarisierung des Photons und Stellung des Filters ergeben sich nach dem Gesetz von MALUS dazwischenliegende Werte (s. S. 277). Eine vorläufige Interpretation des Experiments könnte dann lauten: Zwei Photonen, die die Polarisationsfilter passiert haben, können miteinander in-

EXPERIMENT 9.1



Polarisiertes Laserlicht mit einer Schwingungsrichtung von 45° zur Senkrechten wird auf ein Michelson-Interferometer geleitet. Werden in die Lichtwege senkrecht zueinander orientierte Polarisationsfilter gebracht, verschwindet das Interferenzmuster.

terferieren. Stehen jedoch die Polarisationsrichtungen der Photonen senkrecht zueinander, findet keine Interferenz statt (Abb. 314.1 b). Diese Interpretation, die von der Interferenz mehrerer Photonen ausgeht, ist jedoch unzureichend.

Interferenz eines Photons mit sich selbst Die Intensität des Lichts in Exp. 9.1 kann so sehr abgeschwächt werden, dass sich immer nur ein einziges Photon zwischen Laser und Schirm aufhält. Aber auch dann kommt es zu einer Interferenz: Mit einem geeigneten Detektor wird das typische Interferenzmuster registriert; die relative Wahrscheinlichkeit, an einem bestimmten Ort auf dem Schirm ein Photon zu registrieren, ist bei einzeln auftreffenden Photonen die gleiche wie bei großer Lichtintensität. Jedes einzelne Photon reagiert also darauf, dass zwei Wege zur Verfügung stehen: Das Photon *interferiert sich selbst*. Ein anschauliches Bild dieser Selbstinterferenz lässt sich jedoch nicht angeben.

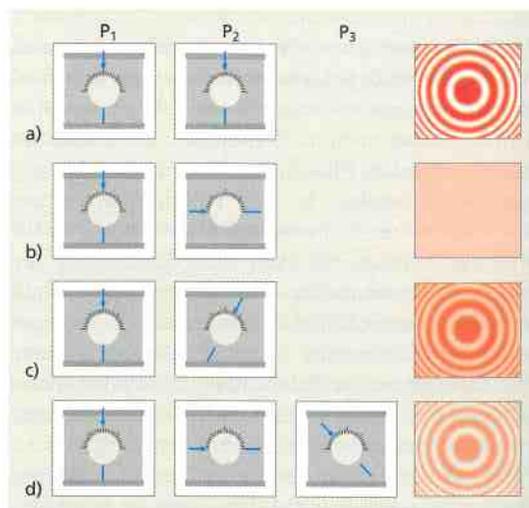
Interferenz und Information Das Photon zeigt dann Interferenz, wenn zwei Wege zwischen Laser und Schirm möglich sind. Die Interferenz verschwindet hingegen, wenn ein Beobachter eine eindeutige Information über den Weg des Lichts erhalten könnte. Dies ist dann der Fall, wenn die Polarisationsfilter eingebracht werden: Ein senkrecht polarisiertes Photon hat eindeutig den Weg 1 genommen, ein horizontal polarisiertes Photon eindeutig den Weg 2. Das Interferenzmuster erscheint jedoch wieder, wenn wie in Exp. 9.2 hinter das Interferometer ein weiterer Polarisationsfilter gehalten wird, dessen Transmissionsrichtung einen Winkel von 45° zu den beiden anderen hat (Abb. 314.1 d). Durch diesen Filter wird



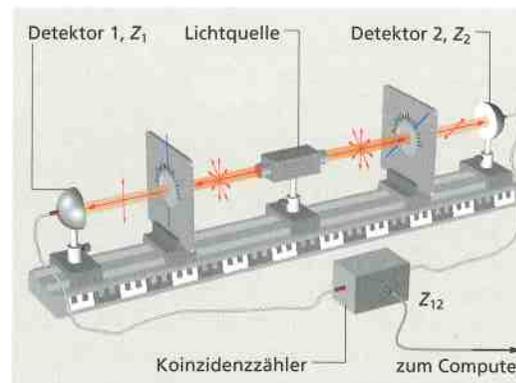
die Weginformation ausgelöscht, denn sowohl ein Teil des senkrecht polarisierten Lichts als auch ein Teil des horizontal polarisierten Lichts kann diesen Filter passieren: Für ein Photon von Weg 1 besteht dieselbe Wahrscheinlichkeit, durch diesen dritten Filter zu gelangen, wie für ein Photon von Weg 2. Der dritte Filter »radiert« die Information über den Weg jedes Photons aus. Hierin zeigt sich eine weitere grundlegende Besonderheit der Quantenobjekte. **Fundamentalprinzip der Quantenphysik: Quanten zeigen Interferenz, wenn sie auf mehreren Wegen zum Empfänger gelangen können und keine Information darüber möglich ist, welchen Weg sie genommen haben.**

9.1.3 Verschränkung

Diese Eigenschaften der Quantenobjekte haben zu heftigen Auseinandersetzungen über die Interpretation physikalischer Beschreibungen geführt. Schwerwiegende Einwände erhob ALBERT EINSTEIN, der der Meinung war, dass die Quantenphysik unvollständig sei und sich nur deshalb auf statistische Aussagen beschränken müsse. Gemeinsam mit BORIS PODOLSKI und NATHAN ROSEN entwickelte er ein Gedankenexperiment, das mittlerweile auch als reales, so genanntes EPR-Experiment durchführbar ist. Abbildung 315.1 zeigt eine Lichtquelle, die unpolarisiertes Licht zu entgegengesetzt liegenden Empfängern aussendet; diese messen die Photonen-Zählraten Z_1 und Z_2 . Der Zähler in der Mitte vergleicht die Ereignisse in den beiden Detektoren: Er misst die Zählrate Z_{12} , die angibt, wie viele Photonen gleichzeitig, also innerhalb eines kleinen Zeitintervalls Δt , in den beiden Detektoren registriert werden.



314.1 Schirmbilder im Michelson-Interferometer



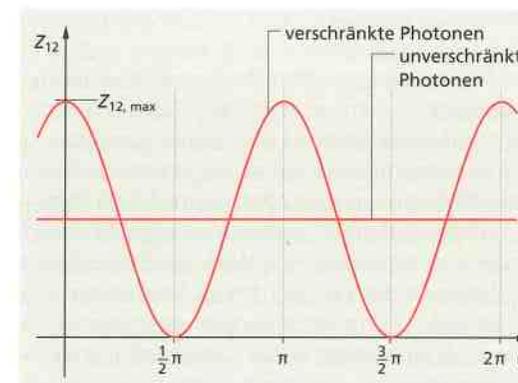
315.1 EPR-Experiment: Der Koinzidenzzähler reagiert auf gleichzeitige Signale von den Detektoren 1 und 2.

Vor jedem Detektor befindet sich ein Polarisationsfilter. Da die Quelle unpolarisiertes Licht aussendet, sind die Zählraten Z_1 und Z_2 immer gleich groß, unabhängig von den Stellungen der beiden Filter. Auch die Zählrate Z_{12} hängt nicht von der Stellung der Filter ab: In jedem Zeitintervall Δt werden zufällig einige Photonen gleichzeitig in Detektor 1 und Detektor 2 registriert. Es gibt keine Korrelationen zwischen den Photonen, die in entgegengesetzte Richtungen ausgesandt werden.

Diese Situation ändert sich, wenn eine besondere Lichtquelle verwendet wird, in der bei einer einzigen Wechselwirkung zwei Photonen gleicher Energie in entgegengesetzte Richtungen ausgesandt werden. Auch das Licht solcher Lichtquellen ist unpolarisiert. Daher sind die Zählraten Z_1 und Z_2 von der Stellung der Polarisationsfilter unabhängig. Die Zählrate der gleichzeitigen Detektionen Z_{12} hängt bei einer solchen Lichtquelle allerdings davon ab, wie groß der Winkel θ zwischen den Transmissionsrichtungen der beiden Polarisationsfilter ist (Abb. 315.2). Stehen die Transmissionsrichtungen parallel, so ist die Zählrate der gleichzeitig detektierten Photonen maximal. Stehen die Transmissionsrichtungen senkrecht zueinander, so wird nie gleichzeitig in den Detektoren 1 und 2 ein Photon registriert: $Z_{12} = 0$.

Ein erster Erklärungsversuch: Man könnte vermuten, dass die Polarisationsrichtungen von zwei zeitgleich ausgesandten Photonen stets dieselben sind. Da es sich um unpolarisiertes Licht handelt, werden dann Photonenpaare mit beliebigen, aber jeweils gleichen Polarisationsrichtungen erzeugt; diese Richtungen ständen im Allgemeinen schräg zu den Transmissionsrichtungen der Filter.

Diese Erklärung ist jedoch nicht schlüssig. Für jedes Photon gäbe es eine bestimmte Wahrscheinlichkeit, die Filter zu passieren. Stehen die Transmissions-



315.2 Wahrscheinlichkeit eines zeitgleichen Auftreffens von Photonen in den Detektoren des EPR-Experiments

richtungen der Filter senkrecht zueinander und steht die Polarisationsrichtung der Photonen schräg dazu, so gäbe es für beide Photonen eine Wahrscheinlichkeit ungleich null, die Filter zu passieren. Demzufolge gäbe es auch immer eine von null verschiedene Wahrscheinlichkeit, gleichzeitig Photonen zu detektieren. Die Zählrate Z_{12} dürfte also auch bei senkrechter Stellung der Filter zueinander niemals auf null zurückgehen.

Die Photonen, die von der Lichtquelle ausgesandt werden, sind also in besonderer Weise korreliert, sie sind *verschränkt*: Tritt bei $\theta = 90^\circ$ das eine Photon eines Paares durch einen Filter, so kann das andere Photon nicht durch den anderen Filter treten, selbst wenn seine Polarisationsrichtung schräg zur Transmissionsrichtung steht. Das Messergebnis in dem einen Detektor hängt also mit dem Messergebnis des anderen zusammen. Wird beispielsweise im Detektor 2 ein Photon nachgewiesen, folgt daraus, dass im selben Moment in Detektor 1 kein Nachweis stattfindet. **Ein System aus zwei Quantenobjekten kann verschränkt sein. Die Messung eines Zustands von einem der beiden Quantenobjekte gibt dann Auskunft über den Zustand des zweiten, auch wenn sich die Objekte weit voneinander entfernt haben.**

9.1.4 Elektronen als Quantenobjekte

Eine Besonderheit der Photonen besteht darin, dass sie Interferenz zeigen können, wenn ihnen mehrere Wege zur Verfügung stehen. Der Franzose LOUIS DE BROGLIE (1892–1987) nahm an, dass dieses Verhalten nicht auf Photonen beschränkt sei, sondern grundsätzlich auch bei bislang als materiell angesehenen Teilchen wie Elektronen zu finden sein müsste. Demnach müssten auch diese Quanten eine Wellenlänge besitzen.

315-1
Verborgene Variable
315-2
Quantenkryptografie

Teleportation

Nackte Betonwände, spärliche Neonbeleuchtung, an der Seite ein langer, metallener Kabelschacht direkt neben den Rohren der Wiener Kanalisation. In dieser Umgebung gelang es österreichischen Physikern im Jahr 2004, Lichtteilchen von einem Donauufer zum anderen zu beamen – die erste Fern teleportation der Welt. Bereits einige Jahre zuvor hatten sie es erstmals geschafft, die Eigenschaften eines Photons quer über ihren Labortisch zu transportieren – und zwar *instantan*, also ohne jede Zeitverzögerung. Die Physiker teleportieren allerdings nicht die Lichtteilchen selbst, sondern nur ihre Eigenschaften.

Für eine Teleportation benötigen sie verschränkte Photonen. Diese werden erzeugt, indem die Forscher einen Laserstrahl in einen nichtlinearen Kristall schicken, der aus einem hochenergetischen Photon zwei niederenergetische mit jeweils der halben Energie macht. Diese beiden Photonen fliegen in unterschiedlichen Richtungen davon. Das Besondere an einem verschränkten Photonenpaar ist: Eine Eigenschaft wie beispielsweise den Polarisationszustand trägt nicht jedes Photon für sich. Wird dieser Zustand jedoch an einem Teilchen detektiert, so wird der Zustand des anderen Teilchens damit instantan festgelegt. Die Verschränkung der Teilchen wird dadurch allerdings zerstört.

Wellenlänge von Elektronen Für den Impuls p eines Photons der Wellenlänge λ gilt Gl. (8.16):

$$p = \frac{h}{\lambda}$$

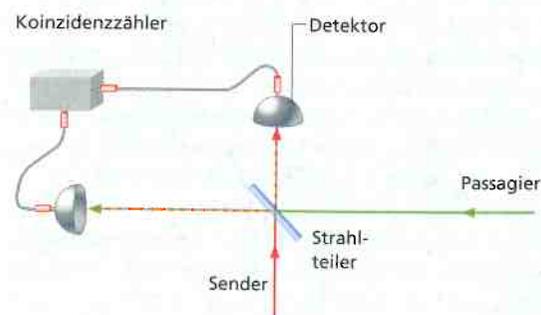
Angewandt auf Materieteilchen der Masse m ergibt sich daraus deren Wellenlänge:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m \cdot v} \quad (9.1)$$

Diese wird auch als De-Broglie-Wellenlänge bezeichnet. Um also die Wellenlänge eines Elektrons zu bestimmen, muss lediglich seine Geschwindigkeit v bekannt sein. Im Falle von Elektronen, die in einer Röhre beschleunigt wurden, ergibt sich v aus der Beschleunigungsspannung U_a (s. S. 116). Für die kinetische Energie gilt:

$$\frac{1}{2} m \cdot v^2 = e \cdot U_a, \text{ also } v = \sqrt{\frac{2e \cdot U_a}{m}}$$

Für die Teleportation lassen die Wissenschaftler einen der beiden Photonenzwillinge, den *Sender*, mit einem dritten Photon, dem *Passagier*, auf einen Strahlteiler treffen. Je nachdem, ob die Photonen von dem Strahlteiler reflektiert oder durchgelassen werden, gelangen sie zu unterschiedlichen Detektoren (Abb. 316.1). Am Strahlteiler interferieren Sender und Passagier miteinander. Aufgrund der Verschränkung des Passagiers mit seinem Zwillingenphoton, dem Empfänger, legt die Wechselwirkung zwischen Sender und Passagier auch den Zustand des entfernten Empfängers fest. Der Zustand des Empfängers hängt davon ab, wie die beiden Photonen am Strahlteiler interferieren. Interferieren sie so, dass sie den



316.1 Passagier und Sender werden an einem Strahlteiler überlagert. Verlassen sie den Strahlteiler an unterschiedlichen Ausgängen, registriert der Koinzidenzzähler gleichzeitig ein Signal von beiden Detektoren. Dann wurde der Zustand des Passagierphotons auf das Empfängerphoton übertragen.

Einsetzen in Gl. (9.1) führt auf:

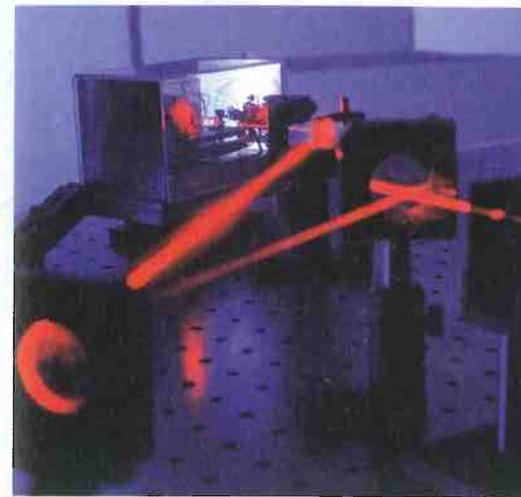
$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2e \cdot U_a} \cdot m} \quad (9.2)$$

So besitzen Elektronen, die z. B. mit einer Spannung von 3000 V beschleunigt worden sind, eine Wellenlänge von $2,2 \cdot 10^{-11}$ m. Diese Wellenlänge ist klein im Vergleich zur Wellenlänge des sichtbaren Lichts.

Interferenz am Doppelspalt Die Interferenz von Licht zeigt sich besonders deutlich an einem Doppelspaltexperiment. Um ein entsprechendes Experiment auch mit Elektronen durchführen zu können, muss der Spaltabstand d sehr klein sein. Denn für das Auftreten der Maxima gilt nach Gl. (8.5)

$$\sin \alpha_n = n \cdot \frac{\lambda}{d}$$

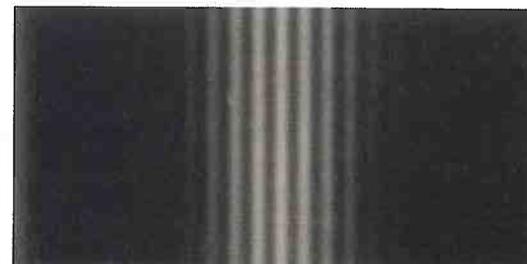
Für kleine Werte von λ muss also auch d hinreichend klein sein, damit eine messbare Abweichung von der



317.1 Experimenteller Aufbau der Überlagerung am Strahlteiler. Der Strahlengang wird durch einen roten Hilfslaser, sichtbar gemacht. Im tatsächlichen Experiment werden einzelne Photonen durch den Aufbau geschickt. Die würde man auf einem Foto nicht sehen.

Strahlteiler an unterschiedlichen Ausgängen verlassen, d. h., beide Detektoren registrieren gleichzeitig je ein Photon, dann ist der neue Zustand des Empfängers der gleiche wie der des Passagiers. Die Teleportation passiert in dem Augenblick, in dem Sender und Passagier von den Detektoren registriert werden. Bei der Detektion werden die beiden Photonen absorbiert. Übrig bleibt allein das Empfängerteilchen, das fortan die Eigenschaften des Passagiers trägt.

ursprünglichen Richtung der Elektronenbewegung zustande kommt. Ein solches Experiment gelang erstmals im Jahr 1961 CLAUS JÖNSSON, der einen Spaltabstand von $2 \mu\text{m}$ verwendete. Aber auch bei diesem geringen Abstand musste das Interferenzmuster noch mithilfe eines Elektronenmikroskops nachvergrößert werden (Abb. 317.2).



317.2 Interferenz von Elektronen auf dem Schirm hinter einem Doppelspalt

Um die Teleportation nicht nur im Labor, sondern auch über größere Distanzen sichtbar zu machen, verlegten die Physiker ein Glasfaserkabel unterhalb der Donau. Die Sendestation ihres Quantenbeamers liegt in einer abgeteilten Ecke eines Pumpwerks: ein großer, wuchtiger Tisch mit Hunderten von Spiegeln, Linsen und Blenden. Sie führen einen intensiven grünen Laserstrahl im Zickzack über den Tisch. Ein Konverter verwandelt das Grün in einen unsichtbaren UV-Strahl. Dieser wird zum Herzstück der Anlage gelenkt, einem durchsichtigen, nur 3 Millimeter messenden Kristall, der die verschränkten Photonen erzeugt. Eines wird in ein schwarz ummanteltes Glasfaserkabel geleitet, das durch den Kanal die Donau unterquert. Das andere lassen die Physiker mit dem Passagier, also dem Photon, dessen Eigenschaften teleportiert werden sollen, zusammentreffen. Alle 30 Sekunden kann die Maschine computergesteuert ein Photon beamen. Am anderen Donauufer stecken in einem kleinen Abstellraum die Empfangsstation, ein Rechner und ein Stahlgerüst mit den Lichtsensoren. Die Apparatur registriert die Photonen aus der Glasfaser und misst, ob die Lichtquanten die richtige Polarisation zeigen.

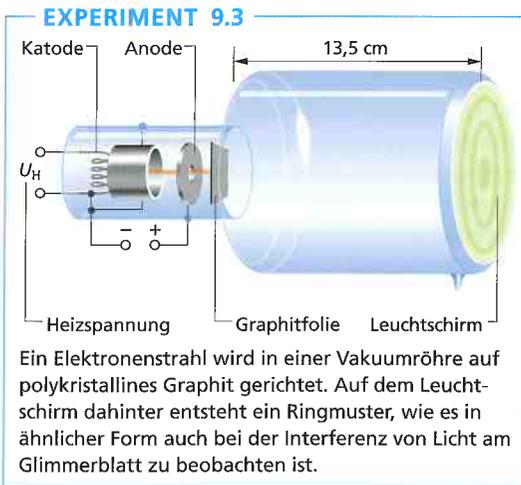
1. Beschreiben Sie, wie mithilfe der Teleportation Information übertragen werden kann. Begründen Sie, dass die Informationsübertragung nicht instantan geschieht.

317-1 Weiterführendes Material

AUFGABE

Berechnung der Intensitätsverteilung Die Interferenz am Doppelspalt führt zu einer vom Ort des Empfängers E abhängigen Auftreffwahrscheinlichkeit. Diese Wahrscheinlichkeit entspricht der Intensität eines Elektronenstrahls am Empfängerort. Zur Berechnung der Intensitätsverteilung kann wie im Falle des Lichts der Zeigerformalismus benutzt werden (s. S. 290). Dabei werden für alle denkbaren Wege Zeiger gleicher Länge gezeichnet; die Zeiger werden entsprechend ihrer Stellung am Empfängerort vektoriell addiert. Das Quadrat des resultierenden Zeigers Z_{res} entspricht dann der relativen Wahrscheinlichkeit, ein Elektron zu detektieren.

Interferenz an Kristallen Experiment 9.3 zeigt die Quanteneigenschaften von Elektronen, ohne dass hierfür ein besonderer Doppelspalt hergestellt worden ist. Wie bei der Interferenz von Licht an einem Glimmerblatt (S. 274) können dünne Schichten auch



318-1
Quantitative Auswertung von Exp. 9.3

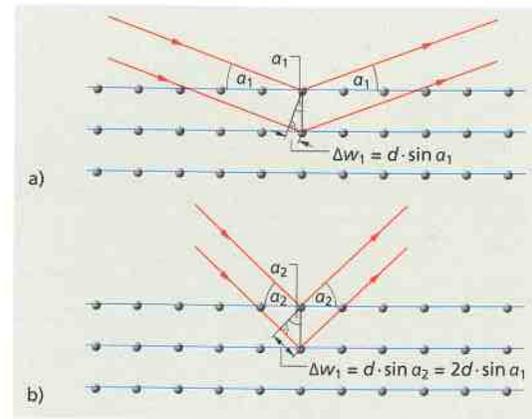
Interferenz von Elektronen bewirken. Diese dünnen Schichten sind in Exp. 9.3 die *Netzebenen* von Kristallen, die durch die regelmäßige Anordnung der Atome gebildet werden (Abb. 318.2). An den Netzebenen werden die Elektronen in einer Art gestreut, die ähnlich der Reflexion von Licht ist. Auf dem Leuchtschirm der Röhre kommt es je nach Wegunterschied über die verschiedenen Netzebenen zu Maxima und Minima (Abb. 318.1). Maxima entstehen, wenn die Weglängendifferenz gleich der Wellenlänge oder einem ganzzahligen Vielfachen von ihr ist, wenn also gilt:

$$\Delta w = \Delta w_1 + \Delta w_2 = n\lambda.$$

Daraus ergibt sich die **Bragg'sche Gleichung**

$$\sin \alpha_n = \frac{n \cdot \lambda}{2d}. \quad (9.3)$$

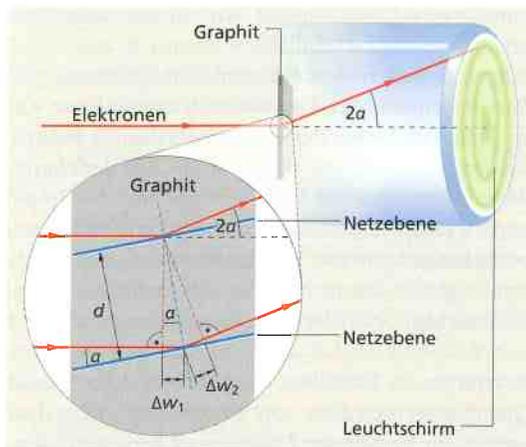
Hierbei ist d der Netzebenenabstand. Der Ablenkwinkel gegenüber dem ursprünglichen Elektronenstrahl beträgt in einem Interferenzmaximum $2\alpha_n$.



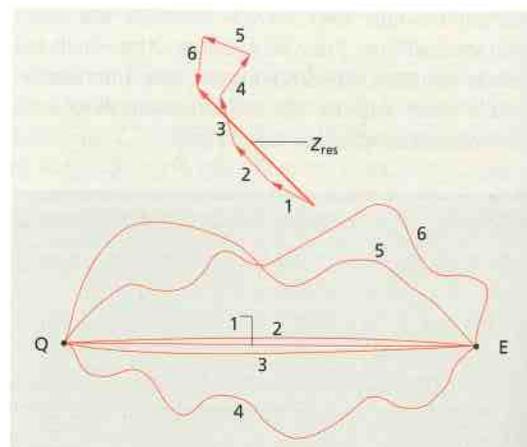
318.2 Netzebenen im Kristall: Weglängendifferenzen a) für das erste, b) für das zweite Interferenzmaximum

Die Graphitprobe in Exp. 9.3 enthält viele kleine Kristalle mit unterschiedlich orientierten Netzebenen. Diese wirken wie einzelne teildurchlässige Spiegel, die aber nicht unter jedem Einfallswinkel reflektieren, sondern nur dann, wenn die Reflexion an den Schichtebenen nicht zu destruktiver Interferenz führt. Zu Maxima kommt es, wenn die Bragg'sche Gleichung erfüllt ist. Durch die Vielzahl der Kristalle entsteht ein Interferenzmuster, das symmetrisch zum einfallenden Elektronenstrahl ist, also aus Ringen besteht.

Elektronenbahnen Elektronen breiten sich in einer Elektronenröhre aus wie Licht, das z. B. aus einem Laser stammt: Wenn sie geeignet gebündelt werden, entsteht ein dünnes geradliniges Bündel. Allerdings lässt sich nach dem Fundamentalprinzip der Weg eines einzelnen Elektrons nicht verfolgen, sofern dem Elektron mehrere Wege zur Verfügung stehen.



318.1 Lage der Beugungmaxima und ihr Zusammenhang mit dem Netzebenenabstand d



318.3 Nur Bahnen nahe der direkten Verbindung tragen zum resultierenden Zeiger bei.

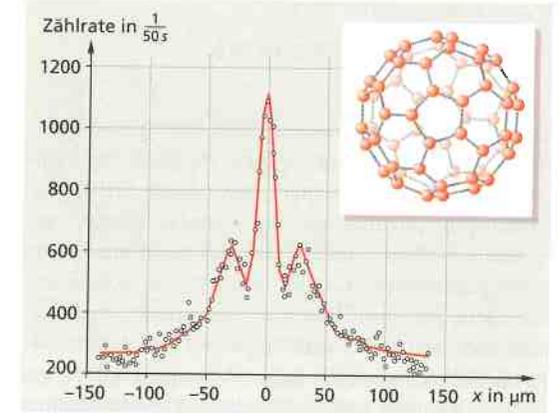
Ein Elektron ist ein Quantenobjekt, das auf das Vorhandensein mehrerer Wege reagiert. Nach dieser Interpretation kommt die geradlinige Flugbahn eines Elektrons durch Interferenz zustande (Abb. 318.3). Nur Bahnen, die in der Nähe der geradlinigen Verbindung zwischen Quelle und Empfänger liegen, tragen nennenswert zum resultierenden Zeiger Z_{res} bei (vgl. S. 299).

9.1.5 Neutronen, Atome und Moleküle

Nach den Experimenten zur Interferenz von Elektronen lag es nahe, auch andere Bestandteile der Materie daraufhin zu untersuchen, ob sie sich wie Quantenobjekte verhalten. Es stellte sich heraus, dass dies auch für vergleichsweise massereiche Teilchen zutrifft.

Neutronen z. B. besitzen eine mehr als 1800-mal so große Masse wie Elektronen und auch mit ihnen sind Interferenzexperimente möglich. Solche Experimente werden in großem Umfang für Strukturuntersuchungen eingesetzt. Sogar Atome und Moleküle wurden inzwischen zur Interferenz gebracht. In diesen Fällen wird zur Berechnung der De-Broglie-Wellenlänge die Masse des gesamten Moleküls verwendet. Die Moleküle werden im Experiment einzeln durch äußerst feine Beugungsgitter geschickt.

Ein Beispiel für ein verhältnismäßig großes Quantenobjekt ist das Fullerene C_{60} , ein fußballförmiges Molekül aus 60 Kohlenstoffatomen (Abb. 319.1). Bei der Interferenz von C_{60} werden die Moleküle von



319.1 Registrierte C_{60} -Moleküle nach der Beugung an einem Gitter

einem Ofen mit einer Geschwindigkeit von rund 200 m/s ausgesendet. Die Moleküle haben eine Masse von 720 atomaren Einheiten, also $1,2 \cdot 10^{-24}$ kg. Ihre Wellenlänge beträgt damit etwa $2,75 \cdot 10^{-12}$ m. Sie ist deutlich kleiner als das Molekül selbst, das einen Durchmesser von etwa 1 nm besitzt.

Die Interferenz dieser Moleküle wurde an einem Gitter mit einer Gitterkonstante von 100 nm beobachtet. Die Intensitätsverteilung zeigt Abb. 319.1. Auch hierbei gilt, dass nicht eines der Moleküle einen Weg durch eine bestimmte Gitteröffnung nimmt und ein anderes Molekül einen anderen Weg. Stattdessen »nimmt« jedes C_{60} -Teilchen alle Wege, es interferiert mit sich selbst. Auch diese vergleichsweise ausgedehnten Körper sind damit Quantenobjekte.

319-1
Simulation zu Teilchen am Doppelspalt

319-2
Simulation zur Quantenphysik

1. Licht und Elektronen zeigen bei einem entsprechenden Experiment – z. B. hinter einem Doppelspalt – ähnliche Interferenzerscheinungen. Aufgrund der Ähnlichkeit mit den Interferenzerscheinungen von Wasserwellen wurde auch für Elektronen ein Wellenmodell entwickelt. Erläutern Sie, wie die Wellen und deren Überlagerung bei Elektronen interpretiert werden, und stellen Sie den Unterschied zu Wasserwellen heraus.
2. In einer Elektronenröhre werden Elektronen durch eine Spannung von 5000 V auf einen Doppelspalt hin beschleunigt. Mit dem Experiment soll untersucht werden, ob auch Elektronen ähnlich wie Licht Interferenzerscheinungen zeigen. Der Doppelspalt weist einen Spaltmittenabstand von $1 \mu\text{m}$ auf. Berechnen Sie den zu erwartenden Abstand der Maxima auf einem Schirm, der sich $0,15$ m hinter dem Doppelspalt befindet.
3. In einer Apparatur zur Messung von Interferenzen beträgt der Abstand vom Doppelspalt zum

Schirm $0,5$ m. Interferenzen können nachgewiesen werden, wenn der Abstand vom $0.$ zum $1.$ Maximum mindestens $0,1$ mm beträgt. Diskutieren Sie Bedingungen für Spaltabstand und Wellenlänge, unter denen sich Interferenzen zeigen.

4. In einer Apparatur soll ein Experiment zu Interferenzerscheinungen von Elektronen am Doppelspalt durchgeführt werden. Die Interferenzen können nachgewiesen werden, wenn auf dem Beobachtungsschirm der Abstand vom $0.$ zum $1.$ Maximum mindestens $0,1$ mm beträgt. Die Spaltmitten haben einen Abstand von $2 \cdot 10^{-6}$ m. Die Elektronen können durch eine Spannung von 50 V bis 5000 V beschleunigt werden.
 - a Bestimmen Sie die Spannung, ab der Interferenzerscheinungen zu beobachten sind.
 - b Diskutieren Sie das Ergebnis und begründen Sie, dass man solche Experimente vorzugsweise mit Kristallen durchführt.

Weitere Aufgaben → S. 326

318-2
Modellexperimente mit Mikrowellen

9.2 Elemente der Quantenmechanik

Die Quantenmechanik ist ein Teil der Quantenphysik. Mit ihr lässt sich berechnen, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, an einem bestimmten Ort Quantenobjekte anzutreffen. Sie benutzt hierfür ein besonderes Wellenmodell, das sich nicht auf die im vorangegangenen Kapitel dargestellte Interferenz und Beugung von Elektronen beschränkt. Andererseits wird bei der Verwendung dieses quantenmechanischen Wellenmodells keine Aussage darüber getroffen, wie man sich die Wechselwirkung zwischen Quantenobjekten vorzustellen hat.

Ein großes Anwendungsgebiet der Quantenmechanik ist die Berechnung von Aufenthaltswahrscheinlichkeiten für die Elektronen in der Atomhülle. Ebenso wird das Verhalten der Kernbausteine und der Elementarteilchen durch die Gesetze der Quantenmechanik beschrieben (s. Kap. 10 und 11).

9.2.1 Materiewellen

Intensität von Wellen Quantenobjekte zeigen Interferenz – ein Verhalten, das auch an klassischen Wellen beobachtet werden kann. Solche mechanischen oder elektromagnetischen Wellen werden durch physikalische Größen beschrieben, die sich zeitlich und räumlich periodisch ändern. Diese Größen sind beispielsweise die Auslenkung y oder die elektrische Feldstärke E . Harmonische Wellen werden dann durch die Gleichungen (7.4) bzw. (7.12) beschrieben. Mit dem Phasenwinkel $\varphi = 2\pi(t/T - x/\lambda)$ gilt:

$$y(x, t) = y_{\max} \cdot \sin \varphi \quad \text{und} \quad (9.4)$$

$$E(x, t) = E_{\max} \cdot \sin \varphi. \quad (9.5)$$

Die Intensität I dieser Wellen an einem bestimmten Ort ist jeweils proportional zum Quadrat der Amplitude, also: $I \sim y_{\max}^2$ bzw. $I \sim E_{\max}^2$.

Die Intensität einer Welle stellt dabei eine Energiedichte dar: Sie gibt an, wie viel Energie pro Zeit durch eine bestimmte Fläche tritt. Die Einheit der Intensität ist W/m^2 .

Im Falle von Licht entspricht die Intensität der Wahrscheinlichkeit, an einem bestimmten Ort Photonen zu registrieren. Um sie zu bestimmen, wird im Zeigerformalismus der Betrag des resultierenden Zeigers Z_{res} berechnet. Dieser Betrag ergibt sich durch vektorielle Addition der Zeiger aller zur Verfügung stehenden Lichtwege. Die Größe Z_{res}^2 ist dann ein Maß für die Intensität.

Wellenfunktion und Wahrscheinlichkeitsdichte In der Quantenmechanik wird die Ausbreitung von Quantenobjekten mithilfe von Materiewellen beschrieben. Die Größe, die sich räumlich und zeitlich ändert, wurde von ERWIN SCHRÖDINGER (1887–1961) eingeführt und mit dem griechischen Buchstaben Ψ (gesprochen: Psi) bezeichnet. Allerdings stellt Ψ keine unmittelbar messbare Größe wie eine Länge oder eine Feldstärke dar. Die Funktionswerte der Wellenfunktion sind komplexe Zahlen:

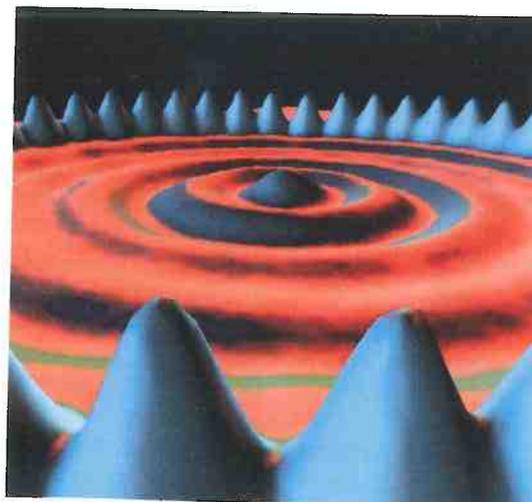
$$\Psi(x, t) = \Psi_0 \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi). \quad (9.6)$$

Dabei ist die Zahl i die *imaginäre Einheit*: $i = \sqrt{-1}$. Physikalische Bedeutung hat aber das Quadrat des Absolutwerts von Ψ , also: $|\Psi(x, t)|^2$. Dies ist stets eine positive reelle Zahl. Sie gibt an, mit welcher Wahrscheinlichkeit ein Quantenobjekt zu einem bestimmten Zeitpunkt t in einem kleinen Volumenelement ΔV angetroffen wird. Dieses Volumenelement ΔV umgibt den Ort x . Die Zahl $|\Psi(x, t)|^2$ stellt also eine Wahrscheinlichkeitsdichte dar.

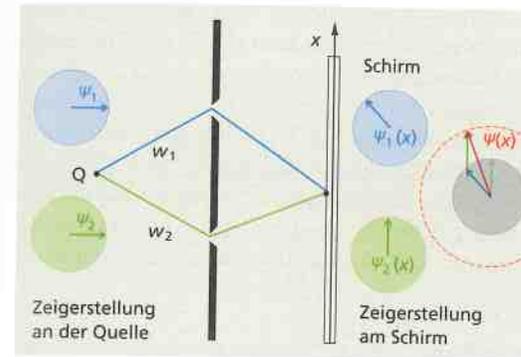
Quantenobjekte werden mithilfe der Wellenfunktion $\Psi(x, t)$ beschrieben. Für die Wahrscheinlichkeit P , ein Quantenobjekt in einem Volumenelement ΔV nachzuweisen, gilt:

$$P(x, t) \cdot \Delta V = |\Psi(x, t)|^2 \cdot \Delta V. \quad (9.7)$$

Diese Wahrscheinlichkeitsinterpretation wurde 1926 von MAX BORN formuliert. Danach entspricht Ψ dem Zeiger Z_{res} , der in den vorangegangenen Abschnitten verwendet wurde, um die Intensitätsverteilung bei der Interferenz von Photonen bzw. Elektronen zu berechnen.



320.1 Rastertunnelmikroskop-Aufnahme eines Quantenpferchs: Zwischen 48 Eisenatomen auf einer Kupferoberfläche ist ein Elektron eingesperrt. Seine Aufenthaltswahrscheinlichkeit zeigt eine wellenartige Struktur.



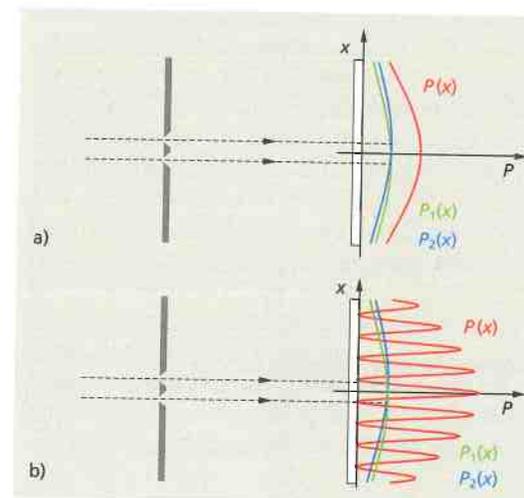
321.1 Zeigeraddition und Antreffwahrscheinlichkeit $P(x)$ für Elektronen hinter einem Doppelspalt

9.2.2 Interferenz von Materiewellen

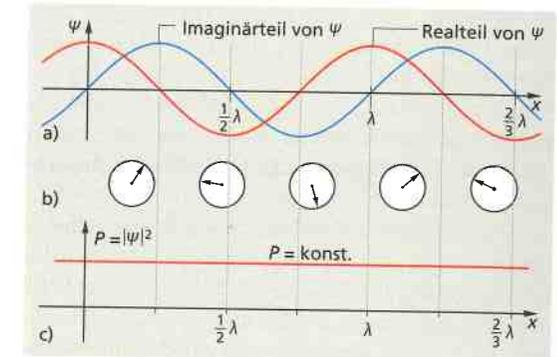
Elektronen am Doppelspalt Ein typischer Unterschied zwischen klassischen Teilchen und Quantenobjekten zeigt sich in Doppelspaltexperimenten. Werden beispielsweise Bälle sehr oft durch einen großen Doppelspalt gegen eine Wand geworfen, so ist dort die Antreffwahrscheinlichkeit $P(x)$ gleich der Summe der Antreffwahrscheinlichkeiten hinter jedem einzelnen Spalt $P_1(x)$ und $P_2(x)$ (Abb. 321.2):

$$P(x) = P_1(x) + P_2(x). \quad (9.8)$$

Für Elektronen, die einen entsprechend kleineren Doppelspalt passieren, ist die Antreffwahrscheinlichkeit jedoch eine andere: Quantenobjekte zeigen Interferenz, wenn zwei Wege zwischen Quelle und Empfänger möglich sind. Bei ihnen ist die resultierende Antreffwahrscheinlichkeit nicht die Summe



321.2 Antreffwahrscheinlichkeiten für Einzel- und Doppelspaltexperimente: a) Bei klassischen Teilchen summieren sich die Einzelwahrscheinlichkeiten b) Bei Quantenobjekten kommt es zur Interferenz.



321.3 Materiewelle eines Elektrons mit genau definierter Wellenlänge. Das Elektron ist delokalisiert.

der Antreffwahrscheinlichkeiten hinter jedem einzelnen Spalt:

$$P(x) \neq P_1(x) + P_2(x). \quad (9.9)$$

Stattdessen müssen zunächst für jeden Ort x auf dem Schirm die Zeiger Ψ_1 und Ψ_2 addiert werden (Abb. 321.1). Der resultierende Zeiger hat den Betrag:

$$|\Psi| = |\Psi_1(x) + \Psi_2(x)|. \quad (9.10)$$

Für die Wahrscheinlichkeitsdichte gilt dann:

$$P(x) = |\Psi_1(x) + \Psi_2(x)|^2 \quad (9.11)$$

$$P(x) = |\Psi_1(x)|^2 + |\Psi_2(x)|^2 + 2\Psi_1(x) \cdot \Psi_2(x). \quad (9.12)$$

Daraus ergibt sich:

$$P(x) = P_1(x) + P_2(x) + 2\Psi_1(x) \cdot \Psi_2(x). \quad (9.13)$$

Der Unterschied im Vergleich zum Verhalten klassischer Teilchen wird also durch den letzten Term dieser Beziehung ausgedrückt. Es gilt:

$$\Psi_1(x) \cdot \Psi_2(x) = |\Psi_1(x)| \cdot |\Psi_2(x)| \cdot \cos \delta. \quad (9.14)$$

Dabei ist δ der Winkel, der von den beiden Zeigern eingeschlossen wird.

Freie Elektronen Im Strahl einer Elektronenröhre besitzen die Elektronen eine bestimmte Geschwindigkeit und damit eine bestimmte Wellenlänge λ . Eine Momentaufnahme der zugehörigen Materiewelle zeigt die Abb. 321.3a: $\Psi(x)$ lässt sich durch eine Kosinusfunktion darstellen. Der Betrag der Zeiger $|\Psi|$ ändert sich längs der Ausbreitungsrichtung x nicht; daher ist die Wahrscheinlichkeitsdichte $|\Psi(x)|^2$ an allen Stellen gleich groß (Abb. 321.3c). Das bedeutet: **Ein Elektron, das durch eine Wellenfunktion mit einer genau definierten Wellenlänge beschrieben wird, lässt sich nicht lokalisieren.**

321-1
Video zum Doppelspalt-Experiment

M3
Skalarprodukt
→ S. 544

Wellenpakete Eine Funktion $\Psi(x)$, die nur eine einzige Wellenlänge enthält, entspricht einer Aufenthaltswahrscheinlichkeit, die gleichmäßig entlang der x -Achse verteilt ist. Eine Modulation der Aufenthaltswahrscheinlichkeit kommt jedoch zustande, wenn $\Psi(x)$ durch Überlagerung mehrerer Wellen mit unterschiedlicher Wellenlänge entsteht.

Abb. 322.1 zeigt die Überlagerung einer unterschiedlichen Anzahl von Wellen. Die Welle $f_0(x)$ hat die Wellenlänge λ_0 . Werden dieser Welle zwei weitere mit den Wellenlängen $\lambda_0 + \Delta\lambda/2$ und $\lambda_0 - \Delta\lambda/2$ überlagert, so entsteht wiederum eine periodische Funktion. Diese zeigt allerdings wie eine Schwebung Stellen mit großen Funktionswerten und Stellen, an denen die Funktionswerte fast völlig verschwinden. Das Hinzufügen weiterer Wellen mit zusätzlichen Wellenlängen aus dem Intervall $\lambda_0 \pm \Delta\lambda/2$ bewirkt, dass sich die Periodenlänge der Wellenfunktion vergrößert. Bei einer sehr großen Anzahl von Wellen mit Wellenlängen aus einem Intervall $\lambda_0 \pm \Delta\lambda/2$ formt sich ein Wellenpaket, dessen Einhüllende nur in einem beschränkten Bereich von null verschiedene Werte aufweist.

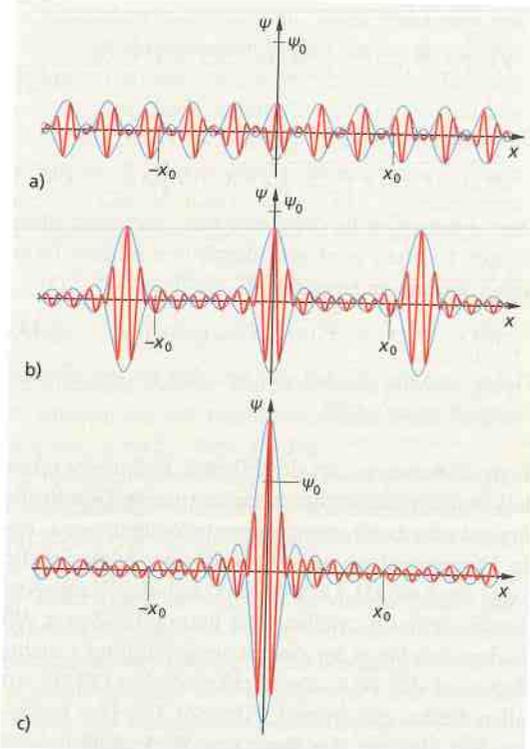
Um die Breite eines solchen Wellenpakets zu beschreiben, wird in der Regel die Halbwertsbreite Δx angegeben, also die Breite der Einhüllenden in Höhe

des halben Maximalwerts. Eine Welle kann statt durch die Wellenlänge auch durch die **Wellenzahl** $k = 2\pi/\lambda$ charakterisiert werden. Abb. 322.2 zeigt den Einfluss der Intervallbreite Δk auf die Breite Δx des Wellenpakets: Je größer das Wellenzahlintervall ist, desto kleiner ist die Ausdehnung des Wellenpakets in x -Richtung. **Ein lokalisiertes Elektron kann als eine Materiewelle beschrieben werden, die aus der Überlagerung vieler Wellen mit unterschiedlicher Wellenlänge entsteht.**

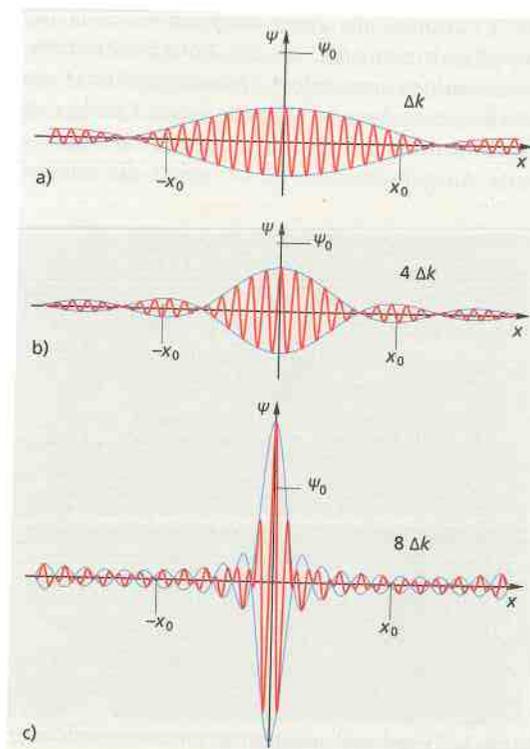
Zeigerdarstellung Eine Materiewelle, die aus mehreren Wellen zusammengesetzt ist, zeigt Abb. 323.1. Haben beispielsweise 4 Wellen die gleiche Wellenlänge, so weisen die Zeiger an den unterschiedlichen Orten auf der x -Achse jeweils alle in die gleiche Richtung (Abb. 323.1 a). Die resultierenden Zeiger sind daher alle gleich lang; die Aufenthaltswahrscheinlichkeit $|\Psi|^2$ ist an allen Orten gleich groß. Wenn sich jedoch die 4 Wellenlängen unterscheiden, ergeben sich an einem bestimmten Ort unterschiedliche Zeigerstellungen für die einzelnen Wellen (Abb. 323.1 b). Die Länge des resultierenden Zeigers variiert von Ort zu Ort. Das Maximum der Aufenthaltswahrscheinlichkeit liegt dort, wo alle Zeiger in die gleiche Richtung weisen.

322-1 Simulation zu Wellenpaketen

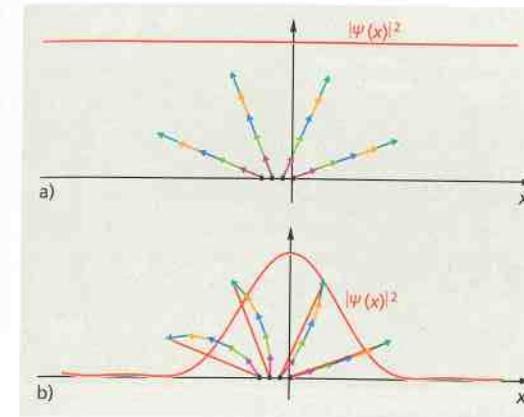
322-2 Abschätzung zur Breite von Wellenpaketen



322.1 Überlagerung von a) 3 Wellen, b) 7 Wellen c) 15 Wellen aus einem bestimmten Wellenlängenintervall



322.2 Überlagerung von 15 Wellen aus unterschiedlich großen Wellenzahlintervallen



323.1 Aufenthaltswahrscheinlichkeit bei Überlagerung von 4 Wellen a) gleicher Wellenlänge, b) unterschiedlicher Wellenlänge

9.2.3 Heisenberg'sche Unbestimmtheitsrelation

Quantenobjekte wie Elektronen oder Photonen lassen sich als Überlagerung mehrerer Materiewellenfunktionen auffassen. Je genauer der Ort eines Quantenobjekts festgelegt wird, desto größer muss der Wellenlängenbereich der einzelnen überlagerten Wellenfunktionen sein.

Das bedeutet umgekehrt: Wenn der Ort eines Quantenobjekts besonders genau festgelegt werden kann, enthält seine Wellenfunktion ein breites Spektrum unterschiedlicher Wellen. Eine exakte Angabe der Wellenzahl ist also dann nicht möglich. Die Wellenzahl ist über die Gleichung

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{p}{2\pi \cdot \hbar} \tag{9.15}$$

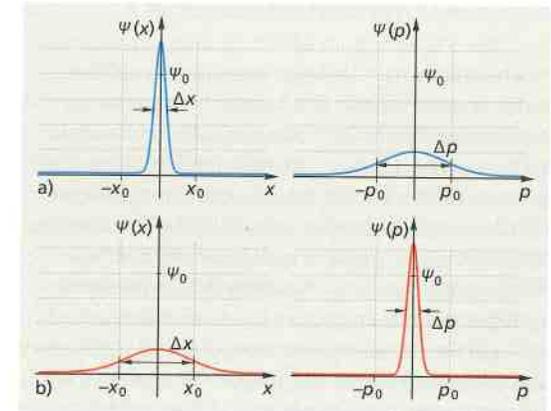
mit dem Impuls des Quantenobjekts verknüpft. Entsprechend dem Wellenzahlintervall Δk , das sich aus der Lokalisierung des Quantenobjekts ergibt, ist also auch der Impuls des Quantenobjekts unbestimmt.

Die quantitative Beziehung zwischen der Unbestimmtheit des Orts Δx und derjenigen des Impulses Δp_x geht auf WERNER HEISENBERG (1901–1976) zurück. In dieser Beziehung wird berücksichtigt, dass Ort und Impuls Vektorcharakter haben. Für die Unbestimmtheit des Orts Δx ist nur die Unbestimmtheit des Impulses entlang der x -Achse Δp_x zu berücksichtigen.

Heisenberg'sche Unbestimmtheitsrelation: Ort und Impuls eines Quantenobjekts lassen sich gleichzeitig nur mit einer begrenzten Genauigkeit angeben. Es gilt:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{4\pi} \tag{9.16}$$

Abbildung 323.2 veranschaulicht diese Aussage: Je genauer die eine Größe festgelegt ist, desto größer ist



323.2 Das Produkt der Unbestimmtheiten $\Delta x \Delta p_x$ kann nicht beliebig klein sein. Ein kleiner Wert für Δx bedingt einen großen Wert für Δp_x und umgekehrt.

die Unbestimmtheit der anderen Größe. Ort und Impuls eines Quantenobjekts werden daher auch als **komplementäre Größen** bezeichnet.

Unbestimmtheit und Teilchenbahnen Um die Bahn eines Teilchens bzw. eines Quantenobjekts angeben zu können, müsste für einen Zeitpunkt der genaue Ort und der genaue Impuls des Teilchens bestimmt werden. Da dies jedoch grundsätzlich nicht möglich ist, können Quantenobjekten keine genau definierten Bahnen zugeschrieben werden. Die gleichzeitige Messung von Ort und Impuls kann nur eine beschränkte Genauigkeit besitzen, ebenso die Vorhersage über die weitere Bewegung.

323-1 Zerfließen von Wellenpaketen

Komplementarität von Energie und Zeit Neben Ort und Impuls gibt es noch weitere Paare komplementärer Größen von Quantenobjekten. Hierzu gehört auch das Paar Energie E und Zeit t . Es gilt analog zu Gl. (9.16) die Unbestimmtheitsrelation:

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{4\pi} \tag{9.17}$$

Von Bedeutung ist dies beispielsweise für die Energiezustände der Elektronen in einem Atom (s. Kap. 10). Die Unbestimmtheit der Energie eines Zustands hängt davon ab, über welchen Zeitraum dieser Zustand stabil ist. Unterliegt das Atom über lange Zeit keinen Veränderungen, so wird Δt sehr groß. Die Energie eines Zustands kann dann mit großer Genauigkeit festgelegt sein.

323-2 Simulation zur Unbestimmtheitsrelation

Körper mit großer Masse Für Quantenobjekte lassen sich aufgrund der Komplementarität von Ort und Impuls keine Bahnen angeben. Für Körper mit großer Masse bleibt der Bahnbegriff dennoch sinnvoll. Dies zeigt die folgende Beispielrechnung:

Rastertunnelmikroskop

Hochkonzentriert bewegt ein Wissenschaftler einen mechanischen Greifarm, um die winzige Materialprobe ins Zentrum der Vakuumkammer zu bugsieren. Lässt er die Probe fallen, muss die luftleer gepumpte Edelstahlapparatur geöffnet werden – ein Zeitverlust von zwei Wochen. In der Apparatur, die aussieht wie das Modell einer Raumstation, steckt ein unscheinbarer Keramikzylinder, der kaum größer ist als eine Espressotasse – ein Rastertunnelmikroskop.

Das Herzstück dieses Mikroskops ist eine extrem dünne Nadel, die sich wenige Millionstel Millimeter über der Materialprobe bewegt. Zwischen Nadel und Probe fließt ein kleiner Strom, der *Tunnelstrom*: Die Elektronen müssen zum Verlassen der Nadel eine Potenzialbarriere überwinden. Diese Barriere wird durch das Anlegen einer Spannung so weit gesenkt, dass die Wellenfunktion der Elektronen auch hinter der Barriere deutlich von null verschiedene Werte annimmt (s. S. 347). Einzelne Elektronen können die Barriere »durchtunneln«.

Die Nadel wird mithilfe von Piezokristallen so über die Probe bewegt, dass der Abstand und damit die Tunnelstromstärke immer konstant ist –



324.1 Rastertunnelmikroskop

ähnlich wie ein Flugzeug mit automatischer Höhenkontrolle stets in gleicher Höhe fliegt. Die Nadel fährt Zeile für Zeile über die Probe und zeichnet auf einem Monitor ein Bild, auf dem selbst feinste Details zu erkennen sind, im besten Fall sogar einzelne Atome.

In einer besonderen Variante ist die Mikroskopnadel mit einem magnetischen Material wie etwa Chrom beschichtet. Führt man die verchromte Nadelspitze nun dicht über die Oberfläche eines Magneten, so hängt die Tunnelstromstärke nicht nur vom Abstand ab, sondern auch vom Magnet-

scheinlichkeitsverteilung für das Auftreffen des Quantenobjekts auf einem Schirm hinter dem Spalt.

Kopenhagener Interpretation In der Diskussion um die Aussagen der Quantenmechanik wurde oft die Frage gestellt, ob Ort und Impuls tatsächlich nicht genau festgelegt sind oder ob lediglich die Messung beider Größen nicht beliebig genau erfolgen kann. Nach der Kopenhagener Interpretation, die im Wesentlichen auf NIELS BOHR (1885–1962) zurückgeht, ist die unvermeidliche Wechselwirkung bei der Messung zwischen Messobjekt und Messgerät für diese Unbestimmtheit verantwortlich. Als Folge einer Messung ist eine Aussage über das Verhalten eines einzelnen Quantenobjekts nur mit den entsprechenden Einschränkungen möglich. Aus der Beobachtung lässt sich eine Wahrscheinlichkeitsfunktion entnehmen, deren zeitliche Entwicklung berechenbar ist. Die Frage, ob einem Quantenobjekt zwischen zwei Messungen »reale Eigenschaften« zugeschrieben werden können, bzw. was zwischen zwei Messungen »wirklich geschieht«, kann die Quantenmechanik nicht beantworten.

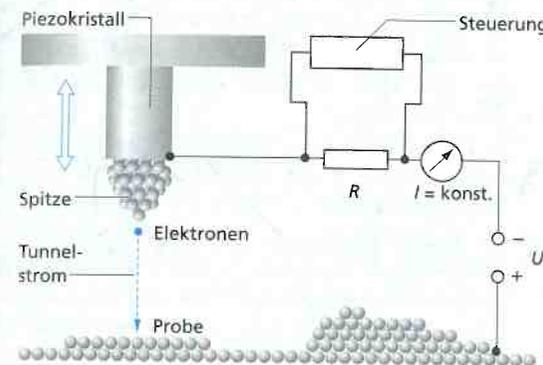
Wird die Geschwindigkeit einer rollenden Kugel mit $v = 1 \text{ m/s}$ auf 1 Prozent genau gemessen, so ist $\Delta v = 0,01 \text{ m/s}$. Beträgt die Masse der Kugel $m = 1 \text{ kg}$, so gilt für die Unbestimmtheit des Impulses $\Delta p = 0,01 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$. Nach Gl. (9.16) gilt damit für die Unbestimmtheit des Orts:

$$\Delta x \geq \frac{h}{4\pi \cdot 0,01 \text{ m/s}} = 5,27 \cdot 10^{-33} \text{ m.}$$

Dieser Wert ist verschwindend gering gegenüber einem Atomdurchmesser, der in der Größenordnung von 10^{-10} m liegt. **Für die Bewegung makroskopischer Objekte ist die Unbestimmtheitsrelation nicht von Bedeutung.**

Messprozess Die Messung einer bestimmten physikalischen Größe an einem Quantenobjekt beeinflusst den Zustand der komplementären Größe. Wird also beispielsweise der Spalt in einem Beugungsexperiment enger gemacht, so muss die Unbestimmtheit des Impulses größer werden. Allerdings betrifft diese Messung ein einzelnes Quantenobjekt nicht in dem Sinne, dass es von der Kante einen definierten Stoß bekommen und sich nun mit dem Impuls Δp_x weiterbewegen würde. Es ändert sich lediglich die Wahr-

feld zwischen Spitze und Probe. Sind die Felder von Spitze und Probe gleich ausgerichtet, wird die Tunnelstromstärke größer, sind sie einander entgegengesetzt gerichtet, wird sie kleiner. Damit fungiert das Mikroskop als extrem sensibler Magnetsensor. Er macht winzige z. B. eisenhaltige Bereiche mit einer Auflösung von weniger als einem Nanometer sichtbar. Im Laufe weniger Minuten baut sich auf dem Monitor ein Bild auf, das einem Kopfsteinpflaster ähnelt: helle und dunkle Flecke auf einer grauen Oberfläche.



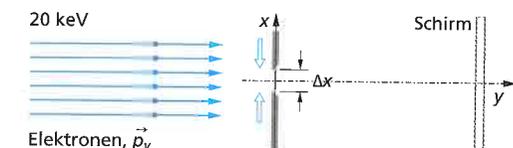
325.1 Prinzip eines Rastertunnelmikroskops. Die Stromstärke ist abhängig vom Abstand zwischen Nadel und Probe

Jeder Fleck stellt eine Eiseninsel dar; die hellen Flecke sind in eine Richtung magnetisiert, die dunklen entgegengesetzt dazu. Für die Forscher dienen diese nanometerkleinen Eisenflecke als Modellsystem für eine Computerfestplatte der Zukunft. Je kleiner die »Magnetbits« auf einer Harddisk sind, umso mehr Daten lassen sich auf ihr speichern. Allerdings neigen nanometerkleine Eiseninseln dazu, sich aufgrund der natürlichen Wärmebewegung von selbst umzumagnetisieren – die Festplatte löscht sich von selbst. Deshalb untersuchen die Physiker, unter welchen Bedingungen die Magnetbits möglichst stabil bleiben. Mit ihrem Mikroskop konnten sie zeigen, dass die Neigung zur spontanen Ummagnetisierung nicht nur von der Größe der Eiseninseln abhängt, sondern auch von ihrer Form: Runde Inseln schalten viel seltener als langgestreckte oder verzweigte. Die Hersteller tun also gut daran, möglichst runde, kompakte Magnetkörnchen für ihre Festplatten zu verwenden.

1. Beschreiben Sie, wie es zu der großen Auflösung des Rastertunnelmikroskops in allen drei Raumrichtungen kommt.

1. Erläutern Sie die Aussage: »Die Amplitude der Zustandsfunktion $\Psi(x, t)$ hat physikalisch keine Bedeutung.«
2. Vergleichen Sie die Antreffwahrscheinlichkeiten klassischer Bälle nach Durchgang durch einen Doppelspalt mit denen von Quantenobjekten. Fertigen Sie eine Skizze für die jeweilige Situation an und vergleichen Sie, wie in beiden Fällen die Antreffwahrscheinlichkeit berechnet wird.
3. Erklären Sie das Zustandekommen von Wellenpaketen. Gehen Sie darauf ein, wodurch
 - a die Periodenlänge der resultierenden Wellenfunktion beeinflusst wird,
 - b die Breite des Wellenpakets beeinflusst wird.
4. Jemand sagt: »Ort und Impuls von Quantenobjekten sind unbestimmt, heißt, sie sind im Rahmen der Messvorrichtung unbekannt, aber prinzipiell objektiv bestimmbar.« Nehmen Sie dazu auf der Basis der Kopenhagener Interpretation Stellung.
5. Erläutern Sie anhand von Beispielen, dass die Unbestimmtheitsrelation in makroskopischen Bereichen vernachlässigbar ist.

6. a Erläutern Sie den Begriff »komplementäre Größen«.
 b Diskutieren Sie in diesem Zusammenhang die Konsequenzen auf die Vorstellung von Elektronenbahnen.
7. Elektronen werden durch eine Spannung von 20 kV in y -Richtung beschleunigt und erhalten dadurch einen recht genau definierten Impuls p_y . Die Elektronen fliegen auf eine Spaltblende mit variabler Breite Δx zu.



- a Beschreiben Sie, was auf dem Schirm zu beobachten ist, wenn die Spaltbreite nach und nach verringert wird.
- b Diskutieren Sie, ob es einen Einfluss auf das Schirmbild hätte, wenn es gelänge, die Anfangsimpulse p_y der Elektronen mit absoluter Genauigkeit festzulegen.

325-1
Bildschirmexperiment zum Rastertunnelmikroskop

325-2
Weiterführendes Material

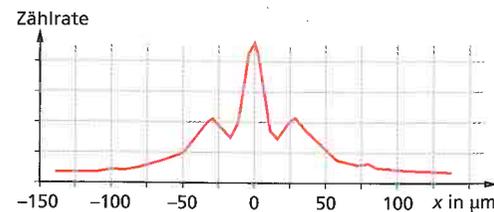
AUFGABE

AUFGABEN

Weitere Aufgaben zu Kapitel 9

- Beschreiben Sie Experimente, die letztlich zu folgenden Modellvorstellungen führten:
 - Photonenmodell beim Licht,
 - Wellenmodell bei Elektronen.
- Beschreiben Sie die Unterschiede zwischen der klassischen Newton'schen Mechanik und der Quantenmechanik. Verdeutlichen Sie diese an einem Beispiel.
- Erläutern Sie die Aussage des Fundamentalprinzips der Quantenphysik an einem selbst gewählten Beispiel.
- a Beschreiben Sie ein Experiment, mit dem sich der Nachweis verschränkter Quantenobjekte erbringen lässt.
 b Erläutern Sie die Messidee und Interpretation der Messergebnisse.
- Die Elektronen in einer Fernsehbildröhre werden durch eine Spannung von 25 kV beschleunigt und fliegen auf ein Lochgitter zu, dessen Löcher einen Durchmesser von 0,1 mm haben. Danach treffen sie auf den Leuchtschirm.
 Untersuchen Sie, ob es dabei zu erkennbaren Beugungserscheinungen kommen kann.
- Elektronen werden durch eine Spannung U von 100 V bis 5000 V in Schritten von 100 V beschleunigt und treffen danach mit konstanter Geschwindigkeit auf eine Graphitprobe, deren Netzebenenabstand $1,23 \cdot 10^{-10}$ m beträgt. Die Elektronen werden im Kristall gestreut. Unter dem so genannten Glanzwinkel α wird eine große Intensität gemessen.
 - Skizzieren Sie die Anordnung mit den Strahlen der einfallenden und abgebeugten Elektronen sowie dem Glanzwinkel α und der Orientierung der Netzebenen.
 - Untersuchen Sie die Abhängigkeit des Glanzwinkels α von der Spannung U . Verwenden Sie hierzu gegebenenfalls ein Tabellenkalkulationsprogramm.
 - Berechnen Sie den Glanzwinkel für Neutronen der Energie 0,025 eV, die auf die Graphitprobe geschossen werden.
 - Berechnen Sie die Energie der Photonen, die die gleiche Wellenlänge haben wie die Neutronen in Aufgabenteil c, und geben Sie an, welchem Bereich im elektromagnetischen Spektrum diese Photonen zuzuordnen sind.
- Elektronen und Photonen zeigen in bestimmten Experimenten ein ähnliches Verhalten. Geben Sie an, worin sich Elektronen und Photonen ähneln und worin sie sich grundsätzlich unterscheiden.

- In einem Doppelspaltexperiment, Spalte und Schirm befinden sich im Vakuum, werden Interferenzerscheinungen bei der Bestrahlung mit sichtbarem Licht festgestellt. Die Lichtquelle wird durch eine »Elektronenquelle« ersetzt, in der die Elektronen mit 3000 V beschleunigt werden. Untersuchen Sie, ob in diesem Experiment auch Interferenzerscheinungen der Elektronen beobachtet werden können.
- Unterschiedliche Wellen sollen an den Netzebenen eines Kristalls so gebeugt werden, dass der Winkel zwischen einfallender und gebeugter Welle 40° beträgt.
 - Berechnen Sie die Wellenlänge der Strahlung für den Fall, dass der Netzebenenabstand $2 \cdot 10^{-10}$ m beträgt.
 - Geben Sie die zugehörigen Teilchenenergien sowohl für Neutronen und Elektronen als auch für Photonen an. → DVD 319-1
- Nehmen Sie zu folgender Aussage Stellung: »Betrachtet man den Raum, in dem sich ein Elektron des Wasserstoffatoms befindet, kann man sagen: Das Elektron ist so groß wie das Atom.«
- Die Abbildung zeigt ein Messergebnis für die Interferenz von C_{60} -Molekülen hinter einem Gitter: $\lambda = 2,75$ pm für $g = 100$ nm.



- Ermitteln Sie mit den Werten aus der Abbildung den Abstand zwischen Schirm und Gitter.
 - Geben Sie die Geschwindigkeit der C_{60} -Moleküle an.
 - Begründen Sie, dass Interferenzexperimente umso schwieriger durchzuführen sind, je größer die Masse der Quanten ist. Verdeutlichen Sie dies am Beispiel kleiner Eisenkugeln mit einem Durchmesser von 0,1 mm.
- a Albert Einstein wies immer wieder auf Interpretationsprobleme der Quantenphysik hin. Er war der Überzeugung, auch im Quantenbereich gäbe es eine objektiv feststellbare Realität. Eine seiner provokativen Fragen lautete: »Ist der Mond nur da, wenn jemand nach ihm schaut?« Nehmen Sie Stellung zu dieser Frage.
 b Informieren Sie sich über das Gedankenexperiment »Schrödingers Katze«. Vergleichen Sie die Situation mit dem Verhalten von Quanten am Doppelspalt.

Überblick: Quantenphysik

Quantenobjekte

<p>Wahrscheinlichkeitsdeutung Für das Antreffen eines Quantenobjekts an einer bestimmten Stelle in einem bestimmten Zeitintervall kann nur eine Wahrscheinlichkeit angegeben werden. Es besteht grundsätzlich keine Möglichkeit, das Verhalten eines Quantenobjekts genau vorherzusagen.</p>	<p>Fundamentalprinzip der Quantenphysik Quanten zeigen Interferenz, wenn sie auf mehreren Wegen zum Empfänger gelangen können und keine Information darüber möglich ist, welchen Weg sie genommen haben.</p>	<p>Verschränkung Ein System aus zwei Quantenobjekten kann verschränkt sein. Die Messung eines Zustands von einem der beiden Quantenobjekte gibt dann auch Auskunft über den Zustand des zweiten. Dabei können sich die Objekte auch weit voneinander entfernt haben.</p>
---	---	---

Elektronen als Quantenobjekte

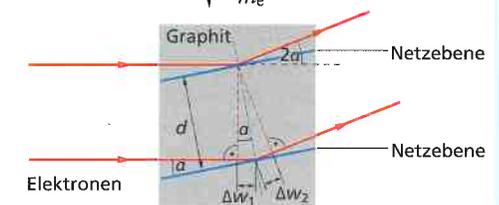
De-Broglie-Wellenlänge für Materieteilchen der Masse m : $\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m \cdot v}$
 Geschwindigkeit eines mit der Spannung U_a beschleunigten Elektrons: $v = \sqrt{\frac{2e \cdot U_a}{m_e}}$

Auftreten von Interferenzmaxima

am Doppelspalt $\sin \alpha_n = n \cdot \frac{\lambda}{d}$

an Kristallen $\sin \alpha_n = n \cdot \frac{\lambda}{2d}$

(Bragg'sche Gleichung)



Elemente der Quantenmechanik

Quantenobjekte werden mithilfe der Wellenfunktion $\Psi(x, t) = \Psi_0 \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$, $i = \sqrt{-1}$, beschrieben. Ψ ist keine messbare Größe, sondern eine komplexe Zahl.

Für die Wahrscheinlichkeit P , ein Quantenobjekt in einem Volumenelement ΔV nachzuweisen, gilt:
 $P(x, t) \cdot \Delta V = |\Psi(x, t)|^2 \cdot \Delta V$.

Verhalten am Doppelspalt:
 Antreffwahrscheinlichkeit hinter Doppelspalt für ...

... klassische Teilchen:

$$P(x) = P_1(x) + P_2(x);$$

P_i Antreffwahrscheinlichkeit hinter Spalt i

... Elektronen:

$$P(x) = |\Psi_1(x) + \Psi_2(x)|^2 = P_1(x) + P_2(x) + 2\Psi_1(x) \cdot \Psi_2(x)$$

Heisenberg'sche Unbestimmtheitsrelation

Ort und Impuls eines Teilchens zu einem Zeitpunkt lassen sich nur mit begrenzter Genauigkeit angeben:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{h}{4\pi}$$

Für Energie und Zeit gilt: $\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{h}{4\pi}$

